

傾斜円柱の振動により誘起される内部波

神戸大学 (Kobe University) 片岡 武 (Kataoka, T.)
Massachusetts Institute of Technology Akylas, T. R., Peacock, T., Holzenberger, N.

要旨

一様な密度成層流体中において、水平円柱を一定の角振動数で振動させたときに現れる内部波は、St. Andrew's Cross と呼ばれ、四方にビーム状に伝わることでよく知られている。本報では、円柱を傾斜させた場合に発生する内部波ビームの特徴を新たに調べたので報告する。

1. 緒言

図 1 は、St. Andrew's Cross と呼ばれる模様の内部波ビームを当研究室において実験的に捉えたシャドウグラフ写真である[1]。塩分濃度により直線的に密度成層した塩水の中に円柱を水平に配置し（図 1 の黒い縦棒の先に円柱がある）、上下に一定の角振動数 ω で振動させたときの様子を示す。内部波が四方方向にビーム状に伝播していることが分かる。円柱長さを水槽の幅に一致させており、発生する内部波は奥行き方向に依存性がない。つまり空間 2 次元的である。

これまでの多くの実験研究において、円柱を水平に配置することで、内部波を発生させる手法が使われてきた[2-4]。しかし、実際の大気・海洋における波源は、むしろ傾斜した大陸棚や海底山脈であり、むしろ傾斜した円柱の振動に近い現象である。ところが我々の知る限り、このような傾斜した波源による内部波誘起の特徴を調べた研究は過去にない。

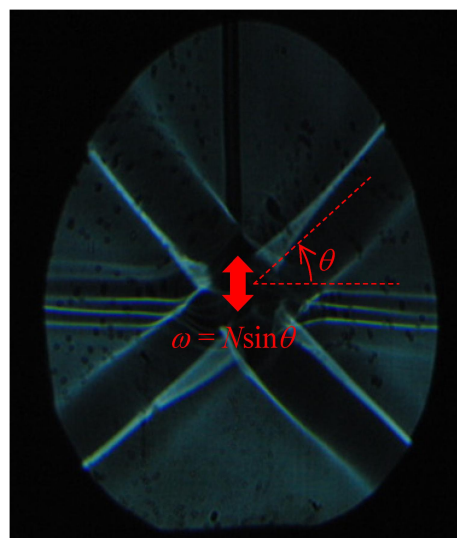


図 1 一定の浮力振動数 N の密度成層流体中において、角振動数 ω で振動させた円柱からビーム角 $\theta = \sin^{-1}(\omega/N)$ で四方に伝わる内部波ビームのシャドウグラフ写真。

そこで本報では、傾斜円柱を振動させたときに発生する内部波ビームとその観察波形の特徴を調べる。円柱長さが有限であるので、その両端から新たに円錐状のビームが発生する点に注意が必要である。まずは円柱が水平の場合 ($\phi=0^\circ$) を取り扱い、その後ビーム角 θ で傾斜させた場合 ($\phi=\theta$) について調べる (図 2 参照)。

2. 解析

円柱振動から生じる内部波ビームの振舞を記述するモデル方程式は、円柱が水平の場合 ($\phi=0^\circ$) は文献[5]において、ビーム角 θ で傾けた場合 ($\phi=\theta$) はその線形版を本報の補遺において導出した。いずれのモデル方程式も外力項を含み、それが有限長さの円柱振動を表す。ここでは、これらモデル方程式の線形解を求める。

外力項の具体的な関数形は、円柱の断面内分布はガウス分布：

$$f\left(\frac{r}{D}\right) = \exp\left\{-8\left(\frac{r}{D}\right)^2\right\} \quad (1)$$

を与えた。ただし、 r は円柱の動径方向座標、 D は円柱の直径である。軸方向分布は円柱の有限長さ L を表すために、 \tanh 関数による以下の分布：

$$h\left(\frac{\xi}{L}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh\left[\gamma\left(\frac{\xi}{L} + \frac{1}{2}\right)\right] - \tanh\left[\gamma\left(\frac{\xi}{L} - \frac{1}{2}\right)\right] \right\} \quad (2)$$

を与えた。ただし、 ξ は円柱の軸方向座標、 γ は円柱端における外力の減衰速さを示す定数である。 γ が大きければ、円柱端から発生するビームは、より空間的に変動の激しい波の成分を含むが、それらは粘性の影響によりすぐに減衰する。実際、 $\gamma \geq 20$ であれば得られた解の観察波形にほとんど変化はなかった。本研究では $\gamma = 20$ を採用した。

3. 実験

塩分濃度により直線的に密度成層した塩水の中に、図 2 に示すように、円柱を水平面からの傾き角が $\phi (=0^\circ \text{ or } \approx \theta)$ となるように設置し、一定の角振動数 ω で振動させる。円

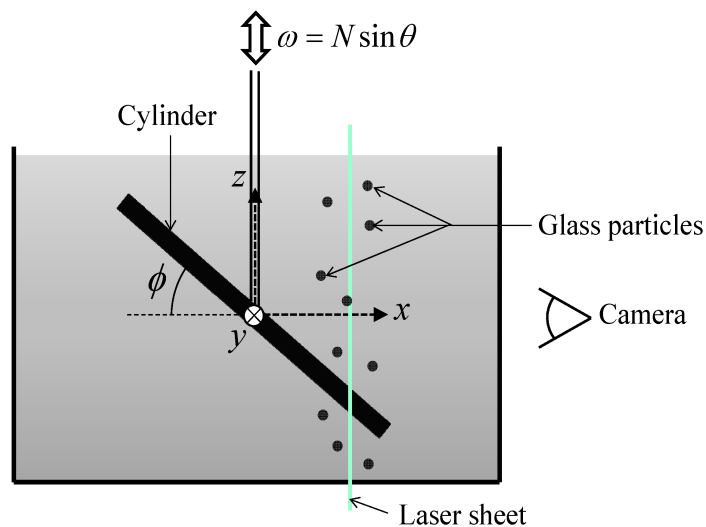


図 2 実験装置の側面図。

柱の直径は 2.5cm, 軸方向長さは 23cm である. 可視化用に密度の異なる小さなガラス粒子を入れ, 薄いレーザーシートで測定面を照らすことで, 各粒子の動きをカメラで捉えることができる. そのカメラ画像より, PIV ソフトを用いて粒子の速度, つまり流速分布を求めた.

4. 結果

4.1. 水平円柱の場合 ($\phi = 0^\circ$)

水平円柱の場合に発生する内部波ビームの幾何学的な図を図 3 に示した. 円柱全体から発せられるビームは平面型であり, 左右両端から発するビームは円錐型である. これらのビームによって形成される波形を, 2 種類の鉛直レーザー面 (破線) 上において調べた. 1 つは円柱中心から右方向へ 2cm の距離にある鉛直面 I 上であり, もう 1 つは円柱の右端を貫く鉛直面 II 上である.

結果を図 4 に示す. 図 4 (a, b) はそれぞれ鉛直面 I, II における線形解, (c) は鉛直面 II における実験結果である. いずれの結果も, 図 1 で示した St. Andrew' s Cross と呼ばれる四方に伸びる内部波ビームが観察された. これは平面型ビームにより形成された波形である [6]. 線形解である (a, b) には, それに加えて両端から発せられた円錐型ビームも弱いながら到達しており, その上下に双曲線状に分布している. ただし実験結果 (c) には, このような両端から到達したビームが観察されなかった. これは, 実験における可視化領域を, 高さ方向に十分確保できなかったことが要因と考えられる.

4.2. 傾斜円柱の場合 ($\phi = \theta$)

円柱をビーム角 θ で傾斜させた場合を考える. このとき発生する内部波ビームの幾何学的な図を図 5 に示した. 円柱の両端から円錐状に発せられるビームは, 円柱軸に沿って伝わる成分をもつ (円柱に沿う太い矢印). この成分は, 円柱軸に沿って伝わる間に共鳴増幅され, 観察波形に大きな影響を及ぼす.

結果を図 6 に示す. 鉛直面 I 上の線形解を示した (a) には, St. Andrew' s Cross に類似した模様が見られる. しかしよく見ると, この模様は水平円柱の場合に見られる直線形とは異なり, 2 本の双曲線が背中合わせに接している. 上下の双曲線が, それぞれ円柱の右および左端から到達したビームを表している. 実際, 幾何光学的に予測される円柱両端からのビーム位置 (図中の点線および破線) とよく一致している.

また, (b) に示す右端の鉛直面 II 上には, 左端から発せられたビームによる 1 本の双曲線 (破線) と, 右端からのビームによる 2 本の直線 (点線) が見られる. 観察面が円柱両端に近づくと, 一方の双曲線はこのように 2 本の直線に近づく. 実験結果 (c) においても (b) と同様の波形が観察された.

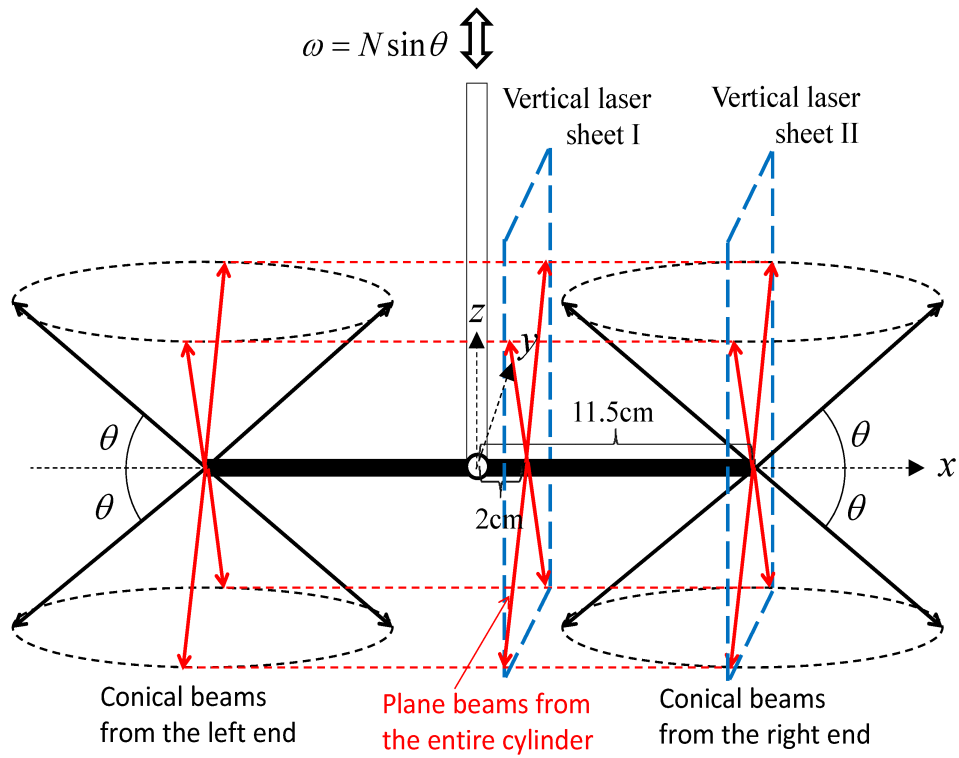


図3 水平円柱 ($\phi = 0^\circ$) の場合に発生する内部波の幾何学的な図.

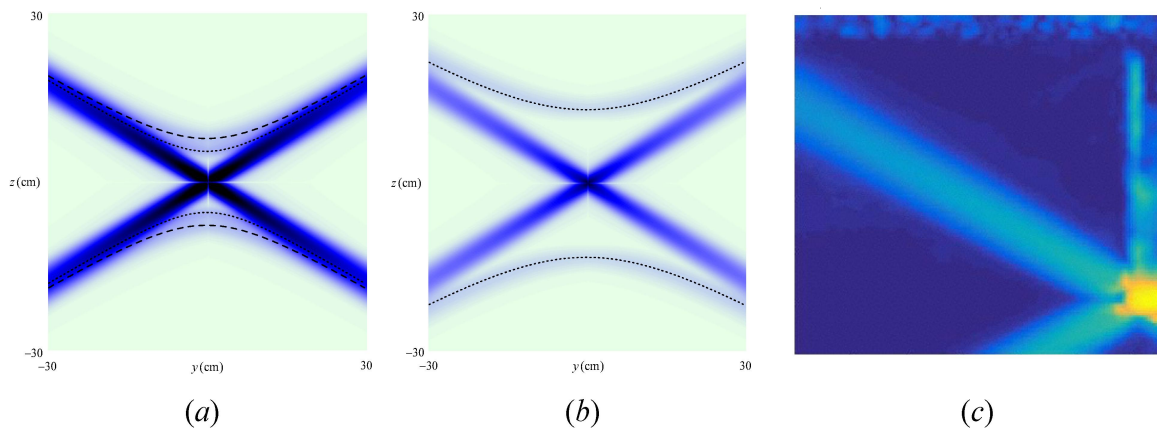


図4 水平円柱($\phi = 0^\circ$)を角振動数 $N \sin \theta$ ($\theta = 30^\circ$)で振動させた場合の流速振幅図: (a) 鉛直断面 I 上のモデル方程式[5]の線形解, (b) 鉛直断面 II 上のモデル方程式の線形解; (c) 鉛直断面 II 上の実験結果. 図中の点線と破線は, それぞれ円柱の左右端から発せられた内部波の到達位置を幾何学的手法により求めたもの.

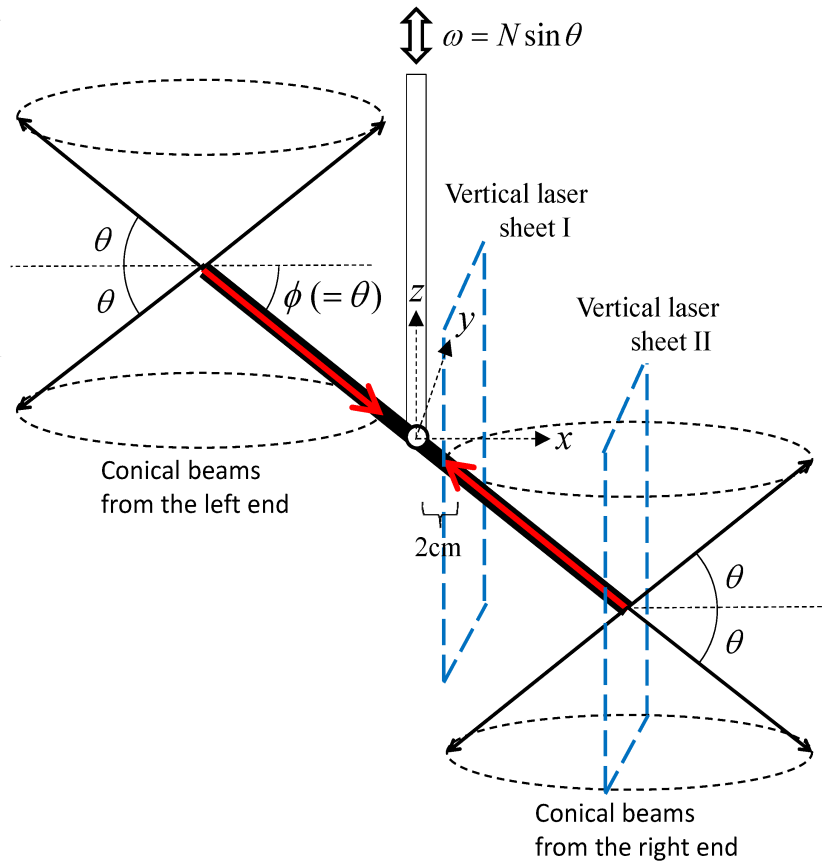


図5 傾斜円柱 ($\phi = \theta$) の場合に発生する内部波の幾何学的な図.

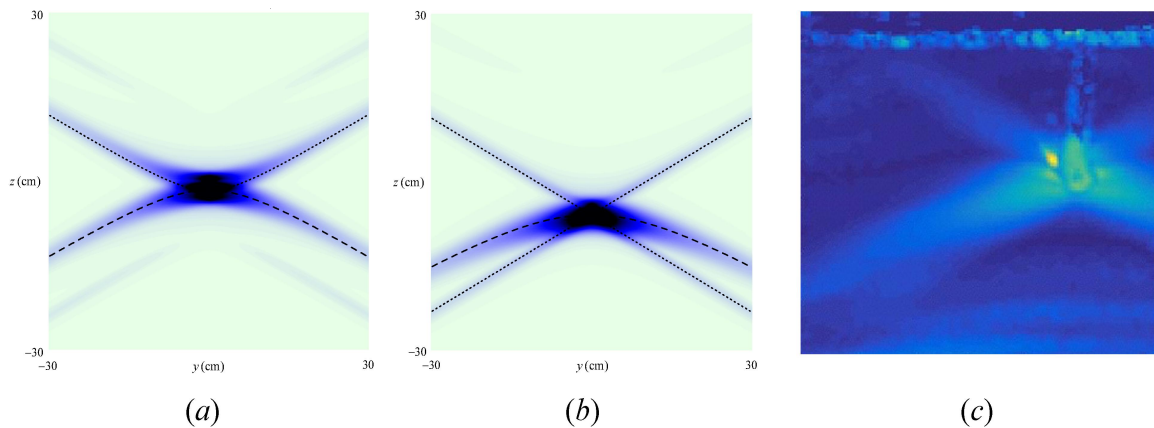


図6 傾斜円柱($\phi = \theta$)を角振動数 $N \sin \theta$ ($\theta = 30^\circ$)で振動させた場合の流速振幅図: (a) 鉛直断面 I 上のモデル方程式(A4)の線形解, (b) 鉛直断面 II 上のモデル方程式(A4)の線形解; (c) 鉛直断面 II 上の実験結果. 図中の点線と破線は, それぞれ円柱の左右端から発せられた内部波の到達位置を幾何学的手法により求めたもの.

5. 結言

密度成層流体中の円柱を振動させることにより発生する内部波ビームとその観察波形を、円柱を傾斜させた場合の効果に着目して調べた。

水平円柱の場合 ($\phi = 0^\circ$)、通常の St. Andrew's Cross と呼ばれる四方向に伸びる直線波形に、新たに円柱両端から発した円錐型ビームによる双曲線波形が加わる。しかしその振幅は小さく、円柱長さが有限であることによる効果は小さい。

一方、円柱をビーム角で傾けた場合 ($\phi = \theta$)、円柱端から発したビームが円柱軸に沿って伝わる間に共鳴増幅され、観察波形に大きな影響を及ぼす。つまり円柱長さが有限であることが本質的に重要な意味をもつため、3次元的な考察が必要となる。

補遺 モデル方程式の導出

一様な密度成層流体 (浮力振動数 N) 中の傾斜円柱が一定の角振動数 $N \sin \theta$ で振動している (図2参照)。円柱の傾斜角 ϕ はビーム角 θ に等しいとする ($\phi = \theta$)。このときに生じる内部波ビームの振舞を記述できる線形モデル方程式を導出する。基礎方程式は、ブジネスク近似下の非圧縮性ナビエーストクス方程式系である。

円柱の軸方向長さ L は直径 D よりも十分に長く、粘性項のつり合いも考慮し、

$$\frac{D}{L} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\nu}{ND^2} = \beta\varepsilon, \quad (\text{A1})$$

と置く。ただし ν は流体の動粘性係数であり、 $\beta = O(1)$ である。円柱に沿う空間座標系

$$\begin{cases} X = \varepsilon(x \cos \theta - z \sin \theta), \\ \eta = x \sin \theta + z \cos \theta, \\ Z = \varepsilon^{1/2} y \end{cases} \quad (\text{A2})$$

を導入すると、円柱軸方向の流速 u は十分時間が経過したとき

$$u = U(X, \eta, Z) e^{-iV \sin \theta t} + \text{c.c.} \quad (\text{A3})$$

(c.c.は複素共役) と表され、その振幅 U は

$$i \cos \theta \left(\int^\eta U_x d\eta' + \frac{1}{2 \tan \theta} \int^\eta \int^\eta U_{zz} d\eta'' d\eta' \right) - \frac{\beta}{2} U_{\eta\eta} = f(\eta) h(X) \delta(Z) \quad (\text{A4})$$

を満たす。ただし右辺外力項のうち、 $f(\eta)$ 、 $h(X)$ は(1)、(2)により与えられ、 $\delta(Z)$ はデルタ関数である。

参考文献

- [1] Lighthill, M. J., "Waves in Fluids," Cambridge University Press (1978).
- [2] Mowbray, D. E. & Rarity, B. S. H., "A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid," *J. Fluid Mech.* **28** (1967) pp. 1-16.
- [3] Peacock, T. & Tabaei, A., "Visualization of nonlinear effects in reflecting internal wave beams," *Phys. Fluids* **17** (2005) 061702.
- [4] Sutherland, B. R. & Linden, P. F., "Internal wave excitation by a vertically oscillating elliptical cylinder," *Phys. Fluids* **14** (2002) pp.721-731.
- [5] Kataoka, T. & Akylas, T. R., "On three-dimensional internal gravity wave beams and induced large-scale mean flows," *J. Fluid Mech.* **769** (2015) pp. 621-634.
- [6] Hurley, D. G. & Keady, G., "The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution," *J. Fluid Mech.* **351** (1997) pp. 119-138.