数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 113-120

幾何ランダムウォーク上のアメリカン・プット・オプションに対する最適多数回停止問題

大石 潤 *[1], 穴太 克則 *[2]
*[1]: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門
*[2]: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科
Jun Oishi*[1], Katsunori Ano*[2]
*[1]: Graduate School of Engineering and Science, Shibaura Institute of Technology
*[2]: Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology

概要： 幾何ランダムウォーク上の多数回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの最適複数回停止問題の最適停止時刻を, 最適値関数の解析により解く. このアプローチは, マルコフ過程上の最適停止問題の一般理論を用いていない.

1. 幾何ランダムウォーク上のアメリカン・プット・オプション

株価の変動過程 S_n を,

$$S_n := S_0 \lambda^{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n} \tag{1}$$

とする. ここで, $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\rho_i = b) = p, \mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = \mathbb{P}(\rho_i = a) = q$ であり, $\lambda > 1, a = 1/\lambda - 1, b = \lambda - 1$ である. また, $S_0 \in E := \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \cdots\}$ とすると, $S_n \in E, n \geq 1$ である. この株価変動過程 S_n は E 上の幾何ランダムウォークである. このとき, 無裁定かつ完備であり, リスク中立測度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ が存在することが知られており, 以下となる (参考 [5]).

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\epsilon_i = 1) = \widetilde{\mathbb{P}}(\rho_i = b) = \frac{r-a}{b-a} =: p, \quad \widetilde{\mathbb{P}}(\epsilon_i = -1) = \widetilde{\mathbb{P}}(\rho_i = 1) = \frac{b-r}{b-a} =: q. \tag{2}$$

$$p = \frac{r - (\lambda^{-1} - 1)}{\lambda - 1 - (\lambda^{-1} - 1)} = \frac{(1+r) - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\alpha^{-1} - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \tag{3}$$

$$q = \frac{\lambda - 1 - r}{\lambda - 1 - (\lambda^{-1} - 1)} = \frac{\lambda - (1+r)}{\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\lambda - \alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}. \tag{4}$$

ただし, $\alpha = (1+r)^{-1}$ である.

原資産価格が幾何ランダムウォーク S_n に従うアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を考える. ここでは「権利行使」のことを「停止」と呼ぶこととする. $V_n^{[1]}(x)$ はオプションの満期時刻 N までの残り期間 n 期で, その時点での原資産価格が x であるときの最大期待利得とする.

すなわち,

$$V_n^{[1]}(x) = \sup_{0\le\tau\le n} \widetilde{\mathbb{E}}_x\left[\alpha^\tau (K - S_\tau)^+\right], \quad n = N, N-1, \cdots, 0. \tag{5}$$

ただし, $0 < \alpha < 1$, $K > 0$ は権利行使価格である. このとき, 以下の最適方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned} V_n^{[1]}(x) &= \max\left\{(K-x)^+, \alpha\widetilde{\mathbb{E}}_x\left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1})\right]\right\} \\ &= \max\left\{(K-x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\right\}, \quad n = N, N-1, \cdots, 1. \end{aligned} \tag{6}$$

$$V_0^{[1]}(x) = (K-x)^+. \tag{7}$$

定理 1.1 最適停止時刻 $\tau^{[1]*}$ は,

$$\tau^{[1]*} := \inf\{n \in \{0, 1, \cdots, N\} : S_n \le x_n^{[1]*}\}. \tag{8}$$

ここで, $x_n^{[1]*} := \inf\{x \in E : V_n^{[1]}(x) = (K-x)^+\}$ であり, $K =: x_0^{[1]*} \ge x_1^{[1]*} \ge \cdots \ge x_N^{[1]*} \ge 0$.

インデックスを入れ替えて, $y_n^{[1]*} = x_{N-n}^{[1]*}$ とする. このとき,

$$0 \le y_0^{[1]*} \le \cdots \le y_N^{[1]*} = K. \tag{9}$$

最適停止領域 $D^{[1]}$ は次であり, 図 1 のようになる.

$$D^{[1]} = \{(n, y) \in \{0, 1, \cdots, N\} \times E : y \le y_n^{[1]*}\}. \tag{10}$$

すなわち, 原資産価格が最適停止領域 $D^{[1]}$ 内に初めて到達した時刻が最適停止時刻となる.

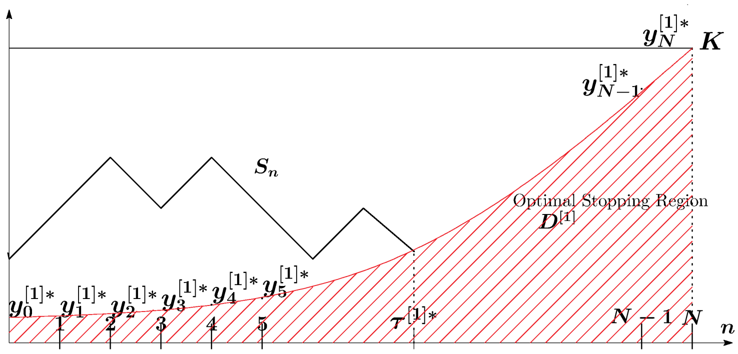

図 1: 最適停止領域 $D^{[1]}$

定理 1.1 を証明するため, 最適値関数 $V_n^{[1]}(x)$ の性質を調べる.

補題 1.1

(i) $x \longmapsto V_n^{[1]}(x)$ は連続, 非増加, convex.

(ii) $n \longmapsto V_n^{[1]}(x)$ は増加で, $V_0^{[1]}(x) \ge 0$.

(証明) (i) n に対する帰納法によって示す.

(a) $n=0$ のとき, $V_0^{[1]}(x)=(K-x)^+$ は, 明らかに x について連続, 非増加, convex である.

(b) $n-1$ のとき, $V_{n-1}^{[1]}(x)$ は x について連続, 非増加, convex であると仮定する.

最適方程式より,

$$V_n^{[1]}(x)=\max\{(K-x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)+\alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\}. \tag{11}$$

$(K-x)^+$ は (a) より連続, 非増加, convex であり, $\alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)+\alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)$ は仮定より連続, 非増加, convex である. 2つの連続関数の max は連続, 非増加, convex であるため, $V_n^{[1]}(x)$ は x について連続, 非増加, convex.

$(a),(b)$ より $V_n^{[1]}(x)$ は x について連続, 非増加, convex.

(ii) (7) 式より, $V_0^{[1]}(x)\geq 0$. また, (5) 式より,

$$V_n^{[1]}(x)=\sup_{0\leq\tau\leq n}\mathbb{E}_x\left[\alpha^\tau(K-S_\tau)^+\right]\leq\sup_{0\leq\tau\leq n+1}\mathbb{E}_x\left[\alpha^\tau(K-S_\tau)^+\right]=V_{n+1}^{[1]}(x). \tag{12}$$

よって, $V_n^{[1]}(x)$ は n について増加である. □

補題 1.2 各 $n=N,N-1,\cdots,0$ に対して,

$$\lim_{x\downarrow 0}V_n^{[1]}(x)=K. \tag{13}$$

(証明) n についての帰納法によって示す. $\lim_{x\downarrow 0}V_n^{[1]}(x)=V_n^{[1]}(0+)$ とする.

(a) $n=0$ のとき, $K>0$ だから, $V_0^{[1]}(0+)=(K-0+)^+=K$.

(b) $n-1$ のとき $V_{n-1}^{[1]}(0+)=K$ と仮定する. 最適方程式より,

$$\begin{aligned}V_n^{[1]}(x)&=\max\{(K-0+)^+,\alpha\left(pV_{n-1}^{[1]}(0+)+qV_{n-1}^{[1]}(0+)\right)\}\\&=\max\{K,\alpha(p+q)K\}=\max\{K,\alpha K\}=K.\end{aligned} \tag{14}$$

$(a),(b)$ より $V_n^{[1]}(0+)=K$. □

以上の補題を用いて, 定理 1.1 を証明する.

(定理 1.1 の証明) まず, $n\geq 0$ を固定する. 最適方程式より, $V_n^{[1]}(x)\geq(K-x)^+$. 更に, 補題 1.1(i), 補題 1.2 より $x_n^{[1]*}$ が存在し(図 2 参照), τ^* は最適停止時刻となる. また, 補題 1.1(ii) より, $V_n^{[1]}(x)>V_{n-1}^{[1]}(x)$ なので, $x_n^*\geq x_{n-1}^*$ となる (図 3 参照). □

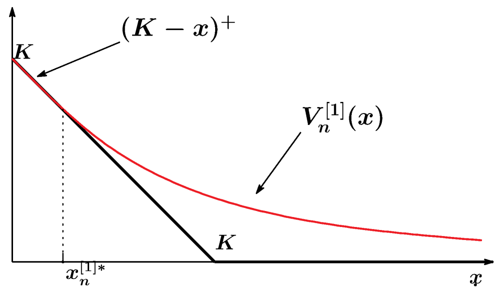

図 2: 閾値 $x_n^{[1]*}$

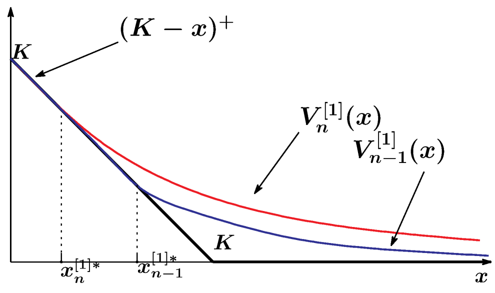

図 3: 閾値 $x_n^{[1]*}$, $x_{n-1}^{[1]*}$

2. 幾何ランダム・ウォーク上の多数回権利行使可能なアメリカン・プット・オプション

原資産価格が幾何ランダムウォークに従い，満期までに多数回権利行使が可能なアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を考える. $V_n^{[m]}(x)$ を満期 N までの残り期間が n で, 原資産価格が x, 残り権利行使回数が m 回であるときの最大期待利得とする. すなわち,

$$V_n^{[m]}(x) = \sup_{0\le\tau_1<\cdots<\tau_m\le n} \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha^{\tau_i} (K - S_{\tau_i})^+ \right], \quad n = N, N-1, \cdots, 0. \tag{15}$$

ただし, $0 < \alpha < 1, K > 0$ で, i 度目の権利行使時刻を τ_i とする. このとき, 最適方程式は, $V_0^{[m]}(x) = (K-x)^+$ であり, $n = N, \cdots, 1$ に対しては以下である.

$$V_n^{[m]}(x) = \max\{(K-x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[m-1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[m-1]}(\lambda^{-1}x), \alpha p V_{n-1}^{[m]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[m]}(\lambda^{-1}x)\}. \tag{16}$$

次を定義する.

$$\Delta V_n^{[m]}(x) := V_n^{[m]}(x) - V_n^{[m-1]}(x), \quad f_n^{[m]}(x) := \alpha \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[\Delta V_{n-1}^{[m]}(S_{n-1}) \right]. \tag{17}$$

定理 2.1 残り m 回権利行使可能なときの最適停止時刻 $\tau^{[m]*}$ は,

$$\tau^{[m]*} := \inf\{n \in \{0,1,\cdots,N\} : S_n \le x_n^{[m]*}\}. \tag{18}$$

ここで, $x_n^{[m]*} := \inf\{x \in E : V_n^{[m]}(x) = (K-x)^+\}$ であり, $K =: x_0^{[m]*} \ge x_1^{[m]*} \ge \cdots \ge x_N^{[m]*} \ge 0$.

インデックスを入れ替えて, $y_n^{[m]*} = x_{N-n}^{[m]*}$ とする. このとき,

$$0 \le y_0^{[m]*} \le \cdots \le y_N^{[m]*} = K. \tag{19}$$

残り m 回権利行使可能なときの最適停止領域 $D^{[m]}$ は,

$$D^{[m]} = \{(n,y) \in \{0,1,\cdots,N\} \times E : y \le y_n^{[m]*}\}, \tag{20}$$

である(図4参照). すなわち, 原資産価格が最適停止領域 $D^{[m]}$ 内に初めて到達した時刻が1回目の最適停止時刻となる.

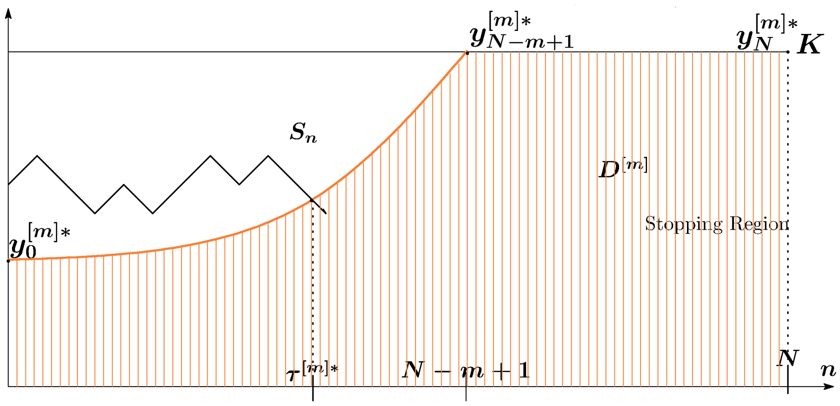

図 4: 最適停止領域 $D^{[m]}$

最適停止問題を解くため, 最適値関数 $V_n^{[m]}(x)$ とその差分 $\Delta V_n^{[m]}(x)$ の性質を調べる.

予想 2.1
(i) $x \longmapsto \Delta V_n^{[m]}(x)$ は連続, 非増加, convex.
(ii) $\Delta V_n^{[m]}(x) \geq 0$.

(証明) $m=2$ のときは以下のように証明できる. しかしまだ, $m=3,4,\cdots$ に対しては証明できていない.

(i) n についての帰納法によって示す.

(a) $n=0$ のとき,

$$\Delta V_0^{[2]}(x) = V_0^{[2]}(x) - V_0^{[1]}(x) = (K-x)^+ - (K-x)^+ = 0. \tag{21}$$

定数0は連続で非増加, convex な関数といえる.

(b) $n-1$ のとき, $\Delta V_n^{[2]}(x)$ は, x について連続, 非増加, convex と仮定する.
このとき,

$$\begin{aligned}\Delta V_n^{[2]}(x) &= V_n^{[1]}(x) - V_n^{[1]}(x)\\ &= \max\{(K-x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x)\}\\ &\quad - \max\{(K-x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\}.\end{aligned} \tag{22}$$

ここで, 便宜上,

$$A := (K-x)^+, \ B := \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \ C := \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x), \tag{23}$$

とすると, (22) 式は,

$$\Delta V_n^{[2]}(x) = \max\{A+B, C\} - \max\{A, B\} \tag{24}$$

$$= \begin{cases} (\text{ア})\ A+B-A & = B = \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \\ (\text{イ})\ A+B-B & = A = (K-x)^+, \\ (\text{ウ})\ C-A, & \\ (\text{エ})\ C-B & = \alpha p \left(V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)\right) + \alpha q \left(V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\right) \\ & = \alpha p \Delta V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q \Delta V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x), \end{cases} \tag{25}$$

となる. (ア), (イ) は補題 1.1(i) より連続, 非増加, convex であり, (エ) は仮定より連続, 非増加, convex である. また, (ウ) となる場合は存在しない (参考 [3]).

$(a), (b)$ より $\Delta V_n^{[2]}(x)$ は連続, 非増加, convex.

(ii) $n=0$ のとき, (21) 式より $\Delta V_0^{[2]}(x) = 0$. また, $n>0$ のとき, $\Delta V_n^{[2]}(x) \geq 0$. □

補題 2.1

$$\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[m]}(x) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i\right) K, \quad m \leq n, \tag{26}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[m]}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i\right) K, \quad m > n. \tag{27}$$

(証明) m, n についての帰納法によって示す.

(a) $m=1$ のとき, 補題 1.2 より成立する.

(b) $m=k-1$ で

$$\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[k-1]}(x) = \left(\sum_{i=0}^{k-2} \alpha^i\right) K, k-1 \leq n \tag{28}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[k-1]}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i\right) K, k-1 > n \tag{29}$$

が成立すると仮定する.

(1) $m=k, n=0$ のとき,

$$V_0^{[m]}(0+) = (K-0+)^+ = K. \tag{30}$$

(2) $m=k$ で $n=l-1\geq k$ のとき命題が成立すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
V_l^{[k]}(0+) &= \max\{(K-0+)^+ + \alpha p V_{l-1}^{[k-1]}(0+) + \alpha q V_{l-1}^{[k-1]}(0+), \alpha p V_{l-1}^{[k]}(0+) + \alpha q V_{l-1}^{[k]}(0+)\} \\
&= \max\{K + \alpha\left(V_{l-1}^{[k-1]}(0+)\right), \alpha\left(V_{l-1}^{[k]}(0+)\right)\} \\
&= \max\{K + \alpha\left(\sum_{i=0}^{k-2}\alpha^i\right)K, \alpha\left(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)K\} \\
&= \max\{\left(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)K, \alpha\left(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)K\} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i\right)K.
\end{aligned}$$

(3) $m=k$ で $n=l-1, l\leq k$ のとき命題が成立すると仮定する．このとき，(2) と同様の手法により，

$$V_l^{[k]}(0+) = \left(\sum_{i=0}^{l-1}\alpha^i\right)K.$$

(1), (2), (3) より $m=k$ のとき成立し，$(a), (b)$ より補題が示された． □

予想 2.2　$n \longmapsto \Delta V_n^{[m]}(x)$ は増加．

以上の補題と予想が成立するという条件のもとで，定理 2.1 を証明する．

(定理 2.1 の証明)　まず，n を固定する．定義より，$f_n^{[m]}(x)$ は，

$$f_n^{[m]}(x) := \alpha\widetilde{\mathbb{E}}_x\left[\Delta V_{n-1}^{[m]}(S_{n-1})\right] = \alpha\{p(V_{n-1}^{[m]}(\lambda x) - V_{n-1}^{[m-1]}(\lambda x)) + q(V_{n-1}^{[m]}(\lambda^{-1}x) - V_{n-1}^{[m-1]}(\lambda^{-1}x))\}.$$

このとき，補題 2.1 より，

$$\lim_{x\downarrow 0} f_n^{[m]}(x) = \alpha^m K. \tag{31}$$

予想 2.1(i), (31) 式より $x_n^{[m]*}$ が存在し (図 5 参照), $\tau^{[m]*}$ は最適停止時刻となる．更に，予想 2.2 より，全ての n について $x_{n+1}^{[m]*} \leq x_n^{[m]*}$(図 6 参照). □

多数回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションのそれぞれの最適停止領域の関係の一例を表したものが図 7 である．すなわち，1 回目の最適停止時刻は S_n が最適停止領域 $D^{[3]}$ 内に初めて到達した時刻であり，2 回目の最適停止時刻は $D^{[2]}$，3 回目の最適停止時刻は $D^{[1]}$ 内に初めて到達した時刻となる．

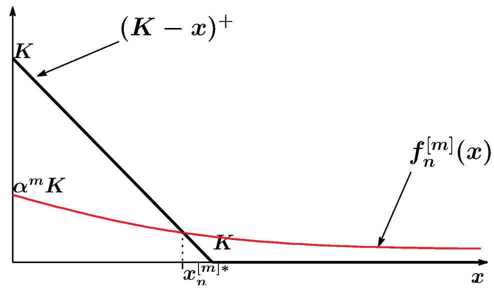

図 5: 閾値 $x_n^{[m]*}$

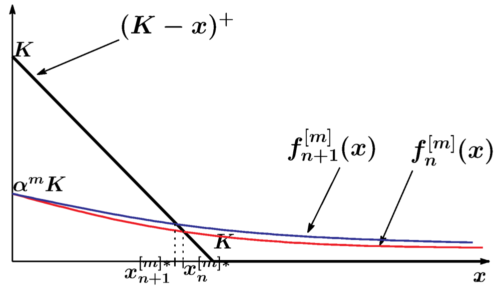

図 6: 閾値 $x_n^{[m]}$ と $x_{n+1}^{[m]}$ の順序

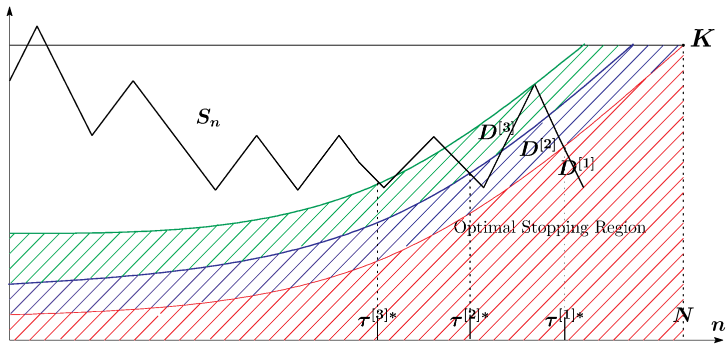

図 7: 最適停止領域 $D^{[1]}$, $D^{[2]}$, $D^{[3]}$

参考文献

[1] 穴太克則, (2000), "タイミングの数理—最適停止問題", 朝倉書店.

[2] 穴太克則, (2014), "講義ノート: 数理ファイナンス", 芝浦工業大学大学院理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門.

[3] 大石 潤, 笛吹 祐希, 穴太 克則, "幾何ランダムウォーク上のアメリカン・ダブルエキササイズ・プット・オプションに対する値関数の解析によるアプローチ", (2015), 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1939, pp.95-103.

[4] N. Meinshausen and B. M. Hambly, (2004), "Monte Carlo Methods for the Valuation of Multiple-Exercise Options", *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 4, 557-583.

[5] G. Peskir and A. N. Shiryaev, (2006), *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Birkhauser.

[6] A. N. Shiryaev, (1978), *Optimal Stopping Rules*, Springer.

[7] A. N. Shiryaev, (1999), *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific Publishing.