数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 213-221

7つの双対問題

長崎県立大学経済学部　植野 貴之 (Takayuki Ueno)
Faculty of Economics, University of Nagasaki
秋田県立大学システム科学技術学部　木村 寛 (Yutaka Kimura)
Faculty of System Science and Technology, Akita Prefectural University
九州大学名誉教授　岩本 誠一 (Seiichi Iwamoto)
Professor Emeritus, Kyushu University

概 要

本論文では 3 平方和の最小化 (主) 問題

$$(\mathrm{P}_3)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^1 \end{array}$$

には全体として 7 つの最大化 (双対) 問題が対応することを示す。主問題から各双対問題を導き、等号条件を解いて、両問題の最適解を与えている。この部分問題として "1" 平方の最小化、および 2 平方和の最小化についても等号条件と最適解を述べている。

1 はじめに

主問題

$$(\mathrm{P}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^1 \end{array}$$

の双対問題はどのようになるのだろうか。

1 つの双対問題としては

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{array}{lll} \text{Maximize} & -\lambda^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & \lambda = 0 \\ & \text{(ii)} & \lambda \in R^1 \end{array}$$

が考えられる。

(P_1) と (D_1) の間の等号条件 (Equality Condition, EC) は 2 元 2 連立 1 次方程式系

$$(\mathrm{EC}_1)\quad \begin{cases} x = \lambda \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

になる。この系は解 $(x;\lambda) = (0;0)$ をもつ。

このとき、主問題 (P_1) は $\hat{x} = 0$ のとき、最小値 $m = 0$ をもつ。

また、双対問題 (D_1) は $\lambda^* = 0$ のとき、最大値 $M = 0$ をもつ。なお、等号条件の解は両問題の最適解（最小点 と 最大点）を与えている。

2　2平方和

主問題

$$(\mathrm{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2+(x+1)^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ x \in R^1 \end{array}$$

の双対問題としては以下の3つが考えられる。

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -2\lambda^2-2\lambda \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \lambda \in R^1 \end{array} \qquad (\mathrm{D}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -2\mu^2+2\mu \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \mu \in R^1 \end{array}$$

$$(\mathrm{D}_3)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2-\mu^2+2\mu \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \lambda+\mu=0 \\ & \text{(ii)}\ (\lambda,\mu) \in R^2 \end{array}$$

(P_2) と (D_1) の間の等号条件は2元2連立1次方程式系

$$(\mathrm{EC}_1)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda \\ x+1+\lambda &= 0 \end{aligned} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\lambda)=\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ をもつ。(P_2) と (D_2) の間の等号条件は2元2連立系

$$(\mathrm{EC}_2)\quad \left\{ \begin{aligned} x+\mu &= 0 \\ x+1-\mu &= 0 \end{aligned} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\mu)=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ をもつ。(P_2) と (D_3) の間では3元3連立系

$$(\mathrm{EC}_3)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda \\ x+1-\mu &= 0 \\ \lambda+\mu &= 0 \end{aligned} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\lambda,\mu)=\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ をもつ。

このとき、主問題 (P_2) は $\hat{x}=-\dfrac{1}{2}$ のとき、最小値 $m=\dfrac{1}{2}$をもつ。

また、双対問題 (D_1) は $\lambda^*=-\dfrac{1}{2}$ のとき、最大値 $M=\dfrac{1}{2}$をもつ。(D_2) は $\mu^*=\dfrac{1}{2}$ のとき、最大値 $M=\dfrac{1}{2}$をもつ。(D_3) は $(\lambda^*,\mu^*)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ のとき、最大値 $M=\dfrac{1}{2}$をもつ。

なお、主問題と双対問題の間の等号条件の解は3つとも両問題の最適解を与えていることがわかる。

3 3平方和

さて、3平方和の最小化を考えよう。主問題

$$(\mathrm{P}_3)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^1 \end{array}$$

の双対問題の全体はどのようになるだろうか。

まず、主問題 (P_3) は、$\hat{x} = -1$ のとき、最小値 $m = 2$ をもつ。ここで、主問題 (P_3) は制約なしの最小化問題である。しかし $x = u$ とおくと、(P_3) は条件付き最適化問題

$$(\mathrm{P}_{3,1})\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & u^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x = u \\ & \text{(ii)}\ \ (x,\,u) \in R^2 \end{array}$$

に同値になる。これは1線形制約下での2変数の2次凸最小化である。

さて、問題 $(\mathrm{P}_{3,1})$ の双対問題を導入しよう。$(\mathrm{P}_{3,1})$ の任意の実行可能解を (x,u) とすると、任意の $\lambda\,(\in R^1)$ に対して

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \;=\; (u-\lambda)^2-\lambda^2+2x^2+2\lambda x+6x+5$$

になる。λ を制約式 (i) $x-u=0$ に付随する**双対変数** (dual variable) という。ここで

$$\begin{aligned} (u-\lambda)^2-\lambda^2+2x^2+2\lambda x+6x+5 \;&=\; (u-\lambda)^2-\lambda^2+2\left(x+\frac{\lambda+3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(\lambda+3)^2+5 \\ &\geq\; -\frac{3}{2}\lambda^2-3\lambda+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

になる。したがって、不等式

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \;\geq\; -\frac{3}{2}\lambda^2-3\lambda+\frac{1}{2}$$

が成り立つ。等号は

$$(\mathrm{EC}_1)\quad \left\{ \begin{aligned} x \;&=\; \lambda \\ x+\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2} \;&=\; 0 \end{aligned} \right.$$

のときに限り成り立つ。(EC_1) を (P_3) と (D_1) の間の等号条件 (Equality Condition, EC) という。これは2元2連立1次方程式系である。このようにして (P_3) の双対問題として

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\dfrac{3}{2}\lambda^2-3\lambda+\dfrac{1}{2}. \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ \lambda \in R^1 \end{array}$$

が等号条件 (EC_1) と共に導かれた。これが**動的双対化** (dynamic dualization) である [9]。この双対化では新たに変数 u を導入して、条件付き最適化問題に帰着して双対問題を導いている。

以下では、**プラス・マイナス双対化** (plus-minus dualization) といわれる方法で双対問題を導こう。これは**フェンシェル双対化** (Fenchel dualization) [7,8,11] を改良している。この方法では新変数 u は導入しないで、(双対変数に相当する) λ の1次式をプラスしてマイナスしている。さらに**共役関数** (conjugate function) を用いている。この概念は**最大変換** (maximum transform) と同等であり [1–6] 、**準線形化** (quasi-linearization) とも強い関係がある [9,10]。

3.1 1項プラス・マイナス

平方和の素になっている3つの1次式は x, $x+1$, $x+2$ である。これに対応する双対変数を各々 λ, μ, ν とすると、3つの内積は $2\lambda x$, $2\mu(x+1)$, $2\nu(x+2)$ である。ただし目的式の2次性を考慮して2倍している。このうち1つをプラス・マイナスする方法は ${}_3C_1 = 3$ 通りある。

3.1.1 x

まず、目的式

$$f(x) = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$$

から $2\lambda x$ を引いて加える。すると、2変数 (x, λ) に関する恒等式が成立し、$f(x)$ を支持する λ の2次関数が得られる。これを目的関数にもつ最大化問題は

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\dfrac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \dfrac{1}{2} \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \lambda \in R^1 \end{array}$$

である。これが1平方 x^2 に対応する双対問題である。(P_3) と (D_1) の間の等号条件は2元2連立1次方程式系

$$(\mathrm{EC}_1)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda \\ x + \frac{\lambda+3}{2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda) = (-1; -1)$ をもつ。

そして、双対問題 (D_1) は $\lambda^* = -1$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

【導出 $(\mathrm{P}_3) \Longrightarrow (\mathrm{D}_1)$ 】

さて、主問題 (P_3) の任意の実行可能解を $x \in R^1$ とする。このとき任意の $\lambda \in R^1$ に対して

$$\begin{aligned} & x^2 - 2\lambda x + (x+1)^2 + (x+2)^2 + 2\lambda x \\ =\ & (x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、恒等式

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x-\lambda)^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2}$$

を得る。したがって、不等式

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \ \geq\ -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2}$$

が成り立つ。等号は、

$$(\alpha)\ x - \lambda = 0, \qquad (\beta)\ x + \frac{\lambda+3}{2} = 0$$

が成り立つときに限り成立する。等号条件は (EC_1) である。

この導出を遡ると、逆も導かれる。実際、最大化問題 (D_1) が与えられたとき、最小化問題 (P_3) を導く。これには 不等式

$$-\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \leq x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \qquad \lambda \in R^1,\ x \in R^1 \tag{1}$$

および等号条件 (α), (β) を導けばよい。

さて、任意に $\lambda \in R^1$ をとると、任意の $x \in R^1$ に対して

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} &\leq (x-\lambda)^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \\ &= (x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 \end{aligned}$$

である。(α), (β) が成り立つとき、等号は成立する。前述の逆を辿ると、この右辺は

$$(x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 \ = \ x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$$

になる。よって 不等式 (1) が成り立ち、等号条件も得られた。したがって、(D_1) から (P_3) が導かれた。

3.1.2 $x+1$

次に、$f(x)$ から $2\mu(x+1)$ を引いて加える。すると、1 平方 $(x+1)^2$ に対応する双対問題

$$(\mathrm{D}_2) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\dfrac{3}{2}\mu^2 + 2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ \mu \in R^1 \end{array}$$

が導かれる。等号条件は 3 元 3 連立 1 次方程式系

$$(\mathrm{EC}_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x + 1 &= \mu \\ x + \frac{\mu+2}{2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \mu) = (-1; 0)$ をもつ。

そして、双対問題 (D_2) は $\mu^* = 0$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.1.3 $x+2$

今度は $2\nu(x+2)$ を引いて加えると、1 平方 $(x+2)^2$ に対応する双対問題

$$(\mathrm{D}_3) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\dfrac{3}{2}\nu^2 + 3\nu + \dfrac{1}{2} \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ \nu \in R^1 \end{array}$$

が得られる。等号条件は3元3連立1次方程式系

$$
(\mathrm{EC}_3) \quad \begin{cases} x + 2 = \nu \\ x + \dfrac{\nu + 1}{2} = 0 \end{cases}
$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \nu) = (-1; 1)$ をもつ。

双対問題 (D_3) は $\nu^* = 1$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.2 2項プラス・マイナス

3つの内積 $2\lambda x,\ 2\mu(x+1),\ 2\nu(x+2)$ のうち2つをプラス・マイナスする方法も ${}_3C_2 = 3$ 通りある。

3.2.1 $x,\ x+1$

まず、目的式 $f(x)$ から $2\lambda x + 2\mu(x+1)$ を引いて加える。すると、今度は2平方和 $x^2 + (x+1)^2$ に対応する双対問題

$$
(\mathrm{D}_4) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2 - \mu^2 - (\lambda+\mu)^2 - 4\lambda - 2\mu \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ (\lambda,\ \mu) \in R^2 \end{array}
$$

を得る。主問題 (P_3) とこの問題 (D_4) の間の等号条件は3元3連立1次方程式系

$$
(\mathrm{EC}_4) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x + 1 = \mu \\ x + 2 + (\lambda + \mu) = 0 \end{cases}
$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\ \lambda,\ \mu) = (-1;\ -1,\ 0)$ をもつ。

そして、双対問題 (D_4) は $(\lambda^*,\ \mu^*) = (-1,\ 0)$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.2.2 $x,\ x+2$

次に、$2\lambda x + 2\nu(x+2)$ を引いて加えると、2平方和 $x^2 + (x+2)^2$ に対応する双対問題

$$
(\mathrm{D}_5) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2 - \nu^2 - (\lambda+\nu)^2 - 2\lambda + 2\nu \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ (\lambda,\ \mu) \in R^2 \end{array}
$$

が得られる。(P_3) の間の等号条件は3元3連立系

$$
(\mathrm{EC}_5) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x + 2 = \nu \\ x + 1 + \lambda + \nu = 0 \end{cases}
$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\ \lambda,\ \nu) = (-1;\ -1,\ 1)$ をもつ。

双対問題 (D_5) は $(\lambda^*,\ \nu^*) = (-1,\ 1)$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.2.3 $x+1,\ x+2$

さらに、$2\mu(x+1)+2\nu(x+2)$ を引いて加えると、$(x+1)^2+(x+2)^2$ に対応する双対問題

$$(\mathrm{D}_6)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\mu^2-\nu^2-(\mu+\nu)^2+2\mu+4\nu \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ (\mu,\nu)\in R^2 \end{array}$$

が導かれる。(P_3) との等号条件は3元3連立

$$(\mathrm{EC}_6)\quad \left\{ \begin{array}{r} x+1=\mu \\ x+2=\nu \\ x+\mu+\nu=0 \end{array} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\mu,\nu)=(-1,0,1)$ をもつ。
双対問題 (D_6) は $(\mu^*,\nu^*)=(0,1)$ のとき、最大値 $M=2$ をもつ。

3.3 3項プラス・マイナス

3つの内積 $2\lambda x,\ 2\mu(x{+}1),\ 2\nu(x{+}2)$ のうち3つともプラス·マイナスする方法は ${}_3C_3=1$ 通りである。ここでは、$2\lambda x{+}2\mu(x{+}1){+}2\nu(x{+}2)$ を引いて加えると、全3平方和 $x^2{+}(x{+}1)^2{+}(x{+}2)^2$ に対応する双対問題

$$(\mathrm{D}_7)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu+4\nu \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ \lambda+\mu+\nu=0 \\ & \text{(ii)}\ \ (\lambda,\mu,\nu)\in R^3 \end{array}$$

が得られる。主問題 (P_3) との等号条件は4元4連立1次方程式系

$$(\mathrm{EC}_7)\quad \left\{ \begin{array}{r} x=\lambda \\ x+1=\mu \\ x+2=\nu \\ \lambda+\mu+\nu=0 \end{array} \right.$$

になる。この系は唯一の解 $(x;\lambda,\mu,\nu)=(-1;-1,0,1)$ をもつ。
双対問題 (D_7) は $(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)=(-1,0,1)$ のとき、最大値 $M=2$ もつ。

【導出 $(\mathrm{P}_3)\Longrightarrow(\mathrm{D}_7)$】
さて、主問題 (P_3) の任意の実行可能解を $x\in R^1$ としよう。このとき 任意の $(\lambda,\mu,\nu)\in R^3$ に対して

$$\begin{aligned} & x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \\ = \ & x^2-2\lambda x+(x+1)^2-2\mu(x+1)+(x+2)^2-2\nu(x+2)+2\lambda x+2\mu(x+1)+2\nu(x+2) \\ = \ & (x-\lambda)^2-\lambda^2+(x+1-\mu)^2-\mu^2+(x+2-\nu)^2-\nu^2+2(\lambda+\mu+\nu)x+2\mu+4\nu \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、制約条件 (i) $\lambda+\mu+\nu=0$ の下では、

$$\begin{aligned}
&(x-\lambda)^2-\lambda^2+(x+1-\mu)^2-\mu^2+(x+2-\nu)^2-\nu^2+2(\lambda+\mu+\nu)x+2\mu+4\nu \\
=\ &(x-\lambda)^2-\lambda^2+(x+1-\mu)^2-\mu^2+(x+2-\nu)^2-\nu^2+2\mu+4\nu \\
\geq\ &-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu+4\nu
\end{aligned}$$

である。したがって、不等式

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \ \geq\ -\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu+4\nu$$

が成り立つ。等号は、制約条件 (i) に加えて

$$(\alpha)\ x-\lambda=0, \qquad (\beta)\ x+1-\mu=0, \qquad (\gamma)\ x+2-\nu=0$$

も成り立つときに限り成立する。したがって、等号条件は連立系 $(\alpha),(\beta),(\gamma);$(i) である。これは ($EC_7$) に他ならない。

この導出を遡ると、逆も導かれる。

4 おわりに

ここで、突然ではあるが、最小二乗法について考えてみよう。いま、n 個のデータ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ が与えられたとする。ただし $n\geq 2$ で、$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ はすべて等しいとは限らないとする。最小二乗法では偏差の二乗和を最小にする直線 $x=\alpha$ を当てはめている。すなわち、最適な係数 α をデータで表わしている。α を x に置き換えると、この問題は最小化問題

$$\text{(P)}\qquad \text{minimize}\ \sum_{k=1}^{n}(a_k-x)^2\ \text{ subject to }\ \text{(i)}\ \ x\in R^1$$

になる。この双対問題として最大化問題

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Maximize} & -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^2+2a_k\lambda_k\right) \\
\text{(D)} & \text{subject to} & \text{(i)}\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=0 \\
 & & \text{(ii)}\ \lambda\in R^n
\end{array}$$

が考えられる。

特に 3 個のデータ　$0,\ -1,\ -2$　に対する主問題 (P) が

$$\text{(P}_3\text{)}\quad \begin{array}{l}
\text{minimize}\ \ x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 \\
\text{subject to}\quad \text{(i)}\ \ x\in R^1
\end{array}$$

である。この双対問題 (D) が

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Maximize} & -\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu+4\nu \\
\text{(D}_7\text{)} & \text{subject to} & \text{(i)}\ \ \lambda+\mu+\nu=0 \\
 & & \text{(ii)}\ \ (\lambda,\ \mu,\ \nu)\in R^3
\end{array}$$

である。ここでは (P_3) の双対問題として、(D_7) 以外に (D_1), (D_2), …, (D_6) が存在することを示した。3平方和の最小化問題の双対問題は7つ存在する：

$$ {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 3+3+1 = 7 = 2^3 - 1. $$

一般に、n 平方和の最小化問題 (P) では双対問題は $(2^n - 1)$ 個考えられる：

$$ {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - 1. $$

なお、冒頭の1平方の最小化問題 (P_1) からは双対問題 (D_1) が導かれ、2平方和の最小化問題 (P_2) からは3つの双対問題 (D_1), (D_2), (D_3) が導かれる。

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] R.E. Bellman and Wm. Karush, On a new functional transform in analysis : the maximum transform, Bull. Amer. Math. Soc. 67(1961), 501-503.

[3] R.E. Bellman and Wm. Karush, Mathematical programming and the maximum transform, J. SIAM Appl. Math. 10(1962), 550-567.

[4] R.E. Bellman and Wm. Karush, On the maximum transform and semigruops of transformations, Bull. Amer. Math. Soc. 68(1962), 516-518.

[5] R.E. Bellman and Wm. Karush, Functional equations in the theory of dynamic programming -XII: an application of the maximum transform, J. Math. Anal. Appl. 6(1963), 155-157.

[6] R.E. Bellman and Wm. Karush, On the maximum transform, J. Math. Anal. Appl. 6(1963), 57-74.

[7] J.M. Borwein and A.S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization Theory and Examples*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] W. Fenchel, *Convex Cones, Sets and Functions*, Princeton Univ. Dept. of Math, NJ, 1953.

[9] 岩本 誠一、最適化の数理II ベルマン方程式 (Mathematics for Optimization II Bellman Equation)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書5」, 知泉書館, 2013年11月, pp.451.

[10] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[11] R.T. Rockafeller, *Conjugate Duality and Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1974.