数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 121-127

一様分布に従う試行回数を持つ多数回停止オッズ問題

來島 愛子 [*1], 穴太 克則 [*2]
[*1]：上智大学 経済学部 経済学科
[*2]：芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科
Aiko Kurushima[*1], Katsunori Ano[*2]
[*1]：Faculty of Economics, Sophia University
[*2]：Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology

1 はじめに

本稿において確率最大化最適停止問題の一つである“オッズ問題”について拡張を考える．元の問題は Bruss [4] で紹介され，解かれている．この問題はベルヌーイ試行における「最後の成功」を選択する確率を最大化する問題であり，さまざまな秘書問題や集団面接問題のような問題に拡張されている．Ano *et al.* [3] では多数回停止可能問題へ拡張され，“オッズ型”とよばれる最適停止規則が求められている．

今回, Bruss [4] の拡張として試行回数が確率変数 N である場合について考える．オッズ問題の特別な場合としてみなされる古典的秘書問題については Presman and Sonin [11] で解かれており, Ano [1] はこれを多数回停止問題に拡張している．本稿では一般の分布の場合の多数回最適停止規則を紹介し，さらに一様分布に従っている場合について述べる．多数回最適停止問題は Kurushima and Ano [10] で詳しく解かれている．

今回扱う問題の設定は以下のとおりである．試行回数 N は確率変数であり，分布が既知であるとする．X_1, $X_2, \ldots, X_N$ を独立な 0/1 確率変数とする．X_i を逐次的に観測し，$X_i=1$ のとき i 番目の試行が成功であるとよぶ．p_i を i 番目の試行が成功する確率，すなわち $P(X_i=1)=p_i$ とする．$q_i=1-p_i$ とし，“オッズ”を $r_i=p_i/q_i$ とおく．ここで，$0<q_i<1$ を仮定する．本問題の目的は最後の成功を選択する確率を最大にすることである．

試行回数が確率変数である場合にオッズを含む最適停止規則についてその確率分布の満たすべき十分条件を示す．例えば，一様分布は成功の確率が試行回数について増加しない場合，この条件を満たしている．単調な停止規則（one-step look-ahead 停止規則ともよばれる）が最適である条件を示すことにより Ano [1] や Ano and Ando [2] と同様の方法に基いて解かれている．単調停止問題について詳細は Chow *et al.* [7] あるいは Ferguson [8] を参照のこと．

2 1回停止可能問題

$X_i,\ i=1,2,\ldots,N$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に定義された独立な 0/1 確率変数とする．観測（試行）の回数 N は確率変数，その確率分布が $P(N=k)=\delta_k,\ k=0,1,2,\ldots$ であるとする．ここで，確率変数 X_i を逐次的に観測し，$X_i=1$ であるとき i 番目の観測が成功であるという．目的は最後の成功を選択する確率を最大にする規則を求めることである．$\mathcal{N}=\{1,2,\ldots\}$ とし，$i\in\mathcal{N}$ に対して i 番目の試行が成功である確率

を $p_i = P(X_i = 1)$, 失敗である確率を $q_i = 1 - p_i = P(X_i = 0)$ とする. さらに, i 番目の試行のオッズを $r_i = p_i/q_i$ で表す.

V_i を $X_i = 1$ を観測し, この成功を選択したときの勝つ（最後の成功を選択する事象の）条件付最大確率, W_i を $X_i = 1$ を観測し, この成功を選択しなかったときの勝つ条件付最大確率, M_i を $X_i = 1$ を観測し, この成功を選択するかどうかを決める条件のもとでの勝つ最大確率, とすると, 最適方程式は $M_i = \max\{V_i, W_i\}$ で表される. 確率変数 N が $\{1, 2, \ldots, N_0\}$ の値をとり, 最後の N_0 回目の試行で成功するときは勝ちとする. したがって, 境界条件は $N_0 < \infty$ に対して $M_{N_0} = V_{N_0} = 1$, $W_{N_0} = 0$ である. また, $M_\infty = V_\infty = W_\infty = 0$ とおく. $k = 1, 2, \ldots$ に対して $\delta_k = P(N = k)$ と定義し, $\pi_0 = 1$, $\pi_k = \sum_{s \geq k} \delta_s = P(N \geq k)$ とする. 条件付最大確率 V_i と W_i は次のようにして得られる.

$$\begin{aligned} V_i &= \sum_{k \geq i} P(X_{i+1} = X_{i+2} = \cdots = X_k = 0 | X_i = 1) P(N = k | N \geq i) \\ &= \delta_i + \sum_{k \geq i+1} \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) \frac{\delta_k}{\pi_i} = \sum_{k \geq i} \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) \frac{\delta_k}{\pi_i} \end{aligned}$$

ここで, $\prod_{j=i+1}^{i} q_j \equiv 1$ であり, $\sum_{j=i+1}^{i} q_j \equiv 0$ とする.

$$\begin{aligned} W_i &= \sum_{k \geq i+1} P(X_{i+1} = \cdots = X_{k-1} = 0, X_k = 1 | X_i = 1) M_k P(N \geq k | N \geq i) \\ &= \sum_{k \geq i+1} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} q_j \right) p_k M_k \frac{\pi_k}{\pi_i} \end{aligned}$$

1 回停止可能問題に対する単調停止領域は $B \equiv \{i \in \mathcal{N} : G_i > 0\}$ で与えられ, G_i は

$$\begin{aligned} G_i &\equiv V_i - \sum_{k \geq i+1} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} q_j \right) p_k V_k \frac{\pi_k}{\pi_i} \\ &= \frac{1}{\pi_i} \sum_{k \geq i} \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) \left\{ \delta_k - r_{k+1} \sum_{j \geq k+1} \delta_j \left(\prod_{\ell=k+1}^{j} q_\ell \right) \right\} \end{aligned}$$

で与えられる.

$$d_k \equiv \delta_k - r_{k+1} \sum_{j \geq k+1} \delta_j \left(\prod_{\ell=k+1}^{j} q_\ell \right) \tag{1}$$

とおくと, G_i は

$$G_i = \frac{1}{\pi_i} \sum_{k \geq i} \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) d_k \tag{2}$$

と書きかえられる.

d_k が次の条件（$(\star)$ とよぶ）を満たすと仮定する.

$$(\star) \quad d_k > 0 \Longrightarrow d_{k+j} > 0, \; j = 1, 2, \ldots$$

条件 $(\star)$ の下で, 最適性の十分条件 "$G_i > 0 \Longrightarrow G_{i+j} > 0$, $j = 1, 2, \ldots$" を示す. これは Chow *et al.* [7] の意味で問題が単調であるための条件である.

$d_k > 0$ を満たすある k が存在することを確認する.

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k - \sum_{k=0}^{\infty} r_{k+1} \sum_{j \geq k+1} \delta_j \left(\prod_{\ell=k+1}^{j} q_\ell \right)$$

であり, ここで各 δ_k に対して係数 c_k とおくと,

$$c_k = p_1 q_2 \cdots q_k + p_2 q_3 \cdots q_k + \cdots + p_k = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\prod_{\ell=j+1}^{k} q_\ell \right)$$

は $0 \leq c_k \leq 1$ を満たす. ゆえに, $\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_k > 0$ であり, ある k に対して d_k は正である.

試行回数が 1 と既知の N_0 の間の一様分布 $U[1, N_0]$ に従うと仮定する. このとき, $\delta_k = 1/N_0$ かつ $\pi_k = (N_0 - k + 1)/N_0$ となり, d_k は

$$d_k = \frac{1}{N_0} \left\{ 1 - r_{k+1} \sum_{j=k+1}^{N_0} \left(\prod_{\ell=k+1}^{j} q_\ell \right) \right\}$$

で与えられる. 和 $\sum_{j=k+1}^{N_0} \left(\prod_{\ell=k+1}^{j} q_\ell \right)$ が k について減少するので, 条件 $(\star)$ はオッズ r_k が k について増加しないとき明らかに満たされる. 例えば, 古典的秘書問題ではオッズは $r_k = 1/(k-1)$ で与えられ, これは k について増加しない.

条件 $(\star)$ の下で, $G_i > 0$ のとき, $G_{i+1} > 0$ が成り立つことを示す.

$$G_{i+1} = \frac{1}{\pi_{i+1}} \sum_{k \geq i+1} \left(\prod_{j=i+2}^{k} q_j \right) d_k = \frac{\pi_i}{\pi_{i+1}} \frac{1}{q_{i+1}} G_i - \frac{1}{\pi_{i+1}} \left(\prod_{j=i+2}^{i} q_j \right) d_i$$

であるので, $\prod_{j=i+2}^{i} q_j \equiv 1$ とすると, 上の命題は簡単に示される. 最終的に, 次の定理を得る.

定理 1. d_k が条件 $(\star)$ を満たすと仮定すると, 各 $j = 1, 2, \ldots$ に対して $d_k \geq 0 \Longrightarrow d_{k+j} \geq 0$ このとき, 単調停止領域 B は最適である. *1* 回停止可能な場合の最適停止時刻は

$$\begin{aligned} \tau_*^{(1)} &= \min\{i \in \mathcal{N} : G_i^{(1)} > 0 \ \& \ X_i = 1\} \\ &= \min\left\{ i \in \mathcal{N} : \frac{\sum_{k>i} r_{k+1} \sum_{j \geq k+1} \delta_j \left(\prod_{\ell=i+1}^{j} q_\ell \right)}{\sum_{k>i} \delta_k \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right)} < 1 \ \& \ X_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

で与えられる.

3 多数回停止可能問題

前節と同様に, 次の確率を定義する. $V_i^{(m)}$ を $X_i = 1$ を観測し m 回の機会が残っているとき, この成功を選択した場合に勝つ条件付最大確率, $W_i^{(m)}$ を $X_i = 1$ を観測し m 回の機会が残っているとき, この成功を選択しなかった場合に勝つ条件付最大確率, さらに M_i を $X_i = 1$ を観測し m 回の機会が残っているとき, この成功を選択するかどうかを決める条件のもとでの勝つ最大確率, とすると, 最適方程式は $M_i^{(m)} = \max\{V_i^{(m)}, W_i^{(m)}\}$ で与えられる.

このとき, m 回停止可能最適停止問題について次の主定理が m に関する帰納法によって示される.

定理 2. d_i に関する条件 $(\star)$ の下で, ℓ 回の選択の機会がある場合の最適停止時刻は各 $\ell = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\tau_*^{(\ell)} = \min\{i \in \mathcal{N} : G_i^{(\ell)} \geq 0 \ \&\ X_i = 1\}$ である.

証明. 整数 $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $V_i^{(\ell)}$ と $W_i^{(\ell)}$ は

$$\begin{aligned} V_i^{(\ell)} &= V_i^{(\ell-1)} + W_i^{(\ell-1)}, \\ W_i^{(\ell)} &= \sum_{k \geq i+1} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} q_j \right) p_k M_k^{(\ell)} P(N \geq k | N \geq i) \end{aligned}$$

で得られる.

単調停止領域は $B^{(\ell)} \equiv \{i \in \mathcal{N} : G_i^{(\ell)} > 0\}$ で与えられる. ここで, $B^{(\ell)}$ を特徴づける $G_i^{(\ell)}$ は

$$G_i^{(\ell)} = G_i^{(\ell-1)} + \sum_{k \geq i+1} r_k \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) \left(M_k^{(\ell-1)} - W_k^{(\ell-1)} \right) \frac{\pi_k}{\pi_i}. \tag{3}$$

まず, $\ell = 2$ のとき $a \vee b = \max\{a, b\}$ とすると,

$$G_i^{(2)} = G_i^{(1)} + \sum_{k \geq (i+1) \vee i_*^{(1)}} r_k \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) G_k^{(1)} \frac{\pi_k}{\pi_i} \tag{4}$$

であり, すべての $k \geq (i+1) \vee i_*^{(1)}$ に対して $G_k^{(1)} > 0$ より, 右辺第 2 項は非負であるのですべての i に対して $G_i^{(2)} \geq G_i^{(1)}$ である. よって, $i \geq i_*^{(1)}$ に対して $G_i^{(2)} > 0$ が成り立つ. 次に $i \in \{1, 2, \ldots, i_*^{(1)} - 1\}$ に対して, $G_i^{(2)} > 0$ ならば各 $\ell = 1, 2, \ldots, i_*^{(1)} - 1$ について $G_{i+\ell}^{(2)} > 0$ である. $i \in \{1, 2, \ldots, i_*^{(1)} - 1\}$ に対して

$$G_i^{(2)} = \sum_{j \geq i} \frac{1}{\pi_i} \left(\prod_{k=i+1}^{j} q_k \right) d_j + \sum_{k \geq i_*^{(1)}} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} q_j \right) p_k G_k^{(1)} \frac{\pi_k}{\pi_i}$$

右辺第 2 項は正の定数であるので, 条件 $(\star)$ が成り立つとき各 $\ell = 1, 2, \ldots, i_*^{(1)} - 1$ に対して $G_i^{(2)} > 0$ であれば $G_{i+\ell}^{(2)} > 0$ が成り立つ. したがって, 2 回停止可能な問題について単調であることが示された.

次に, 帰納法の仮定として条件 $(\star)$ の下で, 各 $\ell = 1, 2, \ldots, m-1$ に対して

$(A1)$ すべての i に対して, $G_i^{(\ell)} \geq G_i^{(\ell-1)}$

$(A2)$ $j = 1, 2, \ldots$ に対して, $G_i^{(\ell)} > 0 \Longrightarrow G_{i+j}^{(\ell)} > 0$

を考える. $\ell = m$ のとき, 上の条件が成り立つことを示す. $i_*^{(m-1)} = \min\{i \in \mathcal{N} : G_i^{(m-1)} > 0\}$ とおくと, 帰納法の仮定から $M_k^{(m-1)} = V_k^{(m-1)}$ for $k \geq i_*^{(m-1)}$ かつ $M_k^{(m-1)} = W_k^{(m-1)}$ for $k < i_*^{(m-1)}$, すなわち, $k < i_*^{(m-1)}$ に対して

$$M_k^{(m-1)} - W_k^{(m-1)} = \begin{cases} V_k^{(m-1)} - W_k^{(m-1)}, & k \geq i_*^{(m-1)} \text{ のとき}, \\ 0, & k < i_*^{(m-1)} \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ. (3) にこの関係式を代入して,

$$G_i^{(m)} = G_i^{(m-1)} + \sum_{k \geq (i+1) \vee i_*^{(m-1)}} r_k \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right) G_k^{(m-1)} \frac{\pi_k}{\pi_i}. \tag{5}$$

$\ell=2$ のときと同様に, すべての $k \geq (i+1) \vee i_*^{(m-1)}$ に対して $G_k^{(m-1)} > 0$ より, 右辺第 2 項は非負であり, すべての i に対して $G_i^{(m)} \geq G_i^{(m-1)}$ が成り立つ. よって, $i \geq i_*^{(m-1)}$ のとき, $G_i^{(m)} > 0$ である. $i \in \{1,2,\ldots,i_*^{(m-1)}-1\}$ において $G_i^{(m)} > 0$ ならば各 $j=1,2,\ldots,i_*^{(m-1)}-1$ に対して $G_{i+j}^{(m)} > 0$ であることを示す. $i \in \{1,2,\ldots,i_*^{(m-1)}-1\}$ に対して

$$G_i^{(m)} = G_i^{(m-1)} + \sum_{k \geq i_*^{(m-1)}} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} q_j \right) p_k G_k^{(m-1)} \frac{\pi_k}{\pi_i}$$

と表され, 右辺第 2 項は正の定数である. したがって, 条件 $(\star)$ は満たされるならば, $G_i^{(m)} > 0$ のとき, 各 $j=1,2,\ldots,i_*^{(m-1)}-1$ について $G_{i+j}^{(m)} > 0$ が成り立つ. よって, 示された.

上の証明において, すべての $i=1,2,\ldots$, 各 $\ell=2,3,\cdots,m$ に対して $G_i^{(\ell)} \geq G_i^{(\ell-1)}$ を示した. それぞれの $\ell=1,2,\ldots,m$ について $i_*^{(\ell)} = \min\{i : G_i^{(\ell)} > 0\}$ とすれば, 次の補題が成立する.

補題 1. 条件 $(\star)$ の下で, $i_*^{(m)} \leq i_*^{(m-1)} \leq \cdots \leq i_*^{(1)}$.

条件 $(\star)$ の下で, $\ell=1,2,\ldots,m$ のときの最適停止時刻は $\tau_*^{(\ell)} = \min\{i : i \geq i_*^{(\ell)} \ \&\ X_i = 1\}$ で与えられる.

4 $m=1$ と 2 のときの勝つ最大確率

この節では, 1 回停止可能, 2 回停止可能な場合の最適停止規則の下での勝つ最大確率を求める.

まず, 1 回停止可能問題において, 最適停止規則の下での勝つ最大確率は $P^{(1)}(\text{win}) = P_N^{(1)}(p_1,\ldots,p_N)$ と計算される. X_i の独立性より最適停止規則に従うとき, $m=1,2$ に対して, $P^{(m)}(\text{win}) = W_{i_*^{(m)}-1}^{(m)}$ である. このとき,

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(\text{win}) &= \sum_{k \geq i_*^{(1)}} \left(\prod_{j=i_*^{(1)}}^{k-1} q_j \right) p_k M_k^{(1)} \frac{\pi_k}{\pi_{i_*^{(1)}-1}} \\
&= \sum_{k \geq i_*^{(1)}} \left(\prod_{j=i_*^{(1)}}^{k-1} q_j \right) p_k \left(\sum_{\ell \geq k} \left(\prod_{j=k+1}^{\ell} q_j \right) \frac{\delta_\ell}{\pi_k} \right) \frac{\pi_k}{\pi_{i_*^{(1)}-1}} \\
&= \sum_{k \geq i_*^{(1)}} \frac{1}{\pi_{i_*^{(1)}-1}} r_k \sum_{\ell \geq k} \left(\prod_{j=i_*^{(1)}}^{\ell} q_j \right) \delta_\ell, \qquad (6)
\end{aligned}$$

ここで, $j \geq i_*^{(1)}$ のとき $M_k^{(1)} = V_k^{(1)}$ から 2 番目の等号は成り立つ.

次に, 2 回停止可能問題における勝つ最大確率 $P^{(2)}(\text{win})$ も同様にして求められる.

$$\begin{aligned}
P^{(2)}(\text{win}) &= \sum_{k \geq i_*^{(2)}} \left(\prod_{j=i_*^{(2)}}^{k-1} q_j \right) p_k M_k^{(2)} \frac{\pi_k}{\pi_{i_*^{(2)}-1}} \\
&= \sum_{k \geq i_*^{(2)}} \left(\prod_{j=i_*^{(2)}}^{k-1} q_j \right) p_k \left(V_k^{(2)} + W_k^{(2)} \right) \frac{\pi_k}{\pi_{i_*^{(2)}-1}} \\
&= \sum_{k \geq i_*^{(2)}} \frac{1}{\pi_{i_*^{(2)}-1}} r_k \left\{ \sum_{\ell \geq k} \left(\prod_{j=i_*^{(2)}}^{\ell} q_j \right) \delta_\ell + \pi_k q_k W_k^{(1)} \right\} \qquad (7)
\end{aligned}$$

ここで, $j \geq i_*^{(2)}$ のとき $M_k^{(2)} = V_k^{(2)}$ から 2 番目の等号は成り立つ.

最適停止規則では $i_*^{(1)}$ より後の最初の成功を選択する必要があるので, $j \geq i_*^{(1)}$ について $M_k^{(1)} = V_k^{(1)}$ となる. このとき, $k \geq i_*^{(1)} - 1$ に対して

$$W_k^{(1)} = \sum_{j \geq k+1} \left(\prod_{\ell=k+1}^{j-1} q_\ell \right) p_j M_j^{(1)} \frac{\pi_j}{\pi_k} = \sum_{j \geq k+1} \frac{1}{\pi_k} r_j \sum_{m \geq j} \left(\prod_{\ell=k+1}^{m} q_\ell \right) \delta_m$$

が成立する. 一方, $j < i_*^{(1)} - 1$ のときは $W_j^{(1)} = W_{i_*^{(1)}-1}^{(1)} = \sum_{j \geq i_*^{(1)}} \frac{1}{\pi_{i_*^{(1)}-1}} r_j \sum_{m \geq j} \left(\prod_{\ell=i_*^{(1)}}^{m} q_\ell \right) \delta_m$ であり, よって各 k に対して

$$W_k^{(1)} = \sum_{j \geq (k+1) \vee i_*^{(1)}} \frac{1}{\pi_{k \vee (i_*^{(1)}-1)}} r_j \sum_{m \geq j} \left(\prod_{\ell=(k+1) \vee i_*^{(1)}}^{m} q_\ell \right) \delta_m$$

となる. これを (7) に代入することにより,

$$\begin{aligned} P^{(2)}(\text{win}) &= \sum_{k \geq i_*^{(2)}} \frac{1}{\pi_{i_*^{(2)}-1}} r_k \left\{ \sum_{\ell \geq k} \left(\prod_{j=i_*^{(2)}}^{\ell} q_j \right) \delta_\ell \right. \\ &\quad \left. + \pi_k q_k \sum_{j \geq (k+1) \vee i_*^{(1)}} \frac{1}{\pi_{k \vee (i_*^{(1)}-1)}} r_j \sum_{m \geq j} \left(\prod_{\ell=(k+1) \vee i_*^{(1)}}^{m} q_\ell \right) \delta_m \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

を得る.

5 試行回数が一様分布に従う場合

試行回数 N が一様分布 $U[1, N_0]$ に従う場合を考える. $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $P(N = k) = \delta_k = 1/N_0$ であり, $\pi_0 = 1$, $\pi_k = \sum_{s \geq k} \delta_s = P(N \geq k) = (N_0 - k + 1)/N_0$ と書かれる. $r_k \leq r_{k+j}$ が成立するとき, 条件 $(\star)$ は満たされる.

1 回停止可能な場合の最適停止時刻は

$$\begin{aligned} \tau_*^{(1)} &= \min\{i \in \mathcal{N} : G_i^{(1)} > 0 \ \&\ X_i = 1\} \\ &= \min\left\{ i \in \mathcal{N} : \frac{\sum_{k>i} r_{k+1} \sum_{j \geq k+1} \left(\prod_{\ell=i+1}^{j} q_\ell \right)}{\sum_{k>i} \left(\prod_{j=i+1}^{k} q_j \right)} < 1 \ \&\ X_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

で与えられる. また, 多数回停止可能な場合の最適停止時刻は $\ell = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\tau_*^{(\ell)} = \min\{i \in \mathcal{N} : G_i^{(\ell)} \geq 0 \ \&\ X_i = 1\}$ となり, ここで

$$G_i^{(m)} = G_i^{(m-1)} + \sum_{k \geq i_*^{(1)}} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} q_j \right) p_k G_k^{(m-1)} \frac{N_0 - k + 1}{N_0 - i + 1}$$

である.

6 まとめ

この問題に対して N の極限における振る舞いはまだ未知である．4節において，N が一様分布に従う場合に対して $m=1,2$ の場合の勝つ確率の計算結果を示したが，それ以上の結果はまだ得られていない．勝つ確率の漸近的な下限に関する命題として，各 m に対する漸近的な閾値 $i_*^{(m)}$ は一様分布に従う試行回数をもつ秘書問題と多数回停止可能な場合の秘書問題において得られる下限と一致するのではないかと予想する．

参考文献

[1] Ano, K. (2001), "Multiple selection problem and OLA stopping rule," *Mathematica Japonica*,**53**, 335-346.

[2] Ano, K. and Ando, A. (2000), "A note on Bruss' stopping problem withe random availability," *Game Theory, Optimal Stopping, Probability and Statistics*, IMS, Hayward, California, 71-82.

[3] Ano, K., Kakinuma, H. and Miyoshi, N. (2010), "Odds theorem with multiple selection chances," *J. Appl. Prob.*, **47**, 1093-1104.

[4] Bruss, F. T.(2000), "Sum the odds to one and stop," *Annals of Probability*, **28**, 1384-1391.

[5] Bruss, F. T.(2003), "A note on bounds for the odds theorem of optimal stopping," *Annals of Probability*, **31**, 1859-1861.

[6] Bruss, F. T. and Paindaveine, D. (2000), "Selecting a sequence of last successes in independent trials," *J. Appl. Prob.*, **37**, 389-399.

[7] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D.(1971), *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Mifflin Co., Boston.

[8] Ferguson, T. S.(2006), *Optimal Stopping and Applications*, electronic text at http://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html.

[9] Ferguson, T. S. (2008), "The sum-the-odds theorem with application to a stopping game of Sakaguchi," preprint.

[10] Kurushima, A. and Ano, K.(2016), "Multiple stopping odds problem in Bernoulli trials with random number of observations," submitted.

[11] Presman, E. L. and Sonin, I. M. (1972). "The best choice problem for a random number of objects," *Theory Prob. Appl.*, **17**, 657-668.