

線形順序位相空間への写像に対する内挿定理 (Insertion theorems for maps to linearly ordered topological spaces)

Salvador García-Ferreira

Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

Yasser F. Ortiz-Castillo

Instituto de Matematica e Estatística, Universidade de Sao Paulo

愛媛大学 理工学研究科 山内貴光

Takamitsu Yamauchi

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1. 序

本稿において、空間はすべてハウスドルフであるとし、 \mathbb{R} は通常の順序と位相をもつ実数直線を表す。次は、よく知られた Katětov-Tong の内挿定理である。

定理 1 ([5], [11]). 正規空間 X 上の上半連続な関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ と下半連続な関数 $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ が各 $x \in X$ について $g(x) \leq h(x)$ を満たすならば、各 $x \in X$ に対して $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ を満たす連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

定理 1 における写像の終域を \mathbb{R} から Banach 束へ拡張する研究が Borwein and Théra [2] および Yamazaki [12], [13], [14], [15] らによってなされた。Banach 束は、 \mathbb{R} のもつ線形構造を保持したまま、線形順序構造を半順序構造へ拡張した概念ととらえられる。一方で、定理 1 の \mathbb{R} の線形構造を一旦忘れ、 \mathbb{R} を線形順序位相空間とした場合に内挿定理は成り立つか。本稿では、この問題について論文 [4] で得られた結果を解説する。

2. 準備

線形順序 (全順序) 集合 (Y, \leq) の 2 点 $a, b \in Y$ に対して、 Y の区間を

$$(a, b)_Y = \{y \in Y : a < y < b\}, \quad [a, b]_Y = \{y \in Y : a \leq y \leq b\},$$

$$(a, \infty)_Y = \{y \in Y : a < y\}, \quad (-\infty, b)_Y = \{y \in Y : y < b\}$$

で定める。区間 $(a, b)_Y$, $[a, b]_Y$, $[a, \infty)_Y$, $(-\infty, b)_Y$ も同様に定める。線形順序集合 (Y, \leq) が集合族 $\{(a, \infty)_Y, (-\infty, a)_Y : a \in Y\}$ を準基とする位相をもつとき、 Y を線形順序位相空間 (linearly ordered topological space, LOTS) という。

以下、特に断らない限り、 X を空間とし、 (Y, \leq) を線形順序位相空間とする。写像 $f : X \rightarrow Y$ が上半連続 (upper semicontinuous) であるとは、任意の $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}((-\infty, y)_Y)$ が X の開集合であるときをいう。また、 $f : X \rightarrow Y$ が下半連

続 (lower semicontinuous) であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して, $f^{-1}((y, \infty)_Y)$ が X の開集合であるときをいう. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が上半連続かつ下半連続であれば, f は連続である.

2つの写像 $g, h: X \rightarrow Y$ が, 任意の $x \in X$ に対して $g(x) \leq h(x)$ を満たすとき, $g \leq h$ と表す. 空間 X と線形順序位相空間 $(Y \leq)$ が次を満たすとき, 組 (X, Y) は内挿性 (insertion property) をもつという:

上半連続な $g: X \rightarrow Y$ と下半連続な $h: X \rightarrow Y$ が $g \leq h$ を満たすならば, $g \leq f \leq h$ を満たす連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在する.

Katětov-Tong の内挿定理 (定理 1) は「任意の正規空間 X に対して (X, \mathbb{R}) は内挿性をもつ」と言い換えられる.

3. 弧状連結な線形順序位相空間

定義域が \mathbb{R} の閉区間である場合に内挿性が成り立つためには, 終域に弧状連結性が必要である. 実際,

命題 2. $([0, 1]_{\mathbb{R}}, Y)$ が内挿性をもてば, Y は弧状連結である.

証明. $([0, 1]_{\mathbb{R}}, Y)$ が内挿性をもつとし, $p, q \in Y$ を $p \leq q$ を満たすようにとる. 写像 $g, h: [0, 1]_{\mathbb{R}} \rightarrow Y$ を

$$g(x) = \begin{cases} p & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ q & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} p & (x = 0 \text{ のとき}) \\ q & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めれば, g は上半連続, h は下半連続で $g \leq h$ である. $([0, 1]_{\mathbb{R}}, Y)$ が内挿性をもつので, $g \leq f \leq h$ を満たす連続写像 $f: [0, 1]_{\mathbb{R}} \rightarrow Y$ がとれる. このとき, f は p と q を結ぶ道である. \square

最小の非可算順序数を ω_1 で表す. ここで, 順序数は, それより小さい順序数全体からなる集合に自然な順序が与えられた線形順序位相空間と考える. 直積集合 $\omega_1 \times [0, 1)_{\mathbb{R}}$ に辞書式順序が与えられた線形順序位相空間を長い半直線 (long ray) とよび L_+ で表す. ここで, $\alpha \in \omega_1$ と $(\alpha, 0) \in L_+$ を同一視することにより, ω_1 は L_+ の部分空間と考える. 集合 L_+ に L_+ とは逆向きの順序が与えられた線形順序集合を L_- で表し, $x \in L_+$ に対応する L_- の点を $-x$ で表す. ただし, $L_- \cap L_+ = \emptyset$ であるとする. $0 \in L_+$ と $-0 \in L_-$ のみを同一視する $L_- \cup L_+$ 上の同値関係 \sim を考え, $L = (L_- \cup L_+)/\sim$ とする. $x \in L_-$ と $y \in L_+$ に対して $x \leq y$ とすることにより自然に定まる L 上の線形順序を考えることで, L は線形順序位相空間となる. この L を長い直線 (long line) とよぶ¹. 弧状連結な線形順序位相空間に関して, 次が成り立つ.

¹ L_+ は long line [3, 3.12.19], L は double edged long line [7] とよばれることもある.

定理 3 ([4, Theorem 2.1]). 弧状連結な線形順序位相空間は, 長い直線 L のある区間, もしくは L 自身と順序同型である.

命題 2 と定理 3 より次を得る.

系 4. $([0, 1]_{\mathbb{R}}, Y)$ が内挿性をもてば, Y は長い直線 L のある区間, もしくは L 自身と順序同型である.

注意 5. 長い直線 L の区間は, 次のいずれかと順序同型である:

$$\{0\}, [0, 1]_{\mathbb{R}}, (0, 1)_{\mathbb{R}}, [0, 1)_{\mathbb{R}}, (0, 1]_{\mathbb{R}}, [0, \infty)_{\mathbb{R}}, (-\infty, 0]_{\mathbb{R}}, (0, \infty)_{\mathbb{R}}, (-\infty, 0)_{\mathbb{R}}.$$

空間 X が可算鎖条件 (countable chain condition) を満たすとは, 任意の互いに素な開集合族の濃度が可算であるときをいう. 可算鎖条件を満たし連結な線形順序位相空間が \mathbb{R} のある区間と順序同型であることは, ZFC と独立である (例えば, [6, Ch. II, §4] を参照). 一方, 定理 3 と注意 5 より次を得る.

系 6. 可算鎖条件を満たし弧状連結な線形順序位相空間は, \mathbb{R} のある区間と順序同型である.

4. 定義域が正規空間である場合の内挿性

任意の正規空間 X に対して (X, Y) が内挿性をもつような線形順序位相空間 Y は, 本質的に \mathbb{R} しかない. 実際,

定理 7 ([4, Theorem 3.3]). 任意の正規空間 X に対して (X, Y) が内挿性をもてば, Y は \mathbb{R} のある区間と順序同型である.

以下, 定理 7 の証明の概略を述べる. 証明では, Bing の例 [1, Example G] (の部分空間である Michael の例 [8, Example 2]) の部分空間を用いる.

最小の非可算順序数 ω_1 のべき集合を $\mathcal{P}(\omega_1)$ で表す. 2点集合 $\{0, 1\}$ は離散位相をもつとし, 直積集合 $\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$ における位相 τ を以下で定める. 各 $\alpha < \omega_1$ に対して, $x_\alpha \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$, すなわち, 写像 $x_\alpha : \mathcal{P}(\omega_1) \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$x_\alpha(A) = \begin{cases} 1 & (\alpha \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (\alpha \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める. $P_{\omega_1} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とし,

$$\tau = \{U \cup A : U \text{ は直積空間 } \{0, 1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)} \text{ の開集合, } A \subset \{0, 1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)} \setminus P_{\omega_1}\}$$

とおく. このとき, 位相空間 $F_{\omega_1} = (\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau)$ を Bing の例という. また, F_{ω_1} の部分空間

$$G_{\omega_1} = P_{\omega_1} \cup \{x \in F_{\omega_1} : \{A \in \mathcal{P}(\omega_1) : x(A) = 1\} \text{ は有限}\}$$

を, Michael の例という. さらに, その部分空間

$$(1) \quad H_{\omega_1} = \{x \in G_{\omega_1} : \exists \alpha < \omega_1 (x(\{\alpha\}) = 1)\}$$

を考える. H_{ω_1} は F_{ω_1} の閉集合で F_{ω_1} は正規なので, H_{ω_1} は正規である.

定理 8 ([4, Theorem 3.2]). (H_{ω_1}, Y) が内挿性をもてば, Y は可算鎖条件を満たす.

定理 7 の証明. 任意の正規空間 X に対して (X, Y) が内挿性をもつとする. このとき, $([0, 1]_{\mathbb{R}}, Y)$ は内挿性をもつので, Y は弧状連結である. また, (H_{ω_1}, Y) は内挿性をもつので, 定理 8 から Y は可算鎖条件を満たす. よって, 系 6 より, Y は \mathbb{R} のある区間と順序同型である. \square

5. 終域が長い直線である場合の内挿性

定理 8 より, (1) で定めた H_{ω_1} と長い直線 L に対して, (H_{ω_1}, L) は内挿性をもたない. 従って, (X, L) が内挿性をもつためには, X に正規性より強い条件が必要である. (X, L) が内挿性をもつための十分条件として, 次を得た.

定理 9 ([4, Theorem 4.2]). 任意のパラコンパクト空間 X に対して, (X, L) は内挿性をもつ.

ここで, 空間 X がパラコンパクトであるとは, X の任意の開被覆が局所有限な開被覆によって細分されるときをいう.

線形順序位相空間 Y の任意の部分集合が上限と下限をもつとき, Y は完備であるという. Yang [16] は次を証明した².

定理 10 ([16, Theorem 3]). 任意の順序数 α と完備な線形順序位相空間 Y に対して, (α, Y) は内挿性をもつ.

L に最大元と最小元を付け加えた線形順序位相空間は完備なので, 任意の順序数 α に対して (α, L) は内挿性をもつ ([4, Corollary 4.6]).

空間 X の任意の可算な開被覆が局所有限な開被覆によって細分されるとき, X は可算パラコンパクトであるという. また, 空間 X が族正規であるとは, X の任意の疎 (discrete) な閉集合族 \mathcal{F} に対して X の互いに素 (disjoint) な開集合族 $\{U_F : F \in \mathcal{F}\}$ が存在して, 各 $F \in \mathcal{F}$ について $F \subset U_F$ が成り立つときをいう. 空間 X がパラコンパクトまたは順序数であれば, X は可算パラコンパクトかつ族正規であり, X が族正規であれば X は正規である. 次については分かっていない.

問題 11 ([4, Question 4.7]). X が可算パラコンパクトな族正規空間であるとき, (X, L) は内挿性を満たすか. より一般に, X が族正規空間であるとき, (X, L) は内挿性を満たすか.

²論文 [4] の出版後, Z. Yang 氏より論文 [16] を紹介いただいた.

6. 内挿性と定義域の零次元性

正規空間 X が強零次元であるとは、 X の任意の互いに素な閉集合 E, F に対して、 $E \subset U$ かつ $F \cap U = \emptyset$ を満たす X の開かつ閉な集合 U が存在するときをいう³。終域が非連結な線形順序位相空間である場合に内挿性が成り立つためには、定義域に強零次元性が必要である。

命題 12 ([4, Proposition 5.1]). ある非連結な線形順序位相空間 Y に対して (X, Y) が内挿性をもてば、 X は強零次元である。

Yang [16] は次を証明した。

定理 13 ([16, Theorem 2]). X が強零次元な距離化可能空間で、 Y が完備な線形順序位相空間ならば、 (X, Y) は内挿性をもつ。

一方、Michael の零次元選択定理 [9, Theorem 1.2] ([10, Theorem 2] 参照) を用いることで、次を得る。

命題 14 ([4, Proposition 5.2]). X が強零次元なパラコンパクト空間で、 Y が完備距離化可能な線形順序位相空間ならば、 (X, Y) は内挿性をもつ。

注意 15. Yang [16] による次の例によって、定理 13 における X の距離化可能性と命題 14 における Y の距離化可能性の仮定は落とせない。最小の無限順序数を ω で表す。 $X = (\omega + 1) \times (\omega_1 + 1)$ とすると、 X は、強零次元なコンパクト空間である。一方、 $\omega_1 + 1$ とは逆向きの順序を与えた線形順序集合を $(\omega_1 + 1)^*$ で表す。ただし、 $(\omega + 1) \cap (\omega_1 + 1)^* = \emptyset$ であるとする。 $\omega \in \omega + 1$ と $\omega_1 \in (\omega_1 + 1)^*$ のみを同一視する $(\omega + 1) \cup (\omega_1 + 1)$ 上の同値関係 \sim を考え、 $Y = ((\omega + 1) \cup (\omega_1 + 1)^*) / \sim$ とする。 $x \in \omega + 1$ と $y \in (\omega_1 + 1)^*$ に対して $x \leq y$ とすることにより自然に定まる Y 上の線形順序を考えることで、 Y は完備な線形順序位相空間となる。このとき、 (X, Y) は内挿性をもたない [16, p.951, Remark].

REFERENCES

- [1] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, *Canad. J. Math.* **3** (1951), 175–186.
- [2] J. M. Borwein and M. Théra, *Sandwich theorems for semicontinuous operators*, *Canad. Math. Bull.* **35** (1992), 463–474.
- [3] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [4] S. García-Ferreira, Y. F. Ortiz-Castillo and T. Yamauchi, *Insertion theorems for maps to linearly ordered topological spaces*, *Topology Appl.* **188** (2015), 74–81.
- [5] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, *Fund. Math.* **38** (1951), 85–91; correction: *Fund. Math.* **40** (1953), 203–205.

³すなわち、 X の大きい帰納的次元が 0 以下、もしくは X の被覆次元が 0 以下であるときをいう

- [6] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [7] J. Mack, *The long line as a remainder*, in: C.E. Aull (Ed.), *Rings of Continuous Functions*, Dekker Lecture Notes, vol. 95, Dekker, New York, 1985, 237–245.
- [8] E. Michael, *Point-finite and locally finite coverings*, *Canad. J. Math.* **7** (1955), 275–279.
- [9] E. Michael, *Continuous selections, II*, *Ann. of Math.* **64** (1956), 562–580.
- [10] E. Michael, *Selected Selection Theorems*, *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 233–238.
- [11] H. Tong, *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, *Duke Math. J.* **19** (1952), 289–292.
- [12] K. Yamazaki, *Insertion theorems for maps to Banach lattices*, *Topology Appl.* **157** (2010), 1955–1965.
- [13] K. Yamazaki, *The range of maps on classical insertion theorems*, *Acta Math. Hungar.* **132** (2011), 42–48.
- [14] K. Yamazaki, *Monotone countable paracompactness and maps to ordered topological vector spaces*, *Topology Appl.* **169** (2014), 51–70.
- [15] K. Yamazaki, *Insertion theorems for maps to ordered topological vector spaces*, *Topology Appl.* **195** (2015), 312–326.
- [16] Z. Yang, *Dieudonné-Hahn-Tong theorem for complete chains*, *Houston J. Math.* **29** (2003), 949–960.