数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 17-23

区間 AHP におけるいくつかの区間優先度の推定法とそれらの比較

大阪大学大学院基礎工学研究科 印南 成章 (Shigeaki Innan)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University
大阪大学大学院基礎工学研究科 乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) [1] は評価基準や代替案などの項目間の一対の選好比率情報を用いて項目の優先度を求める手法であり，多基準意思決定における有用な手法の一つである．この手法は，評価構造を階層的に表現し，人間の主観的判断から得られる一対比較行列から各項目の優先度を最大固有値法，幾何平均法 [2] などにより導出し，この結果から階層全体の重み付けをすることで，代替案の総合評価を行うものである．しかし，人間の主観的で曖昧な判断を基にして実数値の優先度を得る通常の AHP においては，データが十分に整合せず，妥当な優先度を得られない場合がある．そこで，一対比較行列の整合性の欠如が意思決定者の曖昧な評価に起因すると考え，各評価基準や代替案の優先度を区間で表し解析する区間 AHP[3] が提案されている．しかし，このモデルによって推定された区間優先度の妥当性は未だ十分に検討されていない．

本研究では，区間 AHP による従来の推定法 [3] が必ずしも意思決定者の評価の曖昧さを十分に反映していないことを示す．これを改善する推定法として，幅総和最小化の概念を緩和した推定法や幅の加重和最小化モデル，また幅加重の最小化の概念を緩和した推定法および，対数変換を用いた推定法の 4 つの提案推定法を検討する．数値実験により，これらの提案推定法と従来の推定法の推定精度および代替案比較精度を比較し，良い推定法について考察する．

2 区間 AHP

与えられた一対比較行列 $A=(a_{ij})$ からの区間 AHP における従来の区間優先度の推定法について述べる．評価項目 X_i の区間優先度を $[w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$, $i=1,2,\ldots,n$ とすると，項目 X_i の X_j に対する最大区間優先度比は $[w_i^{\mathrm{L}}/w_j^{\mathrm{R}}, w_i^{\mathrm{R}}/w_j^{\mathrm{L}}]$ になる．この区間内に与えられた一対比較値 a_{ij} が存在すると考えられるので，区間優先度を推定する問題は次の線形計画問題となる [3].

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in N} (w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}}) && (1)\\
\text{subject to} \quad & a_{ij} w_j^{\mathrm{L}} \le w_i^{\mathrm{R}},\ i,j \in N\ (i<j) && (2)\\
& a_{ij} w_j^{\mathrm{R}} \ge w_i^{\mathrm{L}},\ i,j \in N\ (i<j) && (3)\\
& \sum_{i \in N \backslash j} w_i^{\mathrm{R}} + w_j^{\mathrm{L}} \ge 1,\ j \in N && (4)\\
& \sum_{i \in N \backslash j} w_i^{\mathrm{L}} + w_j^{\mathrm{R}} \le 1,\ j \in N && (5)\\
& w_i^{\mathrm{R}} \ge w_i^{\mathrm{L}} \ge \epsilon,\ i \in N && (6)
\end{aligned}
$$

ただし，$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ であり，ϵ は微小な正数である．また，区間優先度の幅が大きいほど明確な評価が得られないことから，区間優先度の幅の総和を目的関数とし，これを最小化している．式 (4)，(5) は優先度の総和は 1 となることに対応する区間優先度の正規性条件である．

区間 AHP を用いることで，各評価基準の優先度を区間として求めることができ，これに基づき代替案間の支配関係が求められる．本研究では，文献 [4] で提案された支配関係を用いる．基準 i における代替案 o の効用 $u_i(o)$ を与えると，各基準の区間優先度から，次の問題を解くことにより二つの代替案 o_p，o_q の間の最小効用差を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & ud(o_p, o_q) = \sum_{i \in N} (u_i(o_p) - u_i(o_q)) w_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i \in N} w_i = 1 \\
& \forall i \in N,\ w_i^{\mathrm{L}} \le w_i \le w_i^{\mathrm{R}}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

式 (7) の最適値を $ud^*(o_j, o_k)$ とする．$ud^*(o_p, o_q) > 0$ ならば，各優先度 w_i が区間 $[w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$ 内でどのような値を取ろうとも代替案 o_p の効用が代替案 o_q の効用より大きくなる．したがって，$o_p \succ o_q$ といえる．しかし，$\hat{ud}(o_p, o_q) < 0$ ならば，区間 $[w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$ 内の少なくとも一つの w_i の組合せに対して，代替案 o_p の効用が代替案 o_q の効用より小さくなる．したがって，$o_p \succ o_q$ と言い切れない．

3　区間優先度の種々の推定法

2 で述べた従来の区間優先度の推定法では，区間の幅の最小化を行っているので，幅が小さい区間優先度が推定されやすい傾向にある．そこで，意思決定者の評価の曖昧さをより反映したいくつかの区間優先度の推定法を提案する．最初の推定法は，幅総和最小化の概念を緩和することにより，優先度の可能性を広げる方法である．前節の推定問題の最適値 d^* を $\beta(\ge 1)$ 倍することにより緩和した制約条件

$$
\sum_{i \in N} (w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}}) \le \beta \cdot d^* \qquad (8)
$$

を考え，各区間優先度の上下限を次の二つの線形計画問題の最適値で定める．

$$\begin{array}{llll} \text{minimize} & w_i^{\mathrm{L}} & \text{maximize} & w_i^{\mathrm{R}} \\ \text{subject to} & (2)\sim(6),(8) & \text{subject to} & (2)\sim(6),(8) \end{array} \tag{9}$$

式 (9) より求められる区間優先度は正規性を満たす [5].

また，従来の推定法では，値が小さい区間優先度の幅を大きくした方が，式 (2), (3) の制約条件を満たしやすく，値の大きい区間優先度ほど幅が小さくなりやすい．そこで，この傾向を緩和するため，前節の推定法の目的関数を各区間優先度の幅と幾何平均法で求められる優先度の逆数との積の総和で置き換えた問題を考える．より簡単には，$\lambda_i = 1/\sqrt[n]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}$ と定め，次の線形計画問題を解くことにより区間優先度を推定する．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i\in N} \lambda_i(w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}}) \\ \text{subject to} & (2)\sim(6) \end{array} \tag{10}$$

式 (9) と同様に，幅加重和最小化の概念を緩和した推定法も考えられる．すなわち，推定問題 (10) の最適値 $\hat{d}^*$ を $\gamma(\geq 1)$ 倍することにより緩和した制約条件

$$\sum_{i\in N} \lambda_i(w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}}) \leq \gamma \cdot \hat{d}^* \tag{11}$$

を考え，各区間優先度の上下限を次の二つの線形計画問題の最適値で定める．

$$\begin{array}{llll} \text{minimize} & w_i^{\mathrm{L}} & \text{maximize} & w_i^{\mathrm{R}} \\ \text{subject to} & (2)\sim(6),(11) & \text{subject to} & (2)\sim(6),(11) \end{array} \tag{12}$$

また，優先度の大きさに強く影響されないよう，優先度を対数変換した対数優先度による推定法を考える．すなわち，$u_i^{\mathrm{L}} = \log w_i^{\mathrm{L}}$, $u_i^{\mathrm{R}} = \log w_i^{\mathrm{R}}$, $c_{ij} = \log a_{ij}$, $i,j \in N (i<j)$ と対数変換し，次の線形計画問題を解くことにより，u_i^{L}, u_i^{R}, $i \in N$ を求める．

$$\text{minimize} \quad \sum_{i\in N}(u_i^{\mathrm{R}} - u_i^{\mathrm{L}}) \tag{13}$$

$$\text{subject to} \quad c_{ij} + u_j^{\mathrm{L}} \leq u_i^{\mathrm{R}},\ i,j \in N\ (i<j) \tag{14}$$

$$c_{ij} + u_j^{\mathrm{R}} \geq u_i^{\mathrm{L}},\ i,j \in N\ (i<j) \tag{15}$$

$$u_i^{\mathrm{R}} \geq u_i^{\mathrm{L}},\ i \in N \tag{16}$$

この問題の最適解 $\hat{u}_i^{\mathrm{L}}, \hat{u}_i^{\mathrm{R}}, i \in N$ を用いて，$\hat{w}_i^{\mathrm{L}} = \exp(\hat{u}_i^{\mathrm{L}})$, $\hat{w}_i^{\mathrm{R}} = \exp(\hat{u}_i^{\mathrm{R}})$, $i \in N$ を定めると，正規な区間優先度 $[\bar{w}_i^{\mathrm{L}}, \bar{w}_i^{\mathrm{R}}]$, $i \in N$ は次式で求められる．

$$\bar{w}_i^{\mathrm{L}} = \frac{\hat{w}_i^{\mathrm{L}}}{\displaystyle\sum_{j\in N\setminus i} \hat{w}_j^{\mathrm{R}} + \hat{w}_i^{\mathrm{L}}},\ \bar{w}_i^{\mathrm{R}} = \frac{\hat{w}_i^{\mathrm{R}}}{\displaystyle\sum_{j\in N\setminus i} \hat{w}_j^{\mathrm{L}} + \hat{w}_i^{\mathrm{R}}},\ i \in N \tag{17}$$

表 1: 区間優先度推定の妥当性評価

	基準	P_i	Q_i	R_i	F_i
従来法	X_1	0.136862	0.139433	0.881246	0.240771
	X_2	0.218309	0.222202	0.925707	0.358381
	X_3	0.333713	0.339977	0.947672	0.500427
	X_4	0.377217	0.385545	0.945837	0.547796
	X_5	0.432265	0.440612	0.958013	0.603610
推定法 (9)	X_1	0.648180	0.820290	0.755458	0.786540
	X_2	0.668347	0.839029	0.766651	0.801209
	X_3	0.679097	0.854631	0.767785	0.808884
	X_4	0.685390	0.854595	0.775869	0.813331
	X_5	0.697644	0.862572	0.784885	0.821897
推定法 (10)	X_1	0.343997	0.360342	0.883501	0.511901
	X_2	0.333250	0.346349	0.898079	0.499906
	X_3	0.320975	0.330125	0.920508	0.485966
	X_4	0.281753	0.287142	0.937552	0.439637
	X_5	0.281356	0.283738	0.971029	0.439153
推定法 (12)	X_1	0.619366	0.789996	0.741441	0.764949
	X_2	0.643703	0.810220	0.757989	0.783235
	X_3	0.660436	0.829905	0.763828	0.795497
	X_4	0.658403	0.823126	0.766902	0.794020
	X_5	0.668792	0.827751	0.776917	0.801529
推定法 (17)	X_1	0.510299	0.549215	0.878073	0.675759
	X_2	0.483458	0.509117	0.905595	0.651799
	X_3	0.470866	0.487374	0.932893	0.640257
	X_4	0.460745	0.470379	0.957441	0.630836
	X_5	0.517007	0.534124	0.941632	0.681615

4 区間優先度の推定精度に関する数値実験

$n=5$ とし，真の区間優先度 $T_i=[t_i^{\mathrm{L}},t_i^{\mathrm{R}}]$, $i\in N$ を $\sum_{i\in N}(t_i^{\mathrm{R}}+t_i^{\mathrm{L}})/2=1$，$t_i^{\mathrm{R}}$, $t_i^{\mathrm{L}}>0$ かつ式 (4)，(5) の正規性を満たすように定め，T_i および T_j, $i,j\in N$ それぞれから一様乱数を用いて，区間内から値を選び，その比で a_{ij} を定め，一対比較行列を作成する．この生成法により 1,000 個の一対比較行列を用意し，それぞれについて各推定法により求められる区間優先度 $W_i=[w_i^{\mathrm{L}},w_i^{\mathrm{R}}]$，$i\in N$ の妥当性を調べる．具体的には，$d([x^{\mathrm{L}},x^{\mathrm{R}}])=x^{\mathrm{R}}-x^{\mathrm{L}}$，$d(\emptyset)=0$ と定め，T_i と W_i の一致度を次の四つの指標を用いることで調べる．

$$P_i=\frac{d(T_i\cap W_i)}{d(T_i)+d(W_i)-d(T_i\cap W_i)},\quad Q_i=\frac{d(T_i\cap W_i)}{d(T_i)}, \tag{18}$$

表 2: 効用値

代替案	基準				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
o_1	0.25	0.30	0.10	0.15	0.20
o_2	0.20	0.25	0.30	0.10	0.15
o_3	0.15	0.20	0.25	0.30	0.10
o_4	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
o_5	0.30	0.10	0.15	0.20	0.25

表 3: 支配関係 $\succ$ の評価

代替案	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5
o_1	—	−0.0125	−0.0175	−0.0025	−0.005
o_2	−0.0125	—	−0.005	−0.0025	−0.0175
o_3	−0.0325	−0.02	—	0.0025	−0.025
o_4	−0.0475	−0.0475	−0.0275	—	−0.0275
o_5	−0.02	−0.0325	−0.025	0.0025	—

$$R_i = \frac{d(T_i \cap W_i)}{d(W_i)} = \frac{P_i Q_i}{Q_i - P_i + P_i Q_i}, \quad F_i = \frac{2Q_i R_i}{Q_i + R_i}, \tag{19}$$

本実験では，生成された 1,000 個の一対比較行列から各手法によって推定された区間優先度 W_i に対して，各基準 X_i, $i \in N$ における P_i, Q_i, R_i, F_i を求め，これらの平均値がどの程度大きいかを調べる．本稿では，T_i, $i \in N$ を，$[0.21, 0.31]$, $[0.18, 0.28]$, $[0.15, 0.25]$, $[0.12, 0.22]$, $[0.09, 0.19]$ と定めた場合の実験結果を示す．従来法，$\beta = 1.2$ とした式 (9)，式 (10)，$\gamma = 1.1$ とした式 (12)，および式 (17) で推定した結果を表 1 に示す．表 1 に示すように，真の区間重要度からただ一つの値を抽出することにより一対比較行列の各成分を生成しているためか，P_i は高々6〜7 割程度にしかならないことが分かる．従来法では P_i, Q_i, F_i が低く，かつ，ばらついていて，真の区間優先度を十分に推定しているとは言い難い．$\beta = 1.2$ で従来法の目的関数値を緩和した式 (9) の推定法では，P_i, Q_i, F_i の値が大幅に改善され，ばらつきも小さくなっている．式 (10) の推定法では，従来法よりも項目間の一致度の差が小さくなるように改善できている．$\gamma = 1.1$ で式 (10) の目的関数値を緩和したた式 (12) の推定法でも，P_i, Q_i, F_i の値が式 (10) の推定法より大幅に改善されているが，改善度は式 (9) の推定法より劣る．一方，R_i の値は式 (9) の推定法と式 (12) の推定法より，従来法と式 (10) の推定法のほうが良くなった．しかし，これは，従来法と式 (10) の推定法によって得られる区間優先度の幅が狭いことによるものである．式 (17) の推定法では，従来法よりも一致度が大きく改善され，項目間の一致度の差が提案推定法の中で最も小さくはなっているが，P_i, F_i の値は式 (9)，式 (12) のものより小さい．結局，一致度に関しては $\beta = 1.2$ とした式 (9) の推定法が最も好ましい結果となった．より大きな β についても実験を行ったが良い結果が得られず，$\beta = 1.2$ 付近が良い値となった．これは，β が大き過ぎると余分な範囲が推定値に含まれるためである．

表 4: 代替案間の支配率 (%)

	従来法			提案法 (9)			提案法 (10)		
(o_p, o_q)	$o_p \succ o_q$	$o_q \succ o_p$	不明	$o_p \succ o_q$	$o_q \succ o_p$	不明	$o_p \succ o_q$	$o_q \succ o_p$	不明
(o_1, o_2)	26.1	18.7	55.2	0.9	1.5	97.6	31.2	18.0	50.8
(o_1, o_3)	56.1	1.1	42.8	1.8	0	98.2	68.1	1.6	30.3
(o_1, o_4)	99.7	0	0.3	32.5	0	67.5	99.7	0	0.3
(o_1, o_5)	73.6	3.0	23.4	17.8	0	82.2	62.6	1.8	35.6
(o_2, o_3)	71.8	0.6	27.6	15.6	0	84.4	86.1	1.4	12.5
(o_2, o_4)	99.5	0	0.5	30.9	0	69.1	99.9	0	0.1
(o_2, o_5)	57.1	2.0	40.9	2.1	0	97.9	55.8	2.3	41.9
(o_3, o_4)	96.9	0	3.1	56.0	0	44.0	99.9	0	0.1
(o_3, o_5)	21.3	13.5	65.2	0.3	0.5	99.2	22.8	15.8	61.4
(o_4, o_5)	0.1	97.8	2.1	0	54.7	45.3	0	91.4	8.6

	提案法 (12)			提案法 (17)		
(o_p, o_q)	$o_p \succ o_q$	$o_q \succ o_p$	不明	$o_p \succ o_q$	$o_q \succ o_p$	不明
(o_1, o_2)	1.9	2.5	95.6	13.9	11.1	75.0
(o_1, o_3)	2.5	0	97.5	25.7	0.1	74.2
(o_1, o_4)	40.0	0	60.0	85.4	0	14.6
(o_1, o_5)	19.9	0	80.1	57.2	0.2	42.6
(o_2, o_3)	20.3	0	79.7	61.6	0.4	38.0
(o_2, o_4)	36.1	0	63.9	85.6	0	14.4
(o_2, o_5)	3.3	0	96.7	21.4	0.1	78.5
(o_3, o_4)	59.3	0	40.7	89.8	0	10.2
(o_3, o_5)	0.2	0.6	99.2	2.6	3.6	93.8
(o_4, o_5)	0	57.5	42.5	0	85.3	14.7

5 支配関係に関する数値実験

各評価基準の効用値を表 2 のように与えた五つの代替案を用意し，代替案間の支配関係の推定精度について調べた．本稿で定めた真の区間優先度 T_i を用いれば，式 (7) を解くことにより表 3 の値を得ることができ，$o_3 \succ o_4$，$o_5 \succ o_4$の 2 対の代替案間で支配関係が成立した．従来法および式 (10) の推定法による区間優先度では，90%以上の割合でこの支配関係を維持できたが，もともと支配関係が得られない数対の代替案間の支配関係を高い割合で示した．これは，表 3 より，評価値が 0 に近いことによるものである．式 (17) の推定法による区間優先度でも，高い割合で 2 対の代替案間の支配関係を維持できたが，もともと支配関係が得られない一部の数対の代替案間の支配関係を依然高い割合で示した．一方，式 (9) の推定法による区間優先度では，2 対の代替案間の支配関係は 5 割程度しか維持できなかったが，他の支配関係を高い割合で示すことはなかった．式 (12) の推定法でも同様な改善を得たが，もともと支配関係が得られない数対の代替案間の支配関係を式 (9) の推定法よりも高い割合で示した．この実験でも式 (9) の推定法により最も好ましい結果が得

られた．

6 おわりに

本研究では，意思決定者の評価の曖昧さをより反映する推定法として四つの推定法を提案し，これらの手法では，線形計画問題を解くことにより容易に区間優先度の推定ができることを示した．数値実験により，区間優先度の推定精度および代替案間の支配関係の推定精度を比較し，提案した推定法が従来の推定法より有用であることを示した．また，提案した推定法の中で最も適切な推定法は β を適切に設定した式（9）の推定法が最も良いと考えられる．一対比較行列の成分が区間値となる場合の推定法の考察などが今後の課題となる．

謝辞　JSPS 科研費 26350423 の助成に謝意を表します．

参考文献

[1] T. L. Saaty: The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, New York (1980).

[2] T. L. Saaty, C. G. Vargas: Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios, Mathematical Modelling, 5, 309–324 (1984).

[3] K. Sugihara, H. Tanaka: Interval evaluations in the analytic hierarchy process by possibilistic analysis, Computational Intelligence, Vol. 17, no. 3, 567–579 (2001)

[4] T. Entani, M. Inuiguchi: Pairwise comparison based interval analysis for group decision aiding with multiple criteria, Fuzzy Sets and Systems, vol. 274, 79–96 (2015).

[5] H. Tanaka, K. Sugihara, Y. Maeda: Non-additive measures by interval probability functions, Information Sciences, Vol. 164, 209–227 (2004).