数理解析研究所講究録
第1990巻 2016年 48-55

一般の不完備情報協力ゲームとそのShapley値

大東文化大学・経営学部　桝屋　聡 (Satoshi Masuya)
Faculty of Business Administration, Daito Bunka University

1　はじめに

協力ゲーム理論は，協力して事業などを実施した場合の各プレイヤーの費用分担額や利益配分額，投票における影響力などの合理的な評価を行う際に有用となる．協力ゲームは，プレイヤー全体の集合とその部分集合に対して実数値を与える関数によって表現される、この関数は特性関数，プレイヤーの部分集合は提携と呼ばれ，関数値は提携値と呼ばれる．プレイヤー全員の集合は全体提携と呼ばれる．プレイヤーの数を n とすると，協力ゲームの解は，n 次元実数ベクトルか，あるいは，その集合として与えられる．前者は値 (value) や一点解と呼ばれる．各 n 次元実数ベクトルは，各プレイヤーが分担する費用や受取る利得，各プレイヤーの影響力を示している．協力ゲームの代表的な解として，コア，Shapley 値 [3]，仁 [2] などが知られている．コアは，通常，n 次元実数ベクトルの集合になるが，Shapley 値や仁は常に一つの n 次元実数ベクトルである．

von Neumann と Morgenstern[4] により与えられた通常の協力ゲーム理論では，すべての提携の提携値がわかっていると仮定してきた．しかし，現実にはいくつかの提携に対する提携値がわかっていないことが少なくない．このように不完備な特性関数をもつ協力ゲームに関する研究に，[5, 1] がある．これらの研究では，提携値が不明な提携に対する提携値を用いないで，Shapley 値を定義し，その公理化を行っている．しかし，これらの研究によって定義された Shapley 値は，通常の完備な特性関数をもつゲームで考えてみると，不明な提携値はゼロと見なして Shapley 値を定義していることと等しくなっている．これにより，これらの研究で用いられているゲームは，優加法性などの重要な性質を満たさない．

そこで，近年，桝屋と乾口 [6]，桝屋 [7] によって，一部の提携値のみがわかっている不完備な優加法的な特性関数をもつ協力ゲームとその解について検討され始めた．

文献 [6] では，優加法性を仮定した下での上限ゲームや下限ゲームが一般的に定義されているものの，主要な部分である解概念の考察に対しては，個人提携と全体提携の提携値のみが分かっている場合，つまり最小限の情報がわかっている場合の考察に留まっている．そこで，文献 [7] では，個人提携と全体提携に加え，基数が $k(\geq n/2)$ 以下のすべての部分提携の提携値が分かっている優加法的ゲームとその Shapley 値について考察を行っている．この場合に，与えられた不完備ゲームに矛盾しない優加法的な完備ゲームの全体が凸多面体となることが示されている．また，優加法性を仮定した下での不完備ゲームから得られうる Shapley 値の全体集合を明らかにしている．さらに，不完備ゲームから得られうる Shapley 値の全体集合に対して，合理的な1つの解の選択方法について考察し，選択した解の特徴づけを行っている．しかしながら，提携値が不明な提携の全体集合が一般の場合の，不完備情報協力ゲームとその解についての考察は未だなされていない．

そこで，本研究では，提携値が未知の提携の全体集合が任意である場合の，一般の不完備情報協力ゲームとその Shapley 値の考察を行う．なお，先行研究の文献 [6, 7] で与えられている，少なくとも全体提携および個人提携の提携値が既知であるという仮定は，本研究でも用いられる．

簡単のため，以下では，いくつかの提携値がわかっていない協力ゲームを “不完備ゲーム” と呼び，すべての提携値がわかっている協力ゲーム，すなわち，通常の協力ゲームを “完備ゲーム” と呼ぶことにする．

2 協力ゲームの理論とShapley値

$N=\{1,2,\ldots,n\}$をプレイヤーの集合とし，vを$v(\emptyset)=0$を満たす2^Nから$\mathbb{R}$への関数とする．このとき，協力ゲームは対(N,v)で与えられる．プレイヤーの集合$S\subseteq N$は提携と呼ばれ，関数値$v(S)\in\mathbb{R}$は提携Sが形成されたときに，Sが得る利得を表す．$v(S)$はSの提携値と呼ばれる．

次式(1)，(2)，(3)を満たすとき，かつそのときに限り，それぞれ，(N,v)は単調，優加法的，凸であるという．

$$v(T)\geq v(S),\ \forall S\subseteq T\subseteq N \tag{1}$$

$$v(S\cup T)\geq v(S)+v(T),\ \forall S,\ T\subseteq N \text{ such that } S\cap T=\emptyset \tag{2}$$

$$v(S\cup T)+v(S\cap T)\geq v(S)+v(T),\ \forall S,\ T\subseteq N \tag{3}$$

優加法性は，より大きな提携を形成させる誘因を与える自然な性質である．凸性は優加法性よりも強い性質であり．凸性は次のように表わすこともできる．

$$v(T)-v(T\setminus i)\geq v(S)-v(S\setminus i),\ \forall S\subseteq T\subseteq N\setminus i,\ \forall i\in N \tag{4}$$

ただし，簡単のため，$S\setminus\{i\}$を$S\setminus i$と表している．式(4)は，各プレイヤーの限界貢献度が提携の包含関係に関して単調であることと，協力ゲームが凸であることは同値であることを表している．

次に，協力ゲームにおける代表的な1点解であるShapley値を紹介する．協力ゲーム理論では，全体提携Nが形成されると仮定され，得られる利得$v(N)$を各プレイヤー間でどのように分配するかが議論される．したがって，解はn次元実数ベクトル$x=(x_1,\ldots,x_n)$，あるいはその集合となる．ここで，x_iはプレイヤーiの受取る配分利得を表すので，xを利得ベクトルと呼ぶこともある．個人合理性$x_i\geq v(\{i\}),\ \forall i\in N$, 全体合理性$\sum_{i=1}^{n}x_i=v(N)$を満たす$x$を配分と呼ぶ．また，提携合理性$\sum_{i\in S}x_i\geq v(S),\ \forall S\subseteq N$を満たす配分$x$の集合をコアと呼ぶ．コアは合理的な解集合であるが，常に存在するとは限らない．

$G(N)$を協力ゲーム(N,v)の全体とする．簡便のため，プレイヤーの集合は固定されているので，協力ゲーム(N,v)を単にvと表すことにする．協力ゲームに対して利得ベクトルを与える関数を$\pi:G(N)\to\mathbb{R}^n$とする．πの第i成分をπ_iと表すことにする．

Shapley値は，ナルプレイヤーのゼロ評価，対称性，効率性，加法性なる四公理により特徴付けられる．プレイヤーiを含む任意の提携$S\subseteq N$に対して，$v(S)-v(S\setminus i)=0$となるとき，プレイヤーiをナルプレイヤーという．ナルプレイヤーのゼロ評価の公理とは，iがナルプレイヤーであれば，$\pi_i(v)=0$が成り立つことをいう．対称性公理とは，$v(S\setminus i)=v(S\setminus j),\ \forall S\subseteq N$ such that $\{i,j\}\subseteq S$のとき，$\pi_i(v)=\pi_j(v)$が成り立つことをいう．効率性公理とは，$\sum_{i\in N}\pi_i(v)=v(N)$が成り立つことをいう．二つの協力ゲーム$v,w\in G(N)$の和ゲーム$v+w\in G(N)$を$(v+w)(S)=v(S)+w(S),\ \forall S\subseteq N$と定義すると，加法性公理は，$\pi(v+w)=\pi(v)+\pi(w)\ \ \forall v,w\in G(N)$を満たすことをいう．Shapley値はこれら四つ公理を満たす唯一つの$\pi:G(N)\to\mathbb{R}^n$であることが知られており[3]，これをϕで表すと，次のように表現される．

$$\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\ni i\\ S\subseteq N}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S)-v(S\setminus i)),\ \forall i\in N \tag{5}$$

ただし，ϕ_iはϕの第i成分を表し，$|S|$は提携Sに帰属するプレイヤー数を表す．

協力ゲームが優加法的であれば，Shapley値は配分となり，凸であるときには，コアに含まれることが知られている．

3 提携値に関する情報が不完備な協力ゲーム

通常の協力ゲームでは，すべての提携値はわかっているものと仮定している．しかし，現実には，いくつかの提携に対する提携値がわからないことが少なくない．本節では，いくつかの提携値がわからない不完備情報協力ゲームに関する従来の一般的な成果 [6] を紹介する．

不完備ゲームは，プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$，提携値がわかっている提携の集合を $\mathcal{K}\subseteq 2^N$，関数 $\nu:\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ によって特徴づけることができる．すなわち，不完備ゲームは 3 重対 $(N,\mathcal{K},\nu)$ によって定められる．ただし，$\emptyset\in\mathcal{K}$ とし，$\nu(\emptyset)=0$ と仮定する．また，各プレイヤー 1 人からなる個人提携と全体提携に対する提携値は必ずわかっているものと仮定し，$\nu(\{i\})\geq 0\ \forall i\in N$ とする．すなわち，$\{i\}\in\mathcal{K},\ i=1,2,\ldots,n$ と $N\in\mathcal{K}$ が成り立つものと仮定する．本研究では，単調で優加法的な協力ゲームを考えるので，不完備ゲーム ν にも優加法性を仮定する．すなわち，次が成り立つものと仮定する．

$$\begin{aligned}&\nu(S)\geq \textstyle\sum_{i=1}^{s}\nu(T_i),\ \forall S,T_i\in\mathcal{K},\ i=1,2,\ldots,s\\ &\text{such that } \textstyle\bigcup_{i=1,2,\ldots,s}T_i=S \text{ and } T_i,\ i=1,2,\ldots,s \text{ are disjoint}\end{aligned}\tag{6}$$

本研究では，N と $\mathcal{K}$ は固定して考えるので，不完備ゲーム $(N,\mathcal{K},\nu)$ を単に ν と記すこともある．

不完備ゲーム $(N,\mathcal{K},\nu)$ に対して，次の二つの完備ゲーム $(N,\underline{\nu})$，$(N,\overline{\nu})$ を考える．

$$\underline{\nu}(S)=\max_{\substack{T_i\in\mathcal{K},\ i=1,2,\ldots,s\\ \cup_i T_i=S,\ T_i \text{ are disjoint}}}\sum_{i=1}^{s}\nu(T_i)\tag{7}$$

$$\overline{\nu}(S)=\min_{\hat{S}\in\mathcal{K},\ \hat{S}\supseteq S}\left(\nu(\hat{S})-\underline{\nu}(\hat{S}\setminus S)\right)\tag{8}$$

ν の優加法性より，$\underline{\nu}(S)=\nu(S),\forall S\in\mathcal{K}$ が成り立つ．容易にわかるように，$\underline{\nu}(S)$ は，不完備ゲーム ν に関連する優加法的な完備ゲームが定める S の提携値の下限を示している．また，$\overline{\nu}(S)$ は，不完備ゲーム ν に関連する完備ゲームが定める S の提携値の上限を示している．実際，式 (6) より，任意の $\hat{S}\in\mathcal{K}$, 任意の $S\subseteq\hat{S}$ について，

$$\begin{aligned}\nu(\hat{S})&\geq \max_{\substack{T_i\in\mathcal{K},\ i=1,2,\ldots,s\\ \cup_i T_i=\hat{S}\setminus S,\ T_i \text{ are disjoint}}}\sum_{i=1}^{s}\nu(T_i)+\max_{\substack{T_i\in\mathcal{K},\ i=1,2,\ldots,s\\ \cup_i T_i=S,\ T_i \text{ are disjoint}}}\sum_{i=1}^{s}\nu(T_i)\\ &=\underline{\nu}(\hat{S}\setminus S)+\underline{\nu}(S)\end{aligned}\tag{9}$$

が成立するので，

$$\overline{\nu}(S)\geq\underline{\nu}(S),\ \forall S\subseteq N\tag{10}$$

となる．

これらの完備ゲームに関して次が成立する．

Theorem 1 ([6]) 不完備ゲーム $(N,\mathcal{K},\nu)$ の下限ゲーム $(N,\underline{\nu})$ は単調で優加法的であり，上限ゲーム $(N,\overline{\nu})$ は単調性を満たすが，優加法的とは限らない．

不完備ゲーム ν に関連するすべての優加法的な完備ゲームの集合を $V(\nu)$ と書くことにする．ν に関して優加法性を仮定していることから，$V(\nu)$ は次のように表現できる．

$$V(\nu)=\{v:2^N\to\mathbb{R}\mid v \text{ is superadditive and } v(S)=\nu(S),\ \forall S\in\mathcal{K}\}\tag{11}$$

また，不完備ゲーム ν から得られうる Shapley 値の全体集合を $\Phi(\nu)$ と書くことにする．

4 一般の不完備情報協力ゲームとそのShapley値

前節では，提携値に関する情報が不完備な協力ゲームについて述べた．前節で紹介した不完備ゲームに対する結果は，任意の優加法的な協力ゲームおよび任意の $\mathcal{K}$ に対して成り立つものである．この節では，任意の不完備情報協力ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ から得られうる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ と Shapley 値の集合 $\Phi(\nu)$ について考察する．

まず，一般の不完備ゲーム ν から得られうる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ について考察しよう．提携値が既知でなく，互いに包含関係が成立しない，有限個の提携の集合 $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ を考える．すなわち，任意の $T_p, T_s \in \mathcal{T}$ $(p \neq s)$ に対して，$T_p, T_s \notin \mathcal{K} \setminus \{N\}$，かつ，$T_p \not\subseteq T_s$ かつ $T_s \not\subseteq T_p$ が成立する提携の集合 $\mathcal{T}$ を考える．このような集合 $\mathcal{T}$ は数多く存在するが有限であり，それらの集まりを $\Gamma'(N, \mathcal{K})$ と記す．

$\mathcal{T} \in \Gamma'(N, \mathcal{K})$ に依存する完備ゲームを次のように定義する．

$$v^{\mathcal{T}}(S) = \begin{cases} \overline{v}(S), & \text{if } \exists T \in \mathcal{T},\ S \supseteq T, \text{ where } S \notin \mathcal{K}, \\ \underline{v}(S), & \text{if } \forall T \in \mathcal{T}, S \not\supseteq T, \text{ where } S \notin \mathcal{K}, \\ \nu(S), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{12}$$

完備ゲーム $v^{\mathcal{T}}$ は提携値が既知の提携に対してはその値を，提携値が未知の提携に対しては，$\mathcal{T}$ 内のいずれかの提携を包含すれば，上限ゲームの値を，$\mathcal{T}$ 内のいずれの提携も包含しなければ，下限ゲームの値をとる完備ゲームである．言い換えれば，完備ゲーム $(N, v^{\mathcal{T}})$ は，$\mathcal{T}$ 内のいずれかの提携 T のプレイヤー全員が揃って参加している提携の提携値が最も高く定められる完備ゲームであり，いわば，$\mathcal{T}$ は力を発揮する提携のリストとなっている．

次の補題が得られる．

Lemma 1 全ての k に対して $|T_k| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるような，$\mathcal{T} \in \Gamma'(N, \mathcal{K})$ について，$v^{\mathcal{T}}$ は優加法的である．

$\mathcal{T} \in \Gamma'(N, \mathcal{K})$ の中で，少なくとも 1 つの $T_k \in \mathcal{T}$ について $|T_k| < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であり，それに対する $v^{\mathcal{T}}$ が優加法的であるような $\mathcal{T}$ の全体と，すべての T_k について $|T_k| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるような $\mathcal{T}$ の全体の和集合を $\Gamma(N, \mathcal{K})$ と記す．明らかに，$\Gamma(N, \mathcal{K}) \subseteq \Gamma'(N, \mathcal{K})$ である．$\Gamma(N, \mathcal{K})$ は $v^{\mathcal{T}}$ が優加法的であるような $\mathcal{T}$ の全体を表している．

上の補題より，次の定理を得る．

Theorem 2 任意の不完備ゲームを ν とする．このとき，ν から得られうる優加法的ゲームの全体 $V(\nu)$ は，$v^{\mathcal{T}}, \forall \mathcal{T} \in \Gamma(N, \mathcal{K})$ を端点とする凸多面体となる．つまり，以下が成り立つ．

$$V(\nu) = \left\{ v : 2^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; v = \sum_{\mathcal{T} \in \Gamma(N, \mathcal{K})} c_{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}, \right.$$
$$\left. \sum_{\mathcal{T} \in \Gamma(N, \mathcal{K})} c_{\mathcal{T}} = 1, c_{\mathcal{T}} \geq 0,\ \forall \mathcal{T} \in \Gamma(N, \mathcal{K}) \right\}. \tag{13}$$

Theorem 2 は，ν から得られうる優加法的な完備ゲームの全体 $V(\nu)$ は凸多面体となっており，$v^{\mathcal{T}}, \forall \mathcal{T} \in \Gamma(N, \mathcal{K})$ は，その全頂点を構成していることを示している．

最後に，不完備ゲーム ν から得られうる Shapley 値の集合 $\Phi(\nu)$ について考察する．一般の不完備ゲーム ν に対して，Theorem 2 と Shapley 値の線形性より，ν から得られうる Shapley 値の全体集合 $\Phi(\nu)$ は，凸多面体となり，$\phi(v^{\mathcal{T}}), \forall \mathcal{T} \in \Gamma(N, \mathcal{K})$ がその頂点となることがわかる．

5 合理的な１つのShapley値の選定とその公理化

本節では，一般の不完備ゲームに対して，得られうるすべてのShapley値の集合の中から，1つの解を選定する方法について提案する．その後，選定した唯一つのShapley値の公理化を行う．

不完備ゲームの応用を考えると，すべての得られうるShapley値の集合から，何らかの意味で合理的な唯一つのShapley値を選択することが必要となることも少なくない．以下では，一般の不完備ゲーム ν に対して，すべての得られうるShapley値の集合 $\Phi(\nu)$ からの1つの解の選定方法を二つ提案し，そのうちの一つについて公理化を行う．

一つ目の選定方法は，重心法である．不完備ゲーム ν から得られうるShapley値の全体集合は凸多面体となっていることから，その重心を ν のShapley値 $\check{\phi}(\nu)$ とする．つまり，

$$\check{\phi}(\nu) = \frac{\sum_{\mathcal{T} \in \Gamma(N,\mathcal{K})} \phi(v^{\mathcal{T}})}{|\Gamma(N,\mathcal{K})|} \tag{14}$$

とする．

二つ目の選定方法は，プレイヤーの最大不満の最小化を行う方法である．これは，仁の考え方を適用するものである．具体的には，各プレイヤーの得られる最大Shapley値と最小Shapley値の内点とプレイヤーの得る利得の差を不満と定義し，最大不満の最小化を行う利得ベクトルを解としようとするものである．

不完備ゲーム ν について，プレイヤーの利得ベクトル を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とする．プレイヤー i の得られる最大のShapley値を $\overline{\phi}_i(\nu)$ ，最小のShapley値を $\underline{\phi}_i(\nu)$ とする．この時，

$$e_i^{\alpha}(x) = \alpha\overline{\phi}_i(\nu) + (1-\alpha)\underline{\phi}_i(\nu) - x_i, \text{ where } 0 \le \alpha \le 1$$

を i の x に対する不満と呼ぶことにする．そして，与えられた α に対して，各 i に対する $e_i^{\alpha}(x)$ を大きい順に並べたものを $\theta(x)$ とする．

このとき，二つの利得ベクトル x, y が，次式を満たすとき，x は y よりも辞書式に小さいという：

$$\begin{gathered} \theta_1(x) < \theta_1(y), \text{ or} \\ \exists h \in \{1,2,\ldots,n\} \text{ such that} \\ \theta_i(x) = \theta_i(y), \forall i < h \text{ and } \theta_h(x) < \theta_h(y) \end{gathered} \tag{15}$$

そして、不満 $\theta(x)$ を辞書式に最小化するようなShapley値を最大不満最小化Shapley値と呼び，$\hat{\phi}^{\alpha}(\nu)$ とする．

このとき，次の定理が得られた．

Theorem 3 任意の不完備ゲームを ν，ν から得られうる*Shapley*値の上限を $\overline{\phi}_i(\nu)$，下限を $\underline{\phi}_i(\nu)$ とする．また，

$$\sum_{i \in N} \left(\alpha\overline{\phi}_i(\nu) + (1-\alpha)\underline{\phi}_i(\nu) \right) = \nu(N) \tag{16}$$

を満たす α（ここで $0 \le \alpha \le 1$）を考える．このとき，最大不満最小化解 $\hat{\phi}^{\alpha}(\nu)$ は，次式で与えられる．

$$\hat{\phi}_i^{\alpha}(\nu) = \alpha\overline{\phi}_i(\nu) + (1-\alpha)\underline{\phi}_i(\nu) \ \ \forall i \in N. \tag{17}$$

Theorem 3により，最大不満最小化Shapley値は容易に計算できることがわかる．

続いて，重心法によって得られる解 $\check{\phi}(\nu)$ の公理化を行う．

Definition 1 任意の不完備ゲーム ν を考え，2人のプレイヤーを $i,j \in N$ とする．任意の提携 $S \subseteq N \setminus \{i,j\}$ について，$S \cup i \in \mathcal{K}$, $S \cup j \in \mathcal{K}$ か，$S \cup i \notin \mathcal{K}$, $S \cup j \notin \mathcal{K}$ のいずれかが成り立つとする．このとき，$S \cup i \in \mathcal{K}$, $S \cup j \in \mathcal{K}$ ならば $\nu(S \cup i) = \nu(S \cup j)$ が成り立つとき，プレイヤー i,j は ν において対称とよぶ．

既知の提携の中で，同じ立場にいる2人のプレイヤーを対称なプレイヤーと呼ぶ．

Axiom 1 (ν-consistent symmetry) 任意の不完備ゲーム ν について，プレイヤー $i,j \in N$ が ν において対称であるとする．このとき ν から得られうる *Shapley* 値 $\pi \in \Phi(\nu)$ について，

$$\pi_i(\nu) = \pi_j(\nu)$$

が成り立つ．

Axiom 1は，不完備ゲームにおいて提携値情報がわかっている範囲で2人のプレイヤーが対称ならば，そこから得られるゲームにおいてもその2人のプレイヤーは対称であると考え，値が等しいということを表している．

Axiom 2 (理由不十分の原則) 任意の不完備ゲーム ν について，ν から得られうる *Shapley* 値 $\pi \in \Phi(\nu)$ を $\pi = \sum_{\mathcal{T} \in \Gamma(N,\mathcal{K})} \phi(c_{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}})$ *where* $\sum_{\mathcal{T} \in \Gamma(N,\mathcal{K})} c_{\mathcal{T}} = 1$ *and* $c_{\mathcal{T}} \geq 0$ $\forall \mathcal{T} \in \Gamma(N,\mathcal{K})$ とする．このとき，2つの提携の族 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \Gamma(N,\mathcal{K})$ について，$\mathcal{T}_2$ が $\mathcal{T}_1$ に属する対称なプレイヤーの交換ではないとき，

$$c_{\mathcal{T}_1} = c_{\mathcal{T}_2}$$

が成り立つ．

$c_{\mathcal{T}}$ は，提携の族 $\mathcal{T}$ が形成されることによる，報酬と見なすことができ，2つの提携の族の関係が，対称なプレイヤーの交換となっているというような追加情報がなければ，プレイヤー間の関係は一様で，ある提携の族の報酬が他の提携の族の報酬より大きくなる十分な理由も小さくなる十分な理由もないということを表している．

このとき，次の定理が得られた．

Theorem 4 重心解 $\check{\phi}(\nu)$ は，*Axiom 1, 2* を満たす唯一つの $\Phi(\nu)$ 上の解である．

この定理により，重心解が公理化された．

最後に，次の定理が得られた．

Theorem 5 任意の不完備ゲーム ν を考える．このとき，最大不満最小化解 $\hat{\phi}^{\alpha}(\nu)$ は，*Axiom 1* を満たす．

これにより，重心解，最大不満最小化解はともに ν-consistent symmetry を満たすことがわかる．

Example 1 プレイヤーの集合を $N = \{1,2,3,4\}$，値のわかっている提携の全体集合を

$$\mathcal{K} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$$

とする．そして，不完備ゲーム $\nu : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
&\nu(\{1\}) = 8,\ \nu(\{2\}) = 7,\ \nu(\{3\}) = 3,\\
&\nu(\{4\}) = 1,\\
&\nu(\{1,2\}) = 20,\ \nu(\{1,3\}) = 16, \nu(\{2,3\}) = 11,\\
&\nu(\{1,2,3\}) = 29, \nu(\{1,2,3,4\}) = 40.
\end{aligned}$$

式 *(7)*, *(8)* を用いると，下限ゲーム $\underline{\nu}$ と上限ゲーム $\overline{\nu}$ が次のように得られる．

$$\begin{aligned}
&\underline{\nu}(\{1\}) = 8,\ \underline{\nu}(\{2\}) = 7,\ \underline{\nu}(\{3\}) = 3,\ \underline{\nu}(\{4\}) = 1,\\
&\underline{\nu}(\{1,2,3,4\}) = 40,\\
&\underline{\nu}(\{1,2\}) = 20,\ \underline{\nu}(\{1,3\}) = 16,\\
&\underline{\nu}(\{2,3\}) = 11,\ \underline{\nu}(\{1,2,3\}) = 29,\\
&\underline{\nu}(\{1,4\}) = 9,\ \underline{\nu}(\{2,4\}) = 8,\ \underline{\nu}(\{3,4\}) = 4,\\
&\underline{\nu}(\{1,2,4\}) = 21,\ \underline{\nu}(\{1,3,4\}) = 17,\ \underline{\nu}(\{2,3,4\}) = 12.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\nu}(\{1\}) = 8,\ \overline{\nu}(\{2\}) = 7,\ \overline{\nu}(\{3\}) = 3,\ \overline{\nu}(\{4\}) = 1,\\
&\overline{\nu}(\{1,2,3,4\}) = 40,\\
&\overline{\nu}(\{1,2\}) = 20,\ \overline{\nu}(\{1,3\}) = 16,\\
&\overline{\nu}(\{2,3\}) = 11,\ \overline{\nu}(\{1,2,3\}) = 29,\\
&\overline{\nu}(\{1,4\}) = 29,\ \overline{\nu}(\{2,4\}) = 24,\ \overline{\nu}(\{3,4\}) = 20,\\
&\overline{\nu}(\{1,2,4\}) = 37,\ \overline{\nu}(\{1,3,4\}) = 33,\ \overline{\nu}(\{2,3,4\}) = 32.
\end{aligned}$$

これより，各 v^T に対する *Shapley* 値と重心 *Shapley* 値を計算すると，*Table 1* のようになる．さらに，*Theorem 3* より，最大不満最小化 *Shapley* 値 $\hat{\phi}^{\alpha}(\nu)$ を計算すると，以下のようになる．

$$\hat{\phi}^{\alpha}(\nu) = (14.11, 11.51, 7.51, 6.85)$$

ここで，$\alpha = 0.38$ である．

6　結論と今後の課題

本研究では，提携値が不明な提携の全体集合が一般の場合の，不完備情報協力ゲームとその Shapley 値についての考察を行った．具体的には，少なくとも全体提携および個人提携の提携値が既知である，提携値が未知の提携の全体集合が任意であるような，不完備ゲームとその Shapley 値の考察を行った．

まず，一般の不完備ゲームから得られうるすべての Shapley 値の集合が凸多面体となることを示し，その端点を全て示した．さらに，得られうる全ての Shapley 値の集合の中から，唯一つの Shapley 値を選定する方法を提案し，選定した解の公理化を行った．

今後の課題としては，一般の不完備ゲームにおける仁およびコアに関する考察が挙げられる．

Table. 1: 提携の族 $\mathcal{T}$, 各プレイヤーの Shapley 値 $\phi(v^{\mathcal{T}})$ と重心 Shapley 値 $\check{\phi}(\nu)$

$\mathcal{T}$	$\phi_1(v^{\mathcal{T}})$	$\phi_2(v^{\mathcal{T}})$	$\phi_3(v^{\mathcal{T}})$	$\phi_4(v^{\mathcal{T}})$
{1,2,3,4}	15.5	12.5	8.5	3.5
{1,2,4}	16.83	13.83	4.5	4.83
{1,3,4}	16.83	8.5	9.83	4.83
{2,3,4}	10.5	14.16	10.16	5.16
{1,2,4}, {1,3,4}	18.16	9.83	5.83	6.16
{1,2,4}, {2,3,4}	11.83	15.5	6.16	6.5
{1,3,4}, {2,3,4}	11.83	10.16	11.5	6.5
{1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}	13.16	11.5	7.5	7.83
{1,4}	19.83	8.16	4.16	7.83
{2,4}	10.5	16.83	4.83	7.83
{3,4}	10.5	8.83	12.83	7.83
{1,4}, {2,4}	13.5	11.16	4.5	10.83
{1,4}, {3,4}	13.5	8.5	7.16	10.83
{2,4}, {3,4}	10.5	11.5	7.5	10.5
{1,4}, {2,4},{3,4}	12.16	9.83	5.83	12.16
{1,4}, {2,3,4}	14.83	9.83	5.83	9.5
{2,4}, {1,3,4}	11.83	12.83	6.16	9.16
{3,4}, {1,2,4}	11.83	10.16	8.83	9.16
重心 Shapley 値 $\check{\phi}(\nu)$	13.53	11.31	7.31	7.83

References

[1] D. Housman. Linear and symmetric allocation methods for partially defined cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 30:377–404, 2001.

[2] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.

[3] L.S. Shapley. A value for n-person games. In H. Kuhn and A. Tucker, editors, *Contributions to the theory of games II*, pages 307–317. Princeton, 1953.

[4] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944.

[5] S.J. Willson. A value for partially defined cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 21:371–384, 1993.

[6] 桝屋・乾口. 不完備情報の下での協力ゲームの基礎的考察. **知能と情報**, 24:601–615, 2012.

[7] 桝屋聡. 大きな提携の提携値が不明な協力ゲームの Shapley 値の公理化. **京都大学数理解析研究所講究録**, 1939:35–44, 2015.