数理解析研究所講究録
第1990巻 2016年 128-135

転換社債価格評価への改良LCTアプローチ

関西大学・環境都市工学部　木村 俊一 (Toshikazu Kimura)
Faculty of Environmental and Urban Engineering, Kansai University
関西大学・大学院理工学研究科　米盛 逸人 (Hayato Yonemori)
Graduate School of Science and Engineering, Kansai University

1 はじめに

転換社債とは，株式に変換できるという権利を持った特別な社債である．発行時は普通社債の性質に加えて，あらかじめ決められた請求期間内で購入者の請求により転換価格で社債を株式に転換することができる．転換価格は発行時に定められており，発行価格は割引発行型を除いて額面価格と同一である．なお，株式に転換するのに追加費用はかからないが株式転換後は再度社債に戻すことができない．購入者から転換請求された発行会社は新株を発行するか自己株式を交付しなければならない．

購入者，発行会社それぞれに対する転換社債の特性について述べる．購入者にとって転換社債は社債の安全性と株式の投機性を兼ね備えた商品である．発行会社の株価が転換価格を下回れば社債として保有し続け，定期的にクーポン（金利）を受け取り，満期（償還日）に額面価格が払い戻される．株価が転換価格を上回れば，社債を株式に転換し売却益を利益として得ることができる．なお株式に転換できる権利がついているため普通社債よりも価格が高く，利率 (発行時点で確定する固定金利) が低い．また，転換社債自体の価格が株価と連動して上下するため，転換社債そのものの値上がり益を狙うこともできる．一方，発行会社は普通社債に比べて社債のクーポン利率を低く設定できるので金利負担が小さく．また，所有者が社債を株式に転換した後は社債を変換する必要がなく，株式増資に比べ配当の金利負担が小さいので発行会社は低いコストで資金を調達することができる．このように転換社債は購入者，企業双方にとって利点が多い商品であるが，企業が転換社債を大量発行し株価が低迷した際，転換社債は株式に転換されないので企業は満期時に多額の返済を迫られる．潜在的な株式としての性質が強いので，発行にあたっては既存株主の配慮や配当負担の点も考慮する必要がある．投資家も，普通社債より利率が低い（クーポンが0の場合もある）ので，満期まで保持する目的ならば，社債を保有すべきである．

近年では企業の資金調達は銀行借り入れだけでなく公募増資・株主割当・第三者割当など多様化している．そのもとで転換社債を発行する企業は増加しており，国内外の市場で活発に取引されいる．新興国，特にアジア地域では，経済成長に伴う企業の資金調達需要の増加とともに資本市場が発展しつつあることから，転換社債の発行残高が増加し，一定程度の市場が確立されつつある．アジアの転換社債市場の発展とともに発行残高は増加傾向にあるので今後ますます注目されるだろう．

Hayashi et al. [14] は転換社債価格に対するラプラス・カーソン変換 (LCT) が満たす常微分方程式を解析的に解き，数値的に逆変換することで転換社債価格を求めている．本論文では転換社債価格をプレミアム分解により効率的に価格評価する方法を提案する．ヨーロピアン転換社債価格はリスク中立化法で明示的に導出できるので，プレミアム部分に対するLCTを数値的に逆変換したものを加えることで，より効率的にアメリカン転換社債価格が導出可能となる．

2 偏微分方程式による定式化

転換社債価格を定式化し転換社債価格と転換境界を導出する．転換社債の原資産として，時刻 $t \in [0,T]$ における企業価値を $V(t)$ で表す．無裁定条件下において $(V(t))_{t>0}$ は幾何ブラウン運動に従うと仮定する．すなわち，$(V(t))_{t\geq 0}$ は次の確率微分方程式を満たす．

$$\mathrm{d}V(t) = (r-\delta)V(t)\mathrm{d}t + \sigma V(t)\mathrm{d}W(t), \quad t \geq 0$$

ただし，$r > 0$ は安全利子率，$\delta > 0$ は原資産に対する連続配当率，σ はボラティリティ，$(W(t))_{t>0}$ は標準ブラウン運動である．時刻 t における企業価値が $V(t)$ で与えられる転換社債の価格を $B(V(t),t)$ で表すと，$B(V(t),t)$ は以下の偏微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 B}{\partial V^2} + (r-\delta)V\frac{\partial B}{\partial V} - rB = 0, \quad V < V_c \tag{1}$$

$V(t)$ には最適転換境界 $V_c(t)$ が存在し，これを上回ると株式への転換が起こるとすると (1) 式の境界条件は

$$\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{V\to V_c} B(V(t),t) = \gamma V_c \\ \lim\limits_{V\to V_c} \dfrac{\partial B}{\partial V} = \gamma \\ \lim\limits_{V\to 0} B(V(t),t) = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

となる．ただし，γ は転換社債が増加することによる株価の減少を表す希薄化係数で

$$\gamma = \frac{ln}{m+ln} < 1$$

で与えられる．l は未払い転換社債数，m は株式数，n は転換社債 1 枚当たりの株式転換枚数である．転換社債価格 $B(V,t)$ の終端条件，つまり満期時点における価格は企業価値 V によって定まる．デフォルト時，企業価値が最適転換境界を上回った場合，下回った場合を踏まえると

$$B(V,T) = \frac{1}{L}V(T) - \frac{1}{L}\left(V(T) - FL\right)^+ + \gamma\left(V(T) - \frac{F}{\gamma}\right)^+ \tag{3}$$

で与えられる．ただし，F は転換社債の額面価格，L は転換社債の発行枚数を表す．

3 LCT アプローチ

$\tau = T - t$ を満期 T までの残存時間とする．このとき，時間の向きを逆にとった B, V, V_c は

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(\widetilde{V},\tau) &= B(V(T-\tau), T-\tau) = B(V(t),t) \\ \widetilde{V}(\tau) &= V(T-\tau) = V(t) \\ \widetilde{V}_c(\tau) &= V_c(T-\tau) = V_c(t) \end{aligned}$$

と書くことができる．簡単のため

$$V \equiv \widetilde{V}(\tau) = V(t)$$

とおくと，偏微分方程式 (1) は

$$-\frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2\tilde{B}}{\partial V^2}+(r-\delta)V\frac{\partial \tilde{B}}{\partial V}-r\tilde{B}=0,\quad V<V_c \tag{4}$$

となり，境界条件 (2)

$$\left|\begin{array}{l}\lim_{V\to\tilde{V}_c}\tilde{B}(V,\tau)=\gamma\tilde{V}_c\\ \lim_{V\to\tilde{V}_c}\dfrac{\partial\tilde{B}}{\partial V}=\gamma\\ \lim_{V\to 0}\tilde{B}(V,\tau)=0\end{array}\right. \tag{5}$$

と書き換えられる．終端条件 (3) は $\tilde{B}(\tilde{V}(\tau),\tau)$ に対しては，初期条件

$$B(V,0)=\frac{1}{L}\widetilde{V}(0)-\frac{1}{L}\left(\widetilde{V}(0)-FL\right)^+ +\gamma\left(\widetilde{V}(0)-\frac{F}{\gamma}\right)^+ \tag{6}$$

として与えられる．

$\lambda>0$ に対して $\widetilde{B}(V,\tau),\widetilde{V}(\tau),\tilde{V}_c(\tau)$ の LCT を

$$\begin{aligned}B^*&\equiv B^*(V,\lambda)=\mathcal{LC}[\widetilde{B}(V,\tau)](\lambda)=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda\tau}\tilde{B}(V,\tau)d\tau\\ V^*&\equiv V^*(\lambda)=\mathcal{LC}[\widetilde{V}(\tau)](\lambda)\\ V_c^*&\equiv V_c^*(\lambda)=\mathcal{LC}[\widetilde{V}_c(\tau)](\lambda)\end{aligned}$$

と定義する．偏微分方程式 (5) に対して LCT を適用すると，初期条件 (6) を用いて常微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{d^2B^*}{dV^2}+(r-\delta)V\frac{dB^*}{dV}-(\lambda+r)B^*\\ &=-\lambda\left\{\frac{1}{L}V-\frac{1}{L}(V-FL)^+ +\gamma\left(V-\frac{F}{\gamma}\right)^+\right\},\quad V(\tau)<\tilde{V}_c(\tau)\end{aligned} \tag{7}$$

を得る．このとき B^* の境界条件は

$$\left|\begin{array}{l}\lim_{V\to V_c^*}B^*(V,\lambda)=\gamma V_c^*\\ \lim_{V\to V_c^*}\dfrac{dB^*}{dV}=\gamma\\ \lim_{V\to 0}B^*(V,t)=0\end{array}\right. \tag{8}$$

で与えられる．境界条件 (8) の下で線形微分方程式 (7) を解くことで，原理的には転換社債価格の LCT が導出できる．Hayashi et al. [14] は，解の一般形を定数 A に対して AV^θ と仮定することで

$$B^*(V,\lambda)=\begin{cases}\gamma V, & V_c^*\le V\\ A_1V^{\theta_1}+A_2V^{\theta_2}+\dfrac{\lambda\gamma}{\lambda+\delta}V, & \dfrac{F}{\gamma}\le V<V_c^*\\ A_3V^{\theta_1}+A_4V^{\theta_2}+\dfrac{\lambda F}{\lambda+r}, & FL\le V<\dfrac{F}{\gamma}\\ A_5V^{\theta_1}+\dfrac{\lambda}{(\lambda+\delta)L}V, & V<FL\end{cases} \tag{9}$$

を得た．ただし，A_i $(i=1,\ldots,5)$ は未定定数であり，$\theta_1>1$, $\theta_2<0$ は 2 次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2+(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\theta-(\lambda+r)=0$$

の 2 実根である．$V=FL,\frac{F}{\gamma},V_c^*$ における V およびその導関数の連続性より，係数 $A_1,\ldots,A_5$ は

$$\begin{aligned}
A_1&=\frac{\gamma\delta V^{*1-\theta_1}}{(\lambda+\delta)\theta_1}+\frac{\lambda(L^{-\theta_2}-\gamma^{\theta_2})(\theta_1+2\theta_2-1)V^{*\theta_2-\theta_1}}{\theta_1(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)F^{\theta_2-1}}\\
A_2&=-\frac{\lambda(L^{-\theta_2}-\gamma^{\theta_2})(\theta_1+2\theta_2-1)}{(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)\theta_2F^{\theta_2-1}}\\
A_3&=-\frac{F^{1-\theta_1}\lambda\gamma^{\theta_1}(\theta_1+2\theta_2-1)}{(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)\theta_2}+\frac{\lambda(L^{-\theta_2}-\gamma^{\theta_2})(\theta_1+2\theta_2-1))V^{*\theta_2-\theta_1}}{\theta_1(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)F^{\theta_2-1}}\\
&\quad+\frac{r\delta V^{*1-\theta_1}}{(\lambda+\delta)\theta_1}-\frac{\lambda F^{1-\theta_1}\gamma^{\theta_1}}{\lambda+r}+\frac{\lambda F^{1-\theta_1}\gamma^{\theta_1}}{\lambda+\delta}\\
A_4&=-\frac{\lambda(\theta_1+2\theta_2-1)F^{1-\theta_2}}{(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)\theta_2L^{\theta_2}}\\
A_5&=-\frac{F^{1-\theta_1}\lambda(\gamma^{\theta_1}+L^{-\theta_1})(\theta_1+2\theta_2-1)}{(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)\theta_2}+\frac{\lambda(L^{-\theta_2}-\gamma^{\theta_2})(\theta_1+2\theta_2-1))V^{*\theta_2-\theta_1}}{\theta_1(\theta_1-\theta_2)(\lambda+\delta)F^{\theta_2-1}}\\
&\quad+\frac{\lambda F^{1-\theta_1}(\delta-r)}{L^{\theta_1}(\lambda+r)(\lambda+\delta)}+\frac{\gamma\delta V^{1-\theta_1}}{(\lambda+\delta)\theta_1}-\frac{\lambda F^{1-\theta_1}\gamma^{\theta_1}}{\lambda+r}+\frac{\lambda F^{1-\theta_1}\gamma^{\theta_1}}{\lambda+\delta}
\end{aligned}$$

で与えられる．最適転換境界 V_c^* は，(8) より

$$V_c^*(\lambda)=\left(\frac{\delta\gamma(\theta_1-1)(\lambda+r)F^{\theta_2-1}}{(\lambda+r+(\delta-r)\theta_1)(\gamma^{\theta_2}-L^{-\theta_2})\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta_2-1}} \tag{10}$$

となる．明らかに，Hayashi et al. [14] の解は非常に煩雑な形をしているために，解の挙動に関する知見を得ることが困難であると同時に，数値的逆変換を行う際にも十分な注意が必要となる．

4 プレミアム分解による単純化

アメリカン・コール・オプション価格はヨーロピアン・コール・オプション価格と早期行使プレミアムに分解される．すなわち

$$B(V(t),t)=b(V(t),t)+\pi(V(t),t),\quad t\in[0,T]$$

ただし，$B(V(t),t)$ はアメリカン転換社債価格，$b(V(t),t)$ はヨーロピアン転換社債価格，$\pi(V(t),t)$ は早期転換プレミアムを表す．この考え方を転換社債価格に応用し，Hayashi et al. [14] よりも簡便なアメリカン転換社債価格に対する公式を導出する．

アメリカンとヨーロピアン転換社債の満期時のペイオフは一致するので

$$\begin{aligned}
B(V(T),T)=b(V(T),T)&=\frac{1}{L}V(T)\mathbf{1}_{\{V(T)<FL\}}+F\mathbf{1}_{\{FL<V(T)<\frac{F}{\gamma}\}}+\gamma V(T)\mathbf{1}_{\{V(T)>\frac{F}{\gamma}\}}\\
&=\frac{1}{L}V(T)-\frac{1}{L}\left(V(T)-FL\right)^+ +\gamma\left(V(T)-\frac{F}{\gamma}\right)^+
\end{aligned}$$

が成立する．ヨーロピアン転換社債価格にリスク中立評価法を $b(V,t)$ に適用すると

$$
\begin{aligned}
b(V,t) &= \frac{1}{L}E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}V(T)\,|\,V] - \frac{1}{L}E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}(V(T)-FL)^{+}\,|\,V] \\
&\qquad + \gamma E\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left(V(T)-\frac{F}{\gamma}\right)^{+}\,|V\right] \\
&= \frac{1}{L}c(V,t;0) - \frac{1}{L}c(V,t;FL) + \gamma c\left(V,t;\frac{F}{\gamma}\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となり，満期でのみ転換できるヨーロピアン転換社債は明示的な式で導出できる．ここで，$c(V(t),t;K)$ は満期 T，行使価格 K $(=0,FL,F/\gamma)$ を持つヨーロピアン・コールオプションの価格を表し，Black and Scholes [9]，Merton [20] の結果より，$K=0,FL,F/\gamma$ に対して

$$
c(V,t;K) = V\mathrm{e}^{-\delta(T-t)}\Phi\big(d_{+}(V,K,T-t)\big) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi\big(d_{-}(V,K,T-t)\big)
$$

で表される．ただし，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数を表し

$$
d_{\pm}(x,y,\tau) = \frac{\log(x/y) + (r-\delta\pm\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
$$

である．LCT $c^*(V,\lambda;K)=\mathcal{LC}[\tilde{c}(\tau,V;K)]$ を用いて，$b^*(V,\lambda)=\mathcal{LC}[\tilde{b}(V,\tau)]$ は，(11) より

$$
b^*(V,\lambda) = \frac{1}{L}\frac{\lambda V}{\lambda+\delta} - \frac{1}{L}c^*(V,\lambda;FL) + \gamma c^*(V,\lambda;F/\gamma)
$$

と表すことができる．Kimura [19] は，ヨーロピアン・コールオプションに LCT アプローチを適用することで，簡約な結果

$$
c^*(V,\lambda;K) = \begin{cases} \xi_1(V), & V<K \\ \xi_2(V) + \dfrac{\lambda V}{\lambda+\delta} - \dfrac{\lambda K}{\lambda+r}, & V\geq K \end{cases}
$$

を導いた．ただし

$$
\xi_i(V) \equiv \xi_i(V;K) = \frac{K}{\theta_1-\theta_2}\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left(1-\frac{r-\delta}{\lambda+r}\theta_{3-i}\right)\left(\frac{V}{K}\right)^{\theta_i}, \quad i=1,2
$$

である．簡単のため，以下では

$$
\eta_i \equiv \eta_i(V) = \xi_i(V;FL), \qquad \zeta_i \equiv \zeta_i(V) = \xi_i(V;F/\gamma)
$$

とおくことにする．このとき，$b^*(V,\lambda)$ は

$$
b^*(V,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{L}\eta_1(V) + \gamma\zeta_1(V) + \dfrac{1}{L}\dfrac{\lambda V}{\lambda+\delta}, & V<FL \\ -\dfrac{1}{L}\eta_2(V) + \gamma\zeta_1(V) + \dfrac{\lambda F}{\lambda+r}, & FL\leq V<\dfrac{F}{\gamma} \\ -\dfrac{1}{L}\eta_2(V) + \gamma\zeta_2(V) + \gamma\dfrac{\lambda V}{\lambda+\delta}, & \dfrac{F}{\gamma}\leq V \end{cases}
$$

と表される．プレミアム分解 $B^* = b^* + \pi^*$ を用いると，早期行使プレミアムの LCT $\pi^*(V,\lambda)$ は，常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\mathrm{d}^2\pi^*}{\mathrm{d}V^2} + (r-\delta)V\frac{\mathrm{d}\pi^*}{\mathrm{d}V} - (\lambda + r)\pi^* = 0$$

と境界条件

$$\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{V\to 0} \pi^*(V,\lambda) = 0 \\ \lim\limits_{V\to V_c^*} \pi^*(V,\lambda) = \gamma V_c^* - b^*(V_c^*,\lambda) \\ \lim\limits_{V\to V_c^*} \dfrac{\mathrm{d}\pi^*}{\mathrm{d}V} = \gamma - \left.\dfrac{\mathrm{d}b^*}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_c^*} \end{array}\right. \tag{12}$$

の解として与えられ

$$\pi^*(\lambda,V) = \frac{1}{\theta_1}\left[\gamma\frac{\delta V_c^*}{\lambda+\delta} + \theta_2\left\{\frac{1}{L}\eta_2(V_c^*) - \gamma\zeta_2(V_c^*)\right\}\right]\left(\frac{V}{V_c^*}\right)^{\theta_1}$$

となる．また，第 2 境界条件より，アメリカン転換社債価格の早期行使境界 $\tilde{V}_c(\tau)$ の LCT は

$$V_c^*(\lambda) = \frac{F}{\gamma}\left[-\frac{\delta\theta_2}{\lambda(1-(\gamma L)^{-\theta_2})}\right]^{\frac{1}{\theta_2 - 1}}$$

で与えられる（Hayashi et al. [14] の解と比較せよ．）．

以上より，ヨーロピアン転換社債価格 $b(V,t)$ に早期行使プレミアムの LCT $\pi^*(\lambda,V)$ のラプラス・カーソン逆変換を加えることでアメリカン転換社債価格が求められる．すなわち

$$B(V,t) = b(V,t) + \mathcal{LC}^{-1}[\pi^*(V,\lambda)](T-\tau)$$

ラプラス・カーソン変換の定義より，実関数 $f(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{R}_+)$ に対して

$$f^*(\lambda) = \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \lambda\mathcal{L}[f(\tau)](\lambda)$$

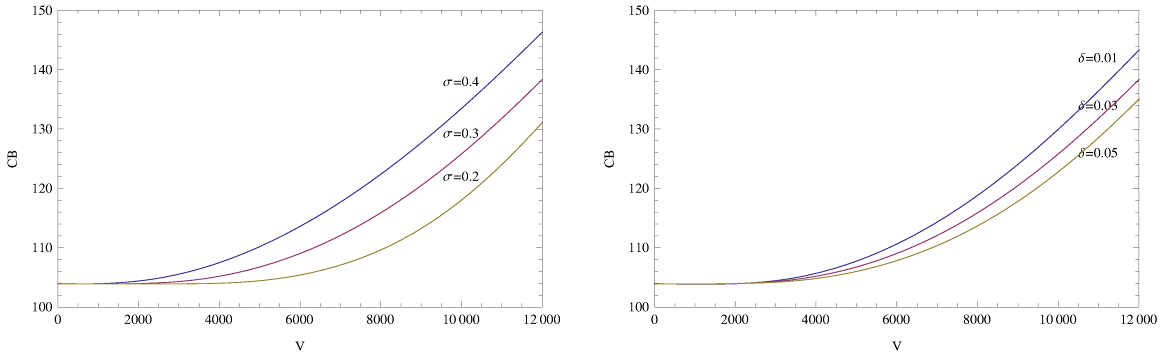
が成り立つ．ただし，$\mathcal{L}[f(\tau)](\lambda)$ は $f(\tau)$ のラプラス変換を表す．したがって

$$f(\tau) = \mathcal{LC}^{-1}[f^*(\lambda)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{f^*(\lambda)}{\lambda}\right], \quad \tau \geq 0$$

より，ラプラス逆変換のアルゴリズムを用いることで，LCT を逆変換することができる．

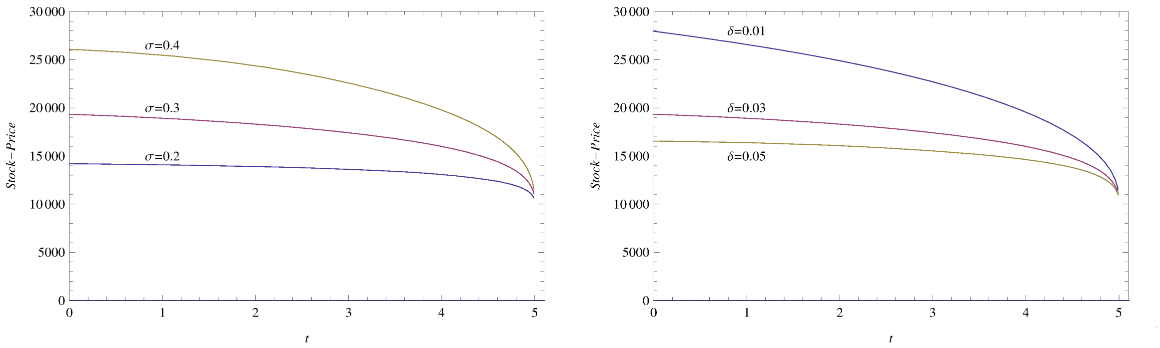
5 数値実験

本論文では，数値的ラプラス逆変換法として Gaver-Stehfest アルゴリズム [13, 24] を用いて，*Mathematica* Ver.8 による数値実験を行った．図 1 は転換社債価格 $B(V(t),t)$ を表し，図 2 は転換境界 $V_c(t)$ の満期までの時間的変動を表している．ただし，パラメータは $T=5$, $r=0.01$, $\gamma=0.01$, $F=100$, $L=10$, $\delta=0.01, 0.03, 0.05$, $\sigma=0.2, 0.3, 0.4$ を仮定している．



(a) $\delta = 0.03$, $\sigma = 0.2, 0.3, 0.4$ (b) $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$, $\sigma = 0.3$

図 1 転換社債価格 $B(V(t), t)$: $T = 5$, $r = 0.01$, $\gamma = 0.01$, $F = 100$, $L = 10$



(a) $\delta = 0.03$, $\sigma = 0.2, 0.3, 0.4$ (b) $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$, $\sigma = 0.3$

図 2 転換境界 $V_c(t)$: $T = 5$, $r = 0.01$, $\gamma = 0.01$, $F = 100$, $L = 10$

参考文献

[1] 石原直美, 「クーポン付転換社債の価格評価と最適転換戦略」, 北海道大学経済学部卒業論文, 2008.

[2] 木村俊一, 「数値的ラプラス逆変換について」, 経済学研究, **37**, 282–293, 1987.

[3] 木村俊一・菊池一哲, 「確率化法によるエイジアン・オプションの価格評価」, 数理解析学研究所講究録, **1457**, 36–43, 2005.

[4] 木村俊一・菊地一哲, 「アメリカ型連続インストールメント・オプションの価格評価」, 数理解析学研究所講究録, **1548**, 37–44, 2007.

[5] 小林孝雄, 「信用リスク・モデル化のアプローチ」, 東京大学大学院経済学研究科, 2003.

[6] 後藤 猛, 『最新転換社債とワラント債』, 東洋経済新報社, 1989.

[7] 豊田泰士・大野高裕, 「信用リスクの誘導型モデルを用いることでデフォルト相関を考慮したローン・ポートフォリオのリスク指標の提案」, 日本経営システム学会全国研究発表大会報告資料, 1–2, 2005.

[8] Bellman, R.E., R.E. Kalaba and J.A. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Trans-*

form, American Elsevier, New York, 1966.

[9] Black, F. and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654, 1973.

[10] Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, "Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion," *Journal of Finance*, **32**, 1699–1715, 1977.

[11] Carr, P., "Randomization and the American put," *Review of Financial Studies*, **11**, 597–626, 1998.

[12] Duffie, D. and K. Singleton, "Modeling term structure of defaultable bonds," *Review of Financial Studies*, **12**, 687–720, 1999.

[13] Gaver, D.P., Jr., "Observing stochastic processes and approximate transform inversion," *Operations Research*, **14**, 444–459, 1966.

[14] Hayashi, D., M. Goto and T. Ohono, "Pricing convertible bonds: A Laplace-Carson transform approach," Working Paper, Waseda University, 2007.

[15] Ingersoll, J.E., "A contingent-claims valuation of convertible securities," *Journal of Financial Economics*, **4**,289–321, 1977.

[16] Jarrow R.A. and S.M. Turnbull, "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk," *Journal of Finance*, **50**, 53–85, 1995.

[17] Jarrow R.A., D. Lando and S.M. Turnbull, "A Markov model for the term structure of credit risk spreads," *Review of Financial Studies*, **10**, 481–523, 1997.

[18] Kimura, T., "Alternative randomization for valuing American options," *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **27**, 167–187, 2010.

[19] Kimura, T., "Valuing continuous-installment options," *European Journal of Operational Research*, **201**, 222–230, 2010.

[20] Merton, R.C., "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, **29**, 449–470, 1974.

[21] Merton, R.C., "Theory of option pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183, 1973.

[22] Papoulis, A., "A new method of inversion of the Laplace transform," *Quarterly of applied mathematics*, **14**, 405–414, 1956.

[23] Schmittroth, L.A., "Numerical inversion of Laplace transforms," *Communications of the ACM*, **3**, 171–173, 1960.

[24] Stehfest, H., "Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms," *Communication of the ACM*, **13**, 43–49, 1970.