

### 単体的凸多面体の面の個数と頂点彩色

大阪大学大学院情報科学研究科 村井 聡  
Satoshi Murai

Graduate School of Information Science and Technology,  
Osaka University

#### 序

凸多面体の面の個数の研究は組合せ論における古典的な研究テーマの一つである. 2014年に Klee と Novik [KN] は, 単体的凸多面体の良い頂点彩色から面の個数に関する綺麗な不等式が導かれる, という興味深い予想を提唱し, 2015年 Juhnke-Kubitzke と著者によりこの予想が肯定的に解決された. 本稿では, 上記の Klee と Novik の予想について簡単に解説する.

#### 1. 単体的凸多面体の下限定理と一般下限定理

最初に単体的凸多面体の面の個数について知られている古典的な結果を幾つか紹介する.

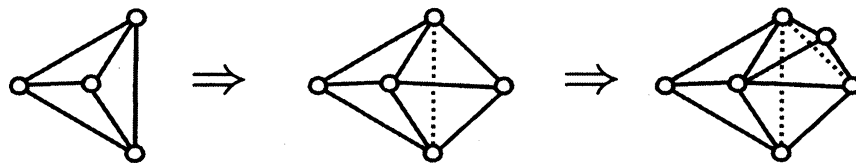
自分自身以外の面が全て単体となる凸多面体を単体的凸多面体という. 整数  $i \geq -1$  に対し,  $f_i(P)$  で凸多面体  $P$  の持つ  $i$  次元面の個数を表す. (但し, 空集合を  $-1$  次元の面と思い  $f_{-1}(P) = 1$  とする.)  $d$  次元単体的凸多面体  $P$  に対し, その  $f$ -列を

$$f(P) = (f_{-1}(P), f_0(P), \dots, f_{d-1}(P))$$

で定義する.

凸多面体の  $f$  列に関する問題で基本的なものの一つに,  $f_i(P)$  の上手い下限や上限が与えられるか? という問題がある. 但し, 何も制限を付けなければ, 単体の場合に面の数が最小になり, また頂点を増やせば面の数はいくらかでも増えてしまうのは明らかである. ここでは『頂点数を固定した時に,  $f_i(P)$  の上手い下限や上限が与えられるか?』という問題を考える.

本稿では特に面の個数の下限に関する話題を中心的に扱う (上限についての話は §5 で少しだけ触れる). 実は, 一般の凸多面体  $P$  について, 頂点数を固定した時の  $f_i(P)$  の最小値を求めることは大変難しい. しかし, 多面体を単体的なものに限ると, 綺麗な最小値が得られることが知られている. 単体からスタートしてそのファセットにピラミッドを立てていくことで得られるような凸多面体  $P$  を **stacked 凸多面体** という.



3次元の stacked 凸多面体

The author was partially supported by JSPS KAKENHI 25400043.

帰納法を使った簡単な計算から,  $n$  個の頂点を持つ  $d$  次元 stacked 凸多面体  $P$  の面の個数は

$$f_i(P) = \begin{cases} \binom{d}{i} n - i \binom{d+1}{i+1}, & 1 \leq i < d-1 \text{ の時,} \\ (d-1)n - (d-2)(d+1), & i = d-1 \text{ の時,} \end{cases}$$

で与えられることがわかる. 実は, この stacked 凸多面体の面の個数が単体的凸多面体の面の個数の最小値を与える.

**定理 1.1** (Barnette's Lower Bound Theorem [Ba1, Ba2]<sup>1</sup>).  $P$  を丁度  $n$  個の頂点を持つ  $d$  次元単体的凸多面体とする.  $d \geq 3$  の時

$$f_i(P) \geq \begin{cases} \binom{d}{i} n - i \binom{d+1}{i+1}, & 1 \leq i < d-1 \text{ の時,} \\ (d-1)n - (d-2)(d+1), & i = d-1 \text{ の時,} \end{cases}$$

が成り立つ. 更に  $d \geq 4$  の時, ある  $i \geq 1$  について等号が成立するなら  $P$  は stacked 凸多面体である.

上の定理は下限予想 (Lower Bound Conjecture) として知られていた予想を Barnette が 1973 年に解決したもので, "Barnette の下限定理" と呼ばれる.

さて, 次に, 現在では "一般下限定理" として知られている上の定理の一般化を紹介する. 実は, Barnette の下限定理は McMullen-Perles-Walkup reduction として知られる手法を用いると,  $i = 1$  の場合のみを証明すれば良いことが分かる (詳しくは [Ka] を見よ). そこで少し定理を書き換える.  $d$  次元単体凸多面体  $P$  に対し, その  $h$ -列

$$h(P) = (h_0(P), h_1(P), \dots, h_d(P))$$

を

$$h_i(P) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{d-j}{i-j} f_{j-1}(P) \quad (i = 0, 1, \dots, d)$$

で定義する. この時,  $h_2 = f_1 - (d-1)f_0 + \binom{d}{2}$ ,  $h_1 = f_0 - d$  であるから

$$h_2(P) - h_1(P) = f_1(P) - df_0(P) + \binom{d+1}{2}.$$

と書ける. すると定理 1.1 の  $i = 1$  の場合の不等式は  $h_2(P) \geq h_1(P)$  に等しいことが分かり, McMullen-Perles-Walkup reduction により, 定理 1.1 自身も以下の定理と同値になる.

**定理 1.2.**  $P$  を  $d$  次元単体的凸多面体とする.  $d \geq 3$  の時

$$h_2(P) \geq h_1(P)$$

が成り立つ. 更に  $d \geq 4$  の時, 等号が成立するのは  $P$  が stacked 凸多面体の場合に限る.

上の定理の一般化として  $h_3(P) \geq h_2(P)$  や  $h_4(P) \geq h_3(P)$  のような不等式が成り立つのではないかと考えるのは自然なことであろう. 実際, このことは正しく, この一般化は一般下限定理 (Generalized Lower Bound Theorem) と呼ばれる. 一般下限定理について正確に理解してもらう為,  $h$ -列に関する基本的な性質を少し述べておく. 次の定理の等式は Dehn-Sommerville 等式として良く知られている.

<sup>1</sup>等号成立の場合の特徴付けは [Ba1, Ba2] では完全に解決しておらず, 最終的に Billera-Lee [BL] によって証明された.

定理 1.3 (Dehn–Sommerville Equation).  $P$  を  $d$  次元単体的凸多面体とする. 任意の  $i = 0, 1, \dots, d$  について  $h_i(P) = h_{d-i}(P)$  が成り立つ.

Dehn–Sommerville 等式から,  $h$ -列について知る為には  $h_0, h_1, \dots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$  のみを知れば十分である事がわかる. 以下の定理は McMullen–Walkup [MW] により “一般下限予想 (Generalized Lower Bound Conjecture)” の名称で予想として紹介され, Stanley [St2] によって証明された.

定理 1.4 (Generalized Lower Bound Theorem<sup>2</sup>). 任意の  $d$  次元単体的凸多面体  $P$  に対し, 次の不等式が成り立つ

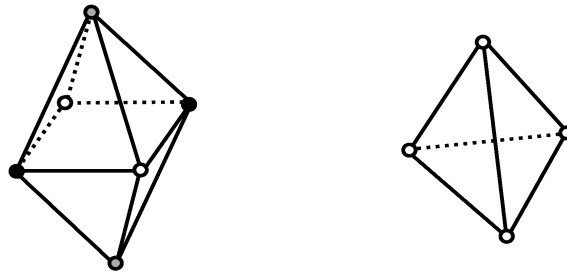
$$h_0(P) \leq h_1(P) \leq h_2(P) \leq \dots \leq h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P).$$

尚, Dehn–Sommerville 等式から, 上の定理は “ $h(P)$  が unimodal である” と言い換えることもできる.

## 2. $d$ 彩色可能な $d$ 次元単体的凸多面体の面の個数

この章では,  $d$  彩色可能という条件を付けた時の  $d$  次元単体的凸多面体の面の個数について考える.

$d$  次元単体的凸多面体  $P$  が **balanced** であるとは,  $P$  の頂点と辺から構成されるグラフが  $d$  彩色可能である時にいう. つまり, balanced な  $d$  次元単体的凸多面体とは, 隣接する頂点が同じ色にならないように多面体の頂点を  $d$  色の色で塗ることが出来る多面体である. 例えば, 下記の図が示すように, 八面体は balanced である. 一方,  $d$  単体のグラフはサイズが  $d+1$  の完全グラフとなるので balanced ではない.



左の八面体は balanced である. 右の四面体は balanced ではない.

一般に  $d$  次元単体的凸多面体は必ず  $(d-1)$  単体をその面として含むので, そのグラフはサイズ  $d$  の完全グラフを含む. よって, 彩色数は必ず  $d$  以上となる事を注意しておく.

Balanced という条件を付けた時に直ちに分かることとして, この条件により凸多面体の面の個数に関してある種の上限が与えられるという点がある. 実際, 単体的凸多面体が balanced ならそのグラフはサイズ  $d+1$  の完全グラフを持たず, このことから辺の数に関する上限が得られることは容易にわかるであろう. (単体的凸多面体でグラフが完全グラフになるものも沢山あることを注意しておく.) また, Stanley [St2] は代数的な手法を用いることで, 単体的凸多面体より一般的な対象である単体的複体の場合に彩色可能性から綺麗な  $f$ -列の上限を求めている.

Balanced な単体的凸多面体の  $f$ -列に関する, より非自明なこととして, 実は辺や面の個数の下限を与えることも出来ることが知られている. 次の定理は Goff, Klee, Novik [GKN] らによって発見された.

<sup>2</sup>ここでは省略するが, 等号が成立するのはどのような多面体の時かも知られている [MN].

定理 2.1 (Balanced Lower Bound Theorem).  $P$  を balanced な  $d$  次元単体的凸多面体とする.  $d \geq 3$  の時, 次が成り立つ.

$$h_2(P) \geq \frac{d-1}{2} h_1(P).$$

上の定理は下限定理の balanced 類似と考えることができる. では, 一般下限定理の balanced 類似は無いのだろうか? このことは, Klee と Novik [KN] により考えられた. 彼らが考えた予想は, “ $P$  が balanced な  $d$  次元単体的凸多面体なら

$$(1) \quad \frac{h_0(P)}{\binom{d}{0}} \leq \frac{h_1(P)}{\binom{d}{1}} \leq \frac{h_2(P)}{\binom{d}{2}} \leq \dots \leq \frac{h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P)}{\binom{d}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}}$$

という不等式が成り立つ” という綺麗な予想である. 少し分かりにくいかもしれないが,

$$\frac{h_1(P)}{\binom{d}{1}} \leq \frac{h_2(P)}{\binom{d}{2}}$$

という不等式は定理 2.1 の  $h_2(P) \geq \frac{d-1}{2} h_1(P)$  と同じものとなり, (1) は Balanced Lower Bound Theorem の一般化となっている. この予想が実際に正しいことは最近 Juhnke-Kubitzke と著者 [KM] によって確かめられた.

定理 2.2.  $P$  を  $d$  次元単体的凸多面体とする.  $P$  が balanced なら, 次が成り立つ

$$\frac{h_0(P)}{\binom{d}{0}} \leq \frac{h_1(P)}{\binom{d}{1}} \leq \frac{h_2(P)}{\binom{d}{2}} \leq \dots \leq \frac{h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P)}{\binom{d}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}}.$$

### 3. FLAG $f$ -VECTOR を用いた考え方

この章では, balanced な  $d$  次元単体的凸多面体を考える時に, 何故 “ $h_i(P) \div \binom{d}{i}$ ” のような数が現れるのか簡単に解説する. 結論から言うと, この数は flag  $h$ -列と呼ばれるものの平均として現れる.

$P$  を balanced な  $d$  次元単体的凸多面体とし,  $V(P)$  を  $P$  の頂点集合とする.  $P$  は balanced であるので, ある写像  $c: V(P) \rightarrow [d] = \{1, 2, \dots, d\}$  で「頂点  $u$  と  $v$  を結ぶ  $P$  の辺があれば必ず  $c(u) \neq c(v)$ 」を満たすものが存在する. このような写像  $c: V(P) \rightarrow [d]$  を一つ固定する.  $P$  の面  $F$  に対し

$$c(F) = \{c(v) : v \text{ は } F \text{ の頂点}\} \subseteq [d]$$

と定め, 各部分集合  $S \subseteq [d]$  に対し,  $f_S(P)$  を  $P$  の面  $F$  で  $c(F) = S$  となるものの個数とする. この時,  $(f_S(P) : S \subseteq [d])$  を  $P$  の flag  $f$ -列と呼ぶ. flag  $f$ -列は  $f$ -列よりも詳細な情報を持っている. 実際, 通常の  $f$ -列と flag  $f$ -列の間に

$$f_{i-1}(P) = \sum_{S \subseteq [d], |S|=i} f_S(P)$$

という関係が成り立つことが簡単に分かる. また,  $h$ -列の類似として,  $P$  の flag  $h$ -列  $(h_S(P) : S \subseteq [d])$  を次で定義する:

$$h_S(P) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f_T(P).$$

(但し,  $f_0(P) = 1$  とし,  $T = \emptyset$  の場合も考える.)  $f$ -列の場合と同じように,  $h$ -列と flag  $h$ -列の間に次の関係が成り立つことも容易に分かる

$$h_i(P) = \sum_{S \subseteq [d], |S|=i} h_S(P).$$

さて, ここで定理 2.2 に戻る. 定理で考えられている値  $\frac{h_i(P)}{\binom{d}{i}}$  は, 上の関係式を考えれば,  $(h_S(P) : S \subseteq [d], |S| = i)$  の平均であると考えられることができる. 実際, この考え方は重要で, 定理 2.2 の証明は, 実際には次の定理を証明することで与えられる.

**定理 3.1** ([KM]).  $P$  を balanced な  $d$  次元単体的凸多面体とし,  $i$  を  $\frac{d}{2}$  未満の正の整数とする. この時, 任意の  $W \subseteq [d]$  で  $|W| = 2i + 1$  を満たすものに対し, 次が成り立つ

$$\sum_{S \subseteq W, |S|=i} h_S(P) \leq \sum_{S \subseteq W, |S|=i+1} h_S(P).$$

上の定理が先の平均の話とどう関係するのか説明しておく. 定理 3.1 の等式の左辺を  $\binom{|W|}{i}$  で割ると  $(h_S(P) : S \subseteq W, |S| = i)$  の平均が得られる. 同様に, 右辺を  $\binom{|W|}{i+1}$  で割ると,  $(h_S(P) : S \subseteq W, |S| = i + 1)$  の平均が得られる. しかし,  $\binom{|W|}{i} = \binom{|W|}{i+1}$  であるから, 定理 3.1 の言っていることは, 任意の部分集合  $W \subseteq [d]$  で  $|W| = 2i + 1$  となるものに対し,  $(h_S(P) : S \subseteq W, |S| = i)$  の平均が  $(h_S(P) : S \subseteq W, |S| = i + 1)$  の平均以下であるという事である. “任意の部分集合  $W \subseteq [d]$  について成り立つ” というのを上手く使うと, このことから  $(h_S(P) : |S| = i)$  の平均が  $(h_S(P) : |S| = i + 1)$  の平均以下であるという事が簡単に導かれる (詳しくは [KN] を見よ).

#### 4. 彩色と面の個数に関する幾つかの問題

最後に, 定理 2.2 に関連する話題を幾つか紹介する.

**4.1. 面の個数の上限.** 定理 2.1 や 2.2 は面の個数の下限を与える定理である. 一方, balanced な単体的凸多面体の面の個数の上限については, Stanley [St2] によるより一般的なセッティングでの上限はあるが, 凸多面体の場合に満足のいく結果は得られていない. 尚, balanced という条件を外した時には次の定理が良く知られている.

**定理 4.1** (Upper Bound Theorem). 丁度  $n$  個の頂点を持つ  $d$  次元凸多面体  $P$  に対し, 次が成り立つ

$$h_i(P) \leq \binom{n-d+i-1}{i} \quad (i = 0, 1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor).$$

上の定理は上限予想 (Upper Bound Conjecture) として知られていた定理を McMullen [Mc] が 1970 年に解決した凸多面体論における有名な結果である. 尚,  $P$  が巡回凸多面体と呼ばれる単体的凸多面体の場合に上の不等式で等号が成立し, 定理 4.1 の不等式は最良な不等式となっている. Upper Bound Theorem の balanced 類似が得られるかという問題は大変興味深い問題である.

**4.2.  $\mathbf{a}$ -balanced な単体的凸多面体.**  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$  が  $a_1 + \dots + a_n = d$  を満たすとする.  $d$  次元単体的凸多面体  $P$  が  $\mathbf{a}$ -balanced であるとは, ある写像  $c : V(P) \rightarrow [n]$  があり, 「任意のファセット  $F$  に対し, 各  $i = 1, 2, \dots, n$  について  $c(v) = i$  となる  $F$  の頂点が丁度  $a_i$  個ある」という条件を満たす時にいう<sup>3</sup>. 例えば,

<sup>3</sup> $a_1 = \dots = a_n = 1$  の時が通常の balanced の条件に対応する.

(2, 3)-balanced な単体的凸多面体は, 上手く多面体の頂点を赤と青で塗り分けると, 全てのファセットにおいて, 赤色の頂点が2つ, 青色の頂点が3つあるようにできる単体的凸多面体である.  $\alpha$ -balanced 性は, 代数的な観点から見ると balanced 性の自然な一般化となっており, 定理 2.1 や 2.2 の  $\alpha$ -balanced 類似が作れるか? という問題は興味深い問題である.

4.3. 中心対称な凸多面体. ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  内の凸多面体  $P$  が中心対称であるとは  $P = -P$  を満たす時に言う, 但し  $-P = \{-x \in \mathbb{R}^n : x \in P\}$  である. 中心対称な単体的凸多面体について次が知られている (下記の定理の更なる一般化も Adim [Ad] によって証明されている).

定理 4.2 (Stanley [St3]).  $P$  が中心対称な  $d$ 次元単体的凸多面体である時, 次が成り立つ

$$h_0(P) - \binom{d}{0} \leq h_1(P) - \binom{d}{1} \leq h_2(P) - \binom{d}{2} \leq \cdots \leq h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P) - \binom{d}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}.$$

上の定理と定理 2.2 を見るに, ある特殊な単体的凸多面体のクラスに対する一般下限定理の類似はもっと他にもあるように思える. そのようなクラスを新しく見つけてくることは大変興味深い問題である.

#### REFERENCES

- [Ad] R.M. Adin, On face numbers of rational simplicial polytopes with symmetry, *Adv. Math.* **115** (1995), 269–285.
- [Ba1] D.W. Barnette, The minimum number of vertices of a simple polytope, *Israel J. Math.* **10** (1971), 121–125.
- [Ba2] D.W. Barnette, A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes, *Pacific J. Math.* **46** (1973), 349–354.
- [BL] L. Billera and C.W. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen’s conditions for  $f$ -vectors of simplicial convex polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **31** (1981), 237–255.
- [Ka] G. Kalai, Rigidity and the lower bound theorem. I, *Invent. Math.* **88** (1987), 125–151.
- [KM] M. Juhnke-Kubitzke and S. Murai, Balanced generalized lower bound inequality for simplicial polytopes, arXiv:1503.06430.
- [KN] S. Klee and I. Novik, Lower Bound Theorems and a Generalized Lower Bound Conjecture for balanced simplicial complexes, *Mathematika*, to appear.
- [GKN] M. Goff, S. Klee and I. Novik, Balanced complexes and complexes without large missing faces, *Ark. Mat.* **49** (2011), 335–350.
- [Mc] P. McMullen, The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika* **17** (1970), 179–184.
- [MW] P. McMullen and D.W. Walkup, A generalized lower-bound conjecture for simplicial polytopes, *Mathematika* **18** (1971), 264–273.
- [MN] S. Murai and E. Nevo, On the generalized lower bound conjecture for polytopes and spheres, *Acta Math.* **210** (2013), 185–202.
- [St1] R.P. Stanley, Balanced Cohen-Macaulay complexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **249** (1979), 139–157.
- [St2] R.P. Stanley, The number of faces of simplicial convex polytopes, *Adv. Math.* **35** (1980), 236–238.
- [St3] R.P. Stanley, On the number of faces of centrally-symmetric simplicial polytopes *Graphs and Combinatorics* **3** (1987), 55–66.

E-mail address: s-murai@ist.osaka-u.ac.jp