

格子ボルツマン法を用いた非線形波動方程式の数値解析

九州大学・応用力学研究所 辻 英一

Hidekazu Tsuji

Research Institute for Applied Mechanics,
Kyushu University

1 はじめに

連続体中の非線形波動について、縮約されたモデル方程式を用いての数値的研究がこれまで行われている。その際、数値計算の手法が重要となるが、標準的な差分法の他に、特に高精度を必要とする場合について、スペクトル法が用いられてきた。ただこの方法は、並列化の効率が良くない、境界条件について制約がある、などの問題点がある。

一方、特に Navier-Stokes(NS) 方程式の数値解法として、格子ボルツマン法 (LBM) が提案・研究されている [1]。この方法は、NS 方程式以外にも、浅水方程式 [2]、多孔質体の流れなど様々な方程式系に応用されており、非線形波動方程式についても、Burgers 方程式や移流拡散方程式などで定式化の報告がある。しかしながら、定式化の難しさや、非粘性の定式化が不安定性を伴うという理由から、高階微分項を持つ方程式や、非粘性系での報告は少ない。流体中の非線形長波を表す重要なモデル方程式の一つである Korteweg-de Vries(KdV) 方程式についても、Yan ら [3][4] の一連の研究があるものの、ここでは定式化が主要な結果であり、1 ソリトン解の伝播など、数値計算の詳細については明らかにされていない。

本研究では、様々な非線形波動方程式、特に水平 2 次元波の数値計算を目標に置き、その前段階として、KdV 方程式の数値計算を行い、その特徴などを調べる。

2 定式化

ここでの KdV 方程式の定式化の方針は Yan ら [3][4] の論文にほぼ沿っている。

空間 1 次元を離散的に分割し、その各点で速度 $e_i = \{0, c, -c, 2c, -2c\}$ を持つ粒子の存在確率を表す速度分布関数 $f_i(x, t)$ を定義する。その時間発展は以下の方程式で支配されているとする。

$$f_i(x + e_i, t + 1) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (1)$$

右辺は衝突項を表す。この表現については多くの研究が行われているが、ここでは最も簡単なモデルである BGK モデルを採用する。 τ は緩和係数、 $f_i^{eq}(x, t)$ は系の局所平衡での分布関数を表す。

数密度

$$\zeta = \sum_i f_i(x, t) \quad (2)$$

が KdV 方程式を満たす様に定式化を行う。式 (1) の左辺を展開し、

$$\sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^n f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{(eq)}(x, t)) \quad (3)$$

t, x を以下のように微小量 ϵ を用いてスケーリングする。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_2} + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial t_3} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} \simeq \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \quad (4)$$

また f_i を展開する。

$$f_i = f_i^{(0)} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + \epsilon^3 f_i^{(3)} + \epsilon^4 f_i^{(4)} + \dots \quad (5)$$

ここで、 $f_i^{(0)} = f_i^{eq}$ とする。各オーダーで得られた式において、速度空間について和を取る事によって以下の式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t_0} + \sum_i e_i \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_i^{(0)} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} + \mu \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^3 f_i^{(0)} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_3} + \left(\frac{1}{2} - 2\tau\right) \sum_i \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_i^{(2)} + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \sum_i \frac{\partial f_i^{(2)}}{\partial t_1} \\ + \left(2\tau^2 - 2\tau + \frac{1}{4}\right) \sum_i \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_i^{(0)} + \eta \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^4 f_i^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\mu \equiv \tau^2 - \tau + \frac{1}{6}$ 、 $\eta \equiv -\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{7}{12}\tau + \frac{1}{24}$ とした。また、

$$\sum_i f_i^{eq} = \zeta \quad (10)$$

より

$$\sum_i f_i^{(n)} = 0, \quad (n \leq 1) \quad (11)$$

を使った。

ここで以下のような条件を課す (a は定数)。

$$P_1 = \sum_i e_i f_i^{(0)} = \frac{1}{2} a \zeta^2, \quad P_2 = \sum_i e_i^2 f_i^{(0)} = \frac{1}{3} a^2 \zeta^3 \quad (12)$$

すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right) f_i^{(0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_i^{(0)} = 0 \quad (13)$$

さらに

$$P_3 = \sum_i e_i^3 f_i^{(0)} = \frac{1}{4} a^3 \zeta^4 + \xi_1 u \quad (14)$$

$$P_4 = \sum_i e_i^4 f_i^{(0)} = \frac{1}{5} a^4 \zeta^5 + \xi_2 \frac{1}{2} a \zeta^2 \quad (15)$$

とすると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^3 f_i^{(0)} = \xi_1 \mu \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x}\right)^4 f_i^{(0)} = (\xi_2 - 4\xi_1) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{1}{2}a\zeta^2\right) \quad (17)$$

である。これらの結果と、各式に ϵ の対応するべきをかけて足し合わせる事により、 ζ の時間発展の式を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}a\zeta^2\right) + \nu \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = \epsilon^3 \lambda \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{1}{2}a\zeta^2\right) \quad (18)$$

ここで $\nu = \xi_1 \epsilon^2 \mu$ 、 $\lambda = (\xi_2 - 4\xi_1) \eta$ である。右辺は左辺よりオーダーが低く、無視できるとすると、 ζ が KdV 方程式を近似的に満たすことが言える。なお、右辺は $\xi_2 = 4\xi_1$ の時 0 となり、理論上はこの選択が合理的である。しかしその場合緩和係数を数値的に不安定な値に取らなければならず、よって ξ_2 はパラメーターとして考える。

局所平衡 $f_i^{eq}(x, t)$ については式 (2)、(12)、(14) そして (15) の 5 式を連立させることによって以下のように得られる。

$$f_1^{(0)} = \frac{14P_2 - P_4 + 4P_1 - P_3}{2 \cdot 3} \quad (19)$$

$$f_2^{(0)} = \frac{14P_2 - P_4 - 4P_1 + P_3}{2 \cdot 3} \quad (20)$$

$$f_3^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_4 - P_2}{12} + \frac{P_3 - P_1}{6} \right) \quad (21)$$

$$f_4^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_4 - P_2}{12} - \frac{P_3 - P_1}{6} \right) \quad (22)$$

$$f_0^{(0)} = \zeta - f_1^{(0)} - f_2^{(0)} - f_3^{(0)} - f_4^{(0)} \quad (23)$$

以上の定式化により KdV 方程式の時間発展が計算できる。すなわち、

1. 初期値 ζ を与える。
2. 速度分布関数 $f_i^{(0)}$ を求める。
3. (1) により時間発展を計算する。
4. 新しい速度分布関数により新しい ζ を計算する (以上を繰り返す)。

3 数値計算の結果

初期条件として1ソリトン解($a = 1$ と選ぶ)を考える。

$$\zeta = 3v \operatorname{sech}^2(\bar{k}x) \quad \bar{k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{\mu}} \quad (24)$$

v はソリトンの速度である。

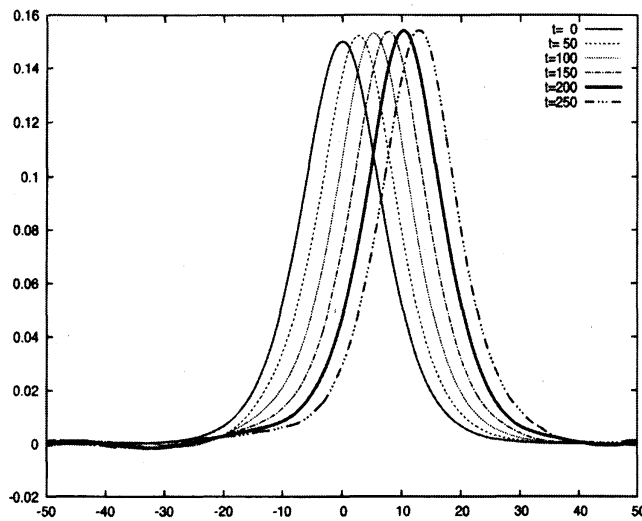


図 1: 初期値に $v = 0.05$ の 1 ソリトン解を与えた場合の時間発展。

時間発展を、図 1 に示す。この時のパラメーターは $\mu = 1$ 、 $\epsilon = 0.05$ 、 $\tau = 1.5$ 、 $c = 10$ 、 $\xi_2 = \xi_1/2$ 、 $v = 0.05$ である。わずかな radiation が後方に認められるが、概ね定常に伝わっている。この時の振幅の変化、伝搬速度のずれは数パーセント程度である。また、この時の速度分布関数を図 2 に示す。

しかしながら、振幅が大きい場合 (図 3)、には孤立波が定常に伝わらず徐々に変形し、また後方に時間が経っても動かない波が発生する。この場合には、方程式の解の挙動を適切に表せていない。これに関連して、方程

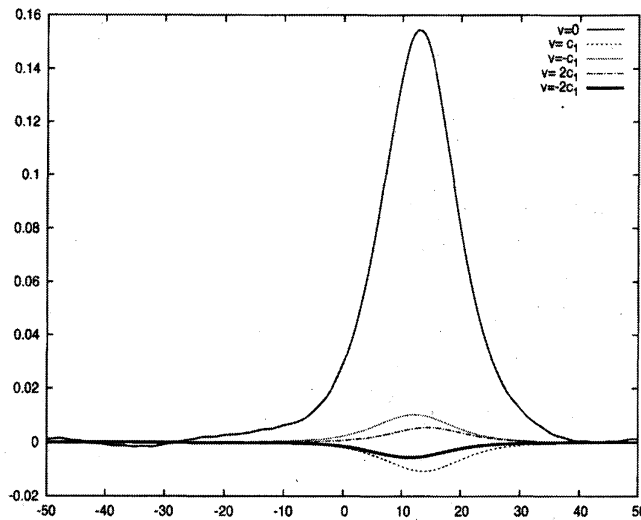


図 2: 図 1 の 1 ソリトン解の速度分布関数 ($t = 250$)。

式の保存量について調べてみたところ、振幅によらず 1 次の保存量は良く保存するが、振幅の大きな場合には 2 次の保存量が保存しない。

なお、振幅が小さい場合について、2 つのソリトンの追い越し相互作用を調べようとしたが、これまでに調べたパラメーターの範囲では、相互作用が起こる前に数値的不安定を起す。

以上の問題については今後改良をしていく予定である。具体的には、衝突項の定式化の再検討があげられる。

4 まとめ

非線形モデル方程式を解く方法の一つとして、KdV 方程式についての数値計算を行い、ソリトン解の伝搬を調べた。NS 方程式の LBM については現在も研究が進められており、衝突項の定式化などに関して様々な方法が提案されている。それらを参考にしながら、KdV 方程式などの可積分系の

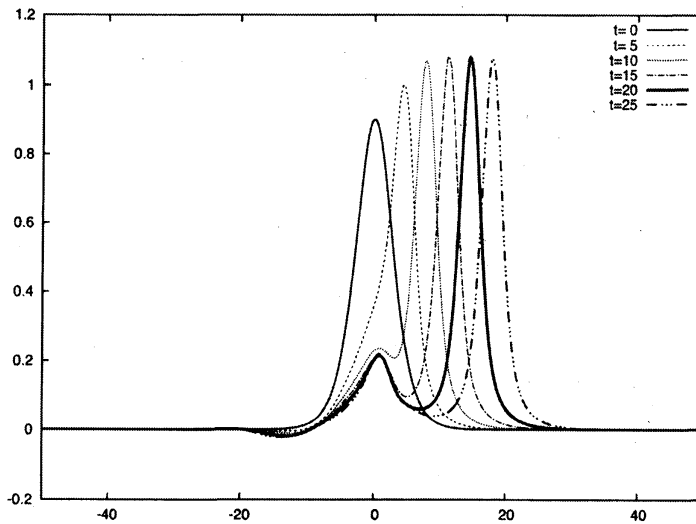


図 3: 初期値に $v = 0.3$ の 1 ソリトン解を与えた場合の時間発展。

数値計算だけでなく、より広い非線形波動方程式の数値計算が行えるような定式化を行うことが今後の課題である。

参考文献

- [1] S. Succi, "The Lattice Boltzmann Equation", Clarendon press, 2001.
- [2] J. G. Zhou, "Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2010.
- [3] G. Yan, Y. Chen and S. Hu, "A Lattice Boltzmann Method for KdV Equation", ACTA Mech. Sinica(English Series) vol.14 No.1(1998) pp. 18-26.
- [4] G. Yan and J. Zhang, "A higher-order moment method of the lattice Boltzmann model for the Korteweg-de Vries equation", Math. Comp. Simul. vol.79(2009) pp.1554-1565. .