数理解析研究所講究録
第 1987 巻 2016 年 1-10

Fréchet-Urysohn, sequential and k-subspaces of free topological groups

静岡大学・学術院教育学領域　山田　耕三

Kohzo Yamada
College of Education, Shizuoka University

1　はじめに

本稿における位相空間 X は全て Tychonoff space とする。特に，第 2 節以降において位相空間 X は metrizable space のみを扱っている。また，基本的な概念については文献 [3] を，topological group に関する事柄については文献 [2] と [4] を参照されたい。

Tychonoff space X に対して，$F(X)$ と $A(X)$ をそれぞれ Markov [7] の意味での X 上の free topological group，free abelian topological group とする。$F(X)$ の各要素 g は word と呼ばれ，一般に

$$g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}, \text{ ただし，各 } i = 1, 2, \ldots, n \text{ に対して } x_i \in X \text{ かつ } \varepsilon_i = \pm 1$$

と表される。特に $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ がこれ以上キャンセルされないとき $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ を g の recuced form という。さらにこのとき n を g の長さといい $\ell(g)$ で表す。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X) = \{g \in F(X) : \ell(g) \leq n\}$ とおくと

$$F_1(X) \subseteq F_2(X) \subseteq \cdots \subseteq F_n(X) \subseteq \cdots \subseteq F(X) \text{ かつ } F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$$

となっているが，さらに各 $F_n(X)$ は $F(X)$ の closed subset になることが知られている。一方，$A(X)$ の word g は一般に

$$g = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n,$$
$$\text{ただし，各 } i = 1, 2, \ldots, n \text{ に対して } x_i \in X \text{ かつ } \varepsilon_i = \pm 1$$

と表されるが，$A_n(X)$ は $F_n(X)$ と同様にして定義され，各 $A_n(X)$ も $A(X)$ の closed subset になることが知られている。

Metrizable space X が持っている性質の一つである first-countability に着目し，その性質を一般化したよく知られている性質として，Fréchet-Urysohn property, sequentiality,

k-property 等があるが，それらの関係は，

$$\begin{aligned}\text{metrizability} &\Longrightarrow \text{first-countability} \\ &\Longrightarrow \text{Fréchet-Urysohn property} \Longrightarrow \text{sequentiality} \Longrightarrow k\text{-property}\end{aligned}$$

となっている。次のよく知られた結果は，たとえ X が単純な構造を持っている空間であっても，その X から生成される $F(X)$ 及び $A(X)$ の位相的構造が複雑になることを示唆している。

定理 1.1. $F(X)$ または $A(X)$ が *Fréchet-Urysohn* ならば X は *discrete space* である。

この結果より，収束点列とその収束点を合わせた空間 X から生成された $F(X)$ や $A(X)$ においても，いずれも Fréchet-Urysohn ではなく，特に metrizable space にならないことがわかる。一方で，Arhangel'skiĭ, Okunev and Pestov [1] が次の結果を示した。尚，本稿では，位相空間 X に対して X の non-isolated point 全てを集めた集合を $d(X)$ で表す。

定理 1.2 ([1])**.** X を *metrizable space* とするとき，
(1) $A(X)$ が *k-space* になるための必要十分条件は X が *locally compact* かつ $d(X)$ が *separable* になることである。
(2) $F(X)$ が *k-space* になるための必要十分条件は X が *locally compact* かつ *separable* となるか，または *discrete space* になることである。

これらの結果を踏まえて，筆者は文献 [9, 10, 11, 12] において，各 $A_n(X)$ や $F_n(X)$ $(n \geq 2)$ が metrizability から k-property までのそれぞれの性質を持つための X の条件を調べた。それらの結果をまとめると次のようになる。

定理 1.3 ([9, 10, 11, 12])**.** *Metrizable space* X において以下が成立する。
I. $A_n(X)$ について

(1) $A_2(X)$ は常に *Fréchet-Urysohn* である。よって *sequential* であり，*k-space* である。

(2) 以下は同値である。
  (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *metrizable;*
  (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *first-counable;*
  (c) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *Fréchet-Urysohn;*
  (d) $A_2(X)$ が *metrizable;*
  (e) $A_2(X)$ が *first countable;*

(f) $A_3(X)$ が *Fréchet-Urysohn;*

(g) $d(X)$ が *compact.*

(3) 以下は同値である。

(a) $A_3(X)$ が *sequential;*

(b) $A_3(X)$ が *k-space;*

(c) X が *locally compact* または $d(X)$ が *compact.*

(4) 以下は同値である。

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *sequential;*

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *k-space;*

(c) $A_4(X)$ が *sequential;*

(d) $A_4(X)$ が *k-space;*

(e) X が *locally compact* かつ $d(X)$ が *separable,* または $d(X)$ が *compact.*

II. $F_n(X)$ について

(1) 以下は同値である。

(a) $F_3(X)$ が *metrizable;*

(b) $F_3(X)$ が *first-countable;*

(c) $F_2(X)$ が *metrizable;*

(d) $F_2(X)$ が *first-countable;*

(e) $d(X)$ が *compact.*

(2) 以下は同値である。

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *metrizable;*

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *first-countable;*

(c) $F_4(X)$ が *metrizable;*

(d) $F_4(X)$ が *first-countable;*

(e) X が *compact* または *discrete.*

(3) $F_2(X)$ は常に *Fréchet-Urysohn* である。よって *sequential* であり *k-space* である。

(4) 以下は同値である。

(a) $F_3(X)$ が *Féchet-Urysohn;*

(b) $d(X)$ が *compact.*

(5) 以下は同値である。

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *Fréchet-Urysohn;*

(b) $F_5(X)$ が *Fréchet-Urysohn;*

(c) X が *compact* または *discrete.*

(6) 以下は同値である。

(a) $F_3(X)$ が *sequential;*

(b) $F_3(X)$ が *k-space;*

(c) X が *locally compact* または $d(X)$ が *compact.*

(7) 以下は同値である。

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *sequential;*

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *k-space;*

(c) $F_8(X)$ が *sequential;*

(d) $F_8(X)$ が *k-space;*

(e) X が *locally compact* かつ *separable.*

上記の結果では，次のことが得られていない。

疑問 1. X を metrizable space とするとき，

(1) $F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn になるための X の必要十分条件は何か？

(2) $n = 4, 5, 6, 7$ に対して $F_n(X)$ が sequential または k-space になるための X の必要十分条件は何か？

特に疑問 1 の (1) に対しては定理 1.3 の II の (4) と (5) より次の疑問が生じる。

疑問 2. X を metrizable space とするとき，

(1) $F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn ならば X は compact になるか？

(2) $d(X)$ が compact ならば $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn になるか？

最近 Lin and Liu [5] が疑問 2 の (2) が否定的であることを示したが，その証明に必要な主となる補題の証明に誤りがあることがわかり，さらには Lin and Liu は [6] においてその補題が成立しない例を構成した。よって，上記の疑問 2 は未解決のままとなったが，本稿では，(1) は否定的であることと同時に (2) の部分解について紹介する。

2 主定理の証明方法

次が，今回得られた主となる結果である。

定理 2.1. *Metrizable space* X が *locally compact* であり，$d(X)$ が *compact* であると仮定する。このとき，$F_4(X)$ が *k-space* ならば $F_4(X)$ は *Fréchet-Urysohn* となる。

以下，上記定理の証明方法についてその概要を説明する。詳細は [13] を参照されたい。

まず X が locally compact で $d(X)$ が compact であることに注目すると，

$$X = C \oplus D,\ \text{ただし } C \text{ は compact かつ } D \text{ は discrete}$$

の形に表すことができる。ここで，X 自身が compact であると，$F_4(X)$ は compact metrizable になってしまうので，ここでは X は non-compact, よって $D \neq \emptyset$ としておける。そこで $F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn になることを示すために，任意に $A \subseteq F_4(X)$ と word $g \in F_4(X)$ をとり，$g \in \overline{A}$ であると仮定する。すると，g に収束する点列 $\{g_n\} \subseteq A$ を見つけることが証明の目的となる。もし $g \in F_4(X) \setminus F_3(X)$ とすると，$F(X) \setminus F_3(X)$ が g の open 近傍となるので，$g \in \overline{A \cap (F_4(X) \setminus F_3(X))}$ である。一方 X が metrizable なので各 $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ は metrizable であるので，$g \in F_3(X)$ としておいてよい。また $d(X)$ が compact なので，定理 1.3 の II (4) より $F_3(X)$ は Fréchet-Urysohn であり，$F_3(X)$ は $F_4(X)$ の closed subset なので，$A \subseteq F_4(X) \setminus F_3(X)$ であると仮定してよい。すると，

$$A \subseteq F_4(X) \setminus F_3(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{2n}(X) \setminus F_{2n-1}(X))$$

であり $\{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{2n}(X) \setminus F_{2n-1}(X))$ は $F(X)$ の clopen subgroup なので

$$g \in \{e\} \cup (F_2(X) \setminus F_1(X))$$

となる。つまり，$g = e$ または $g \in F_2(X) \setminus F_1(X)$ となるときを調べればよいことになり，$e \in \overline{A}$ の場合と $e \in \overline{g^{-1}A}$ の場合についてそれぞれ A または $g^{-1}A$ の中から e に収束する点列を見つけることが目的となる。

まず，点列を見つけるために次の e の近傍を適用する。

定理 2.2 ([10]). $\mathcal{U}_{\widetilde{X}}$ を $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ （実は，$F_1(X) = \widetilde{X}$ である。）の *universal uniformity*（もしくは *universal uniformity* の *base*）とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ と

$U \in \mathcal{U}_{\widetilde{X}}$ に対して，

$$W_n(U) = \{e\} \cup \left\{ \begin{array}{l} g = x_1 x_2 \cdots x_{2k} \in F(X) : \\ \quad (1) \quad x_i \in \widetilde{X} \textit{ for each } i = 1, 2, \ldots, 2k \textit{ and } k \leq n, \\ \quad (2) \quad x_1 x_2 \cdots x_{2k} \textit{ is the reduced form of } g, \\ \quad (3) \quad \{1, 2, \ldots, 2k\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \oplus \{j_1, \ldots, j_k\}, \\ \quad (4) \quad (x_{i_s}, x_{j_s}^{-1}) \in U \textit{ for each } s = 1, \ldots, k, \\ \quad (5) \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \\ \quad (6) \quad i_s < j_s \textit{ for each } s = 1, 2, \ldots, k, \textit{ and} \\ \quad (7) \quad i_s < i_t < j_s \textit{ iff } i_s < j_t < j_s \textit{ for each } s, t = 1, \ldots, k. \end{array} \right\}$$

とおくと，$W_n(U)$ は $F_{2n}(X)$ における e の近傍となる。さらに $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n(U)$ は $F(X)$ における e の近傍となる。

本証明では，この近傍を $n=2$ と $n=3$ に対して，次のように適用する。

系 2.3. 任意の $U \in \mathcal{U}_{\widetilde{X}}$ に対して次が成立する。

(1) $g \in W_2(U) \setminus F_3(X)$ となることの必要十分条件は g が次の条件を満たす *reduced word* $g = abcd$ $(a, b, c, d \in \widetilde{X})$ で表せることである。

$$(a, b^{-1}), (c, d^{-1}) \in U \quad \text{または} \quad (a, d^{-1}), (b, c^{-1}) \in U.$$

(2) $g \in W_3(X) \setminus F_5(X)$ となることの必要十分条件は g が次の (i) から (iv) のいずれかを満たす *reduced word* $g = pqrstu$ $(p, q, r, s, t, u \in \widetilde{X})$ で表せることである。

$$\text{(i) } (p, q^{-1}), (r, s^{-1}), (t, u^{-1}) \in U, \qquad \text{(ii) } (p, q^{-1}), (r, u^{-1}), (s, t^{-1}) \in U$$
$$\text{(iii) } (p, s^{-1}), (q, r^{-1}), (t, u^{-1}) \in U, \qquad \text{(iv) } (p, u^{-1}), (q, t^{-1}), (r, s^{-1}) \in U.$$

今，$X = C \oplus D$ であり C が compact かつ D が discrete となっているので，$\widetilde{X} = C \oplus D \oplus \{e\} \oplus C^{-1} \oplus D^{-1}$ となる。すると $(C \cup C^{-1})^2$ の対角線 $\Delta_{C \cup C^{-1}}$ の可算近傍基 $\{V_n \subseteq (C \cup C^{-1})^2 : n \in \mathbb{N}\}$ が存在し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n = V_n \cup \{(e, e)\} \cup \Delta_{D \cup D^{-1}}$ とおくと $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ が $\widetilde{X}^2$ の universal uniformity の base となる。

そこで，$e \in \overline{A}$ と $e \in \overline{g^{-1}A}$ のそれぞれの場合において，各近傍 $W_2(U_n)$ または $W_3(U_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ を用いて，点列 $\{g_n\} \subseteq A$ または $\{g_n\} \subseteq g^{-1}A$ をとる。すると系 2.3 より，各 g_n に幾つかのパターンが現れるので，それぞれの場合に分けてこれらの点列が e に収束する部分列を持つことを調べることになる。ところが一般に $\{W_n(U) : U \in \mathcal{U}_{\widetilde{X}}\}$ は e の近傍基ではないので，収束を調べるためには別の手段を必要になり，本証明では Uspenskiĭ[8] が構成した次の $F(X)$ 上の continuous prenorm を用いることにする。

$F(X)$ の部分集合 F_0 を次のように定める。

$$F_0 = \{h = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in F(X) : \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0, x_i \in X \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

すると，F_0 は $F(X)$ の clopen normal subgroup となる。さらに，$\mathcal{P}(X)$ を X 上のすべての continuous pseudometric からなる集合とする。任意の $g \in F_0$ に対して g は次のように表せることに注意する。

$$g = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

ただし，各 $x_i, y_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $g_i \in F(X)$ である。このような g の表現は一意に決まるものではなく，いく通りもの表し方がある。そこで，任意の $h \in F_0$ と $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{P}(X)^{F(X)}$ に対して，

$$p_r(h) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} \rho_{g_i}(x_i, y_i) : h = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$
$$x_i, y_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, g_i \in F(X), n \in \mathbb{N}\Big\}$$

とおくとき Uspenskiĭ [8] は次のことを示した。

定理 2.4 ([8]). 任意の $r \in \mathcal{P}^{F(X)}$ に対して p_r は *continuous prenorm* となる。さらに $\big\{\{h \in F_0 : p_r(h) < \delta\} : r \in \mathcal{P}^{F(X)}, \delta > 0\big\}$ は e の近傍基となる。

本稿ではこの定理を次の形で応用し，点列 $\{g_n\} \subseteq A$ または $\{g_n\} \subseteq g^{-1}A$ が e に収束する部分列を持つことを示す。

系 2.5. E を $F(X)$ の部分集合，$\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ を F_0 の点列とするとき次が成立する。

(1) $e \in \overline{E}$ となることの必要十分条件は，任意の $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{P}^{F(X)}$ と $\delta > 0$ に対して次の条件を満たす $h \in E \cap F_0$ が存在することである。

$$h = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_m x_m^{\varepsilon_m} y_m^{-\varepsilon_m} g_m^{-1}$$

と表せて $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \rho_{g_i}(x_i, y_i) < \delta.$

(2) 点列 $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ が e に収束するための必要十分条件は，任意の $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{P}^{F(X)}$ と $\delta > 0$ に対して，次の条件を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在することで

ある。

任意の $n \geq N$ に対して
$h_n = g_{n,1} x_{n,1}^{\varepsilon_{n,1}} y_{n,1}^{-\varepsilon_{n,1}} g_{n,1}^{-1} g_{n,2} x_{n,2}^{\varepsilon_{n,2}} y_{n,2}^{-\varepsilon_{n,2}} g_{n,2}^{-1} \cdots g_{n,m_n} x_{n,m_n}^{\varepsilon_{n,m_n}} y_{n,m_n}^{-\varepsilon_{n,m_n}} g_{n,m_n}^{-1}$
と表せて $\sum_{i=1}^{m_n} \rho_{g_{n,i}}(x_{n,i}, y_{n,i}) < \delta.$

以上の方法により，定理 2.1 は証明される。尚，定理 2.1 の「$F_4(X)$ が k-space である。」という仮定は，これまで表面的には現れてこなかったが，実際は $e \in \overline{A}$ の場合にとった A の点列が e に収束することを示す過程において使用する，次の技術的な補題を示す際に用いられている。

補題 2.6. $X = C \oplus D$, ただし C は *compact metrizable* かつ D は *discrete space* とし，$F_4(X)$ が *k-space* であると仮定する。各 $a \in D \cup D^{-1}$ に対して $(C \cup C^{-1})^2$ の対角線 $\Delta_{C \cup C^{-1}}$ の近傍 V_a が定まっているとする。ここで

$$F = \{abca^{-1} \in F_4(X) \setminus F_3(X) : (b, c^{-1}) \in (C \cup C^{-1})^2 \setminus V_a,\ a \in D \cup D^{-1}\}$$

とおくと，$e \notin \overline{F}$ である。

3 結果と疑問

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，自然な写像 $i_n : \widetilde{X}^n \to F_n(X) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_n$ を考える。この写像 i_n は常に continuous になるが，さらに次のことがわかる。

命題 3.1. 位相空間 X が *Dieudonné complete* （よって特に *metrizable)* とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *k-space* になることの必要十分条件は i_n が *quotient map* になることである。

定理 2.1 及び 命題 3.1，さらに，Fréchet-Urysohn property, sequentiality 及び k-property の関係より次のことが得られる。

系 3.2. *Metrizable space* X が *locally compact* であり且つ $d(X)$ が *compact* であれば次は同値である。
(1) $F_4(X)$ が *Fréchet-Urysohn;*
(2) $F_4(X)$ が *sequential;*
(3) $F_4(X)$ が *k-space;*

(4) $i_4 : \widetilde{X}^4 \to F_4(X)$ が *quotient.*

また，定理 1.3 の II (7) と定理 2.1 より次の，疑問 2 (2) の部分解が得られる。

系 3.3. *Metrizable space* X が *locally compact separable* であり且つ $d(X)$ が *compact* ならば $F_4(X)$ は *Fréchet-Urysohn* となる。

この結果より，$X = I \oplus D$, ただし I は $\mathbb{R}$ 上の閉区間且つ D が countable discrete とすると，X は locally compact separable metrizable でさらに $d(X) = I$ であるので $d(X)$ は compact になっている。よって，系 3.3 より $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となるが，明らかに X は compact ではない。よって，疑問 2 (1) が否定的であることがわかる。

最後に，系 3.2 より生じる疑問を上げることにする。系 3.2 における仮定のうち $d(X)$ の compact 性が省略できないことは，定理 2.1 の II (6) より明らかである。一方，local compactness と separability が省略できるかどうかはわかっていない。特に，次の本質的な疑問がまだ未解決である。

疑問 3.

(1) $\{x_n\}$ を収束点列とし，その収束点を x とする。また D を uncountable discrete space とする。ここで $X = (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}) \oplus D$ とおくと，X は locally compact metrizable で $d(X) = \{x\}$ より $d(X)$ は compact であるが，X は separable ではない。このとき $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となるか？

(2) $J(\aleph_0) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \cup \{x\}$ を hedgehog space とする。ただし各 S_n は x に収束する点列である。すると $J(\aleph_0)$ は separable metrizable space で $d(X) = \{x\}$ より $d(X)$ は compact であるが，X は locally compact ではない。このとき，$F_4(J(\aleph_0))$ は Fréchet-Urysohn となるか？

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, *Free topological groups over metrizable spaces*, Topology Appl. **33** (1989) 63-76.

[2] A. V. Arhangel'skiĭand M. Tkachenko, *Topological Group and Related Structures*, Atlantis Press and World Sci., Paris, 2008.

[3] R. Engelking, *General Topology* (Heldermann, Berlin, 1989).

[4] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Academic Press, New York, (1963).

[5] F. Lin and C. Liu, *S_ω and S_2 on free topological groups*, Topology Appl., **176** (2014) 10-21.

[6] F. Lin and C. Liu, *Addendum to "S_ω and S_2 on free topological groups" [Topol. Appl. 176 (2014) 10-21]*, Topology Appl., **191** (2015) 199-201.

[7] A. A. Markov, *On free topological groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **9** (1945) 3-64 (in Russian); Amer. Math. Soc. Transl. **8** (1962) 195-272.

[8] V. V. Uspenskiĭ, *Free topological groups of metrizable spaces*, Math. USSR Izvestiya **37** (1991) 657-680.

[9] K. Yamada, *Characterizations of a metrizable space X such that every $A_n(X)$ is a k-space*, Topology Appl. **49** (1993) 75-94.

[10] K. Yamada, *Metrizable subspaces of free topological groups on metrizable spaces*, Topology Proc. **23** (1998) 379-409.

[11] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn spaces in free topological groups on metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002) 2461-2469.

[12] K. Yamada, *The natural mappings i_n and k-subspaces of free topological groups on metrizalble spaces*, Topology Appl. **146-147** (2005), 239-251.

[13] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn subspaces of free topological groups*, Submitted.