数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 1-10

On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolutions

疋田辰之 (京都大学)

1 Motivation

本稿では conical symplectic resolution と呼ばれる代数多様体のコホモロジー環を別の conical symplectic resolution の代数幾何を用いて記述する予想について説明する. と言ってもこの予想の主張自体は他の研究集会の報告集などで書いているので, ここでは予想の背景や動機となった部分について主に説明したい. ただしこれらはあくまでも背景や動機であって, この予想と意味のある形で関係しているかどうかは現時点では不明である.

1.1 Shuffle conjecture

組み合わせ論においてシャッフル予想と呼ばれる問題がある. これは diagonal coinvariant の環 $DR_n=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]/(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]_+^{\mathfrak{S}_n})$ の Frobenius 級数に関係する 2 種類の組み合わせ論的な式の間の等式であり, Haglund-Haiman-Loehr-Remmel-Ulyanov [9] が予想し, Carlsson-Mellit [6] によってその証明がアナウンスされている. ここで, $(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]_+^{\mathfrak{S}_n})$ は対角的な n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用に関する不変式であって定数項が 0 なもので生成されるイデアルである. この予想の詳細はここではあまり重要ではないが, 一応ちゃんとした形で述べておく.

等式の片側の記述には (modified) Macdonald 多項式を用いる. 分割 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$, $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots$, に対して modified Macdonald 多項式 $\tilde{H}_\mu=\tilde{H}_\mu(z;q,t)$ と呼ばれる $\mathbb{Q}(q,t)$ 係数の対称関数が次の条件で一意的に定まる.

1. $\tilde{H}_\mu[(1-q)Z]\in\mathbb{Q}(q,t)\{s_\lambda\mid\lambda\geq\mu\}$,
2. $\tilde{H}_\mu[(1-t)Z]\in\mathbb{Q}(q,t)\{s_\lambda\mid\lambda\geq{}^t\mu\}$,
3. $\tilde{H}_\mu[1]=1$.

ここで $(-)[(1-q)Z]$ 等は plethystic substitution と呼ばれる対称関数環の自己準同型であり, 冪和対称関数 p_k に対して $p_k[(1-q)Z]=(1-q^k)p_k$, $p_k[1]=1$ 等によって定まるものである. また, s_λ は Schur 多項式であり, ${}^t\mu$ は μ の転置である.

$\tilde{H}_\mu$ たちは $\mathbb{Q}(q,t)$ 係数の対称関数環の基底をなす. そこで, ナブラ作用素と呼ばれる対称関数環に働く線形作用素 ∇ を次で定める.

$$\nabla\tilde{H}_\mu=t^{n(\mu)}q^{n({}^t\mu)}\tilde{H}_\mu.$$

ここで $n(\mu)=\sum_i(i-1)\mu_i$ である. e_n を n 次基本対称式とすると, ∇e_n は次のように表されることが知られている.

Proposition 1 (cf. Haglund [8]).

$$\nabla e_n = \sum_{\mu \vdash n} \frac{(1-q)(1-t)\Pi_\mu B_\mu \tilde{H}_\mu}{\prod_{x\in\mu}(1-t^{l(x)+1}q^{-a(x)})(1-t^{-l(x)}q^{a(x)+1})}. \tag{1}$$

ここで $\Pi_\mu = \prod_{(0,0)\neq(r,s)\in\mu}(1-q^r t^s)$, $B_\mu = \sum_{(r,s)\in\mu} q^r t^s$ であり, $a(x)$ は arm length, $l(x)$ は leg length である. また, 分割 μ はその Young 図形 $\{(i,j)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 0\leq j<\mu_{i+1}\}$ と同一視している.

これがシャッフル予想が主張する等式の片側であり, もう一方は parking function と呼ばれる組み合わせ論的な対象を用いて記述される. $\delta_n = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ を階段型の分割とし, そこに含まれる Young 図形 $\lambda \subset \delta_n$ を考える. 例えばこのような分割は Dyck path と自然に対応し, その数は Catalan 数だけある. そしてそのような λ に対し, 歪 Young 図形 $\lambda + (1^n)/\lambda$ 上の半標準 Young 盤 T を考える. 本来の parking function の定義は正整数の列 $(f_1, \ldots, f_n)$ であって $\#\{j \mid f_j \leq i\} \geq i$ を満たすもののことであるが, これが上のような T と 1 対 1 に対応していることは簡単にわかる.

2 つの箱 $x, y \in \lambda + (1^n)/\lambda$ が T に関して d-inversion をなすとは, $T(x) < T(y)$ であって

- $d(y) = d(x)$ かつ, x が y より右にある
- $d(y) = d(x) + 1$ かつ, x が y より左にある

のいずれかを満たすことを言う. ここで $x = (i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $d(x) = i + j$ である. T に対して $\mathrm{dinv}(T)$ をその d-inversion の個数とする (dinv statistic と呼ばれる). これを用いて次のように対称関数を定義する.

$$D_n(z; q, t) := \sum_{\lambda\subset\delta_n} \sum_{T\in \mathrm{SSYT}(\lambda+(1^n)/\lambda)} t^{|\delta_n/\lambda|} q^{\mathrm{dinv(T)}} z^T. \tag{2}$$

ここで $\mathrm{SSYT}(\lambda+(1^n)/\lambda)$ は $\lambda + (1^n)/\lambda$ 上の半標準 Young 盤全体の集合, $|\delta_n/\lambda|$ は δ_n/λ の箱の数 (area statistic と呼ばれる) であり, $z^T = \prod_{x\in\lambda+(1^n)/\lambda} z_{T(x)}$ である. 定義からはこれが対称関数を定めることは自明ではないが, それは証明することができる.

以上の準備の元で, シャッフル予想は次のように述べられる.

Theorem 2 (Shuffle conjecture, Carlsson-Mellit [6]).

$$\nabla e_n = D_n(z; q, t). \tag{3}$$

(1) を見ればこの等式の左辺は (最終的に全て打ち消すことがわかってはいるが) 様々な分母を持つものの和になっているのに対し, 右辺に現れるのは q と t に関する正の整数係数の多項式となっている. 一方で左辺は q と t の入れ替えに関して対称であることが容易に見て取れるが, 右辺が q,t-対称であることを直接証明する, つまり parking function の間の involution であって dinv statistic と area statistic を入れ替えるものを構成することは難しい問題である.

既に述べたようにシャッフル予想自体は [6] によって証明されているが, その証明は組み合わせ論的なものであるように思われる. 一方で (3) の両辺は, ともに由来の異なる幾何学的な記述を持つ. そこでシャッフル予想を異なる幾何を結びつける (不思議な?) 関係が存在することの証拠として捉え, その幾何の間の関係が実際どうあるべきなのかを理解したいというのがこの研究の動機である.

1.2 Hilbert scheme of points in the affine plane

まずは Haiman による (3) の左辺の幾何学的な記述について少し述べる．これには $\mathbb{C}^2$ の n 点の Hilbert スキームの代数幾何を用いる．

$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) := \{I \subset \mathbb{C}[x,y] : \text{ideal} \mid \dim(\mathbb{C}[x,y]/I) = n\}$ を $\mathbb{C}^2$ の n 点の Hilbert スキーム，$\sigma : \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to S^n\mathbb{C}^2$ を I の定める閉部分スキームの support を重複度込みで見ることによって定まる Hilbert-Chow 射とする．ここで $S^n\mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}^2$ の n 次対称積である．ちなみに $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は標題にある conical symplectic resolution の例になっている．$Z_n := \sigma^{-1}(0)$ を punctual Hilbert スキーム，$X_n := (\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \times_{S^n\mathbb{C}^2} \mathbb{C}^{2n})_{\mathrm{red}}$ を isospectral Hilbert スキーム，$\rho : X_n \to \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ を自然な射とする．このとき $P := \rho_* \mathcal{O}_{X_n}$ は局所自由層になることが知られており，これを Procesi 束と呼ぶ．P には自然に $\mathfrak{S}_n$ が作用し，$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ や P 等には自然に $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ が作用する．これと DR_n との関係は次で与えられる．

Theorem 3 (Haiman [10]).

$$H^i(Z_n, P) = \begin{cases} DR_n & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

これにより DR_n の Frobenius 級数 $\mathcal{F}(DR_n; q, t)$ を Atiyah-Bott 型の局所化公式を用いて $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-固定点の寄与の和として計算することができる．

Theorem 4 (Haiman [10]).

$$\mathcal{F}(DR_n; q, t) = \nabla e_n.$$

固定点は n の分割と 1 対 1 に対応しており，(1) の分母に現れる $t^{l(x)+1}q^{-a(x)}$ や $t^{-l(x)}q^{a(x)+1}$ は対応する固定点での余接束のファイバーに現れる指標である．また $\tilde{H}_\mu$ は Procesi 束の固定点でのファイバーの Frobenius 級数であり，分子の残りの部分は $\mathcal{O}_{Z_n}$ の局所自由分解から来ている．

このようにシャッフル予想の左辺は DR_n を $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 上の連接層の大域切断の空間として実現し，その指標を局所化公式を用いて計算したものであると理解できる．このようにして得られる公式は例えば様々な分母を持つものの和として書かれるが，和を計算してみるとそれらの分母は打ち消してなくなるというような特徴を持つ．

1.3 Affine Springer fibers of type A

次にシャッフル予想の右辺の幾何学的な解釈について述べる．それには特別な A 型のアファイン Springer ファイバーの幾何を用いる．

ここでは $G = \mathrm{SL}_n$ とし，$B \subset G$ をその Borel 部分群とする．$\mathrm{ev} : G[\![\epsilon]\!] = G(\mathbb{C}[\![\epsilon]\!]) \to G(\mathbb{C})$ を $\epsilon \mapsto 0$ により定まる写像，$I := \mathrm{ev}^{-1}(B(\mathbb{C})) \subset G(\!(\epsilon)\!) = G(\mathbb{C}(\!(\epsilon)\!))$ を岩堀部分群とする．G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のルート空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus (\oplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha)$ とし，各々から 0 でない元 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を取る．$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ を simple root, $\theta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$ とし，

$$\gamma := \epsilon^2 e_{-\theta} + \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} e_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}[\![\epsilon]\!]$$

とおく．そして γ に付随するアファイン Springer ファイバー Sp_γ を考える．つまり

$$\mathrm{Sp}_\gamma := \{gI \in G(\!(\epsilon)\!)/I \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}(\gamma) \in \mathrm{Lie}(I)\} \subset G(\!(\epsilon)\!)/I$$

とする．これは代数多様体の構造を持ち ([16]), その Borel-Moore ホモロジー $H_*^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Sp}_\gamma, \mathbb{C})$ には通常の Springer ファイバーの場合と同様に $\mathfrak{S}_n$ が作用する ([20]).

W_{aff} をアファイン Weyl 群とし, $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ をその simple reflection とする．写像 $a : W_{\mathrm{aff}} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$a(w) := \max\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid w \geq s_{l-1}s_{l-2}\cdots s_1 s_0\}$$

により定める．ここで s_i の添字は modulo n で考えている．そして $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して閉部分代数多様体 $\mathrm{Sp}_\gamma^{\leq c} \subset \mathrm{Sp}_\gamma$ を

$$\mathrm{Sp}_\gamma^{\leq c} := \mathrm{Sp}_\gamma \cap \Big(\bigcup_{\substack{w \in W_{\mathrm{aff}} \\ a(w) \leq c}} IwI/I \Big)$$

と定める．すると $H_*^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Sp}_\gamma^{\leq c}, \mathbb{C}) \subset H_*^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Sp}_\gamma, \mathbb{C})$ となり, c を動かすことで $H_*^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Sp}_\gamma, \mathbb{C})$ の filtration が得られる．これは $\mathfrak{S}_n$ 作用で保たれ, $\mathrm{gr}_* H_*^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Sp}_\gamma, \mathbb{C})$ は 2 つの次数を持つ $\mathfrak{S}_n$ 加群となる．Sp_γ は affine paving を持つので奇数次の Borel-Moore ホモロジーは消える．

Theorem 5 ([12]).

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}} D_n(z; q^{-1}, t) = \sum_{i,j} t^i q^j \mathcal{F}(\mathrm{gr}_i H_{2j}^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Sp}_\gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{sgn}).$$

証明は Sp_γ のセルと parking function との間に対応を付けることで得られる．これによりシャッフル予想の右辺はアファイン Springer ファイバーのホモロジーを用いて解釈することができる．一般に例えば空間が affine paving を持つような都合のいい場合にはそのホモロジーは各セルに適当な重みを付けて足し上げたものとして計算でき, さらにセルが組み合わせ論な対象と 1 対 1 に対応するならばそれは (2) と似たような形の記述を持つであろうと考えられる．このようにして得られる公式には分母は現れず, 出てくる係数は正の整数になるというような特徴を持つ．

2 Observation

シャッフル予想の両辺の幾何学的な解釈を見れば, 安直にはその 2 つが一致することが分かればシャッフル予想が従うことになる．しかし左辺には Hilbert スキーム上の連接層の大域切断という代数幾何的な対象が現れるのに対し, 右辺にはアファイン Springer ファイバーのホモロジーという位相幾何的な対象が現れており, それらを直接比較することは難しいように思われる．そこで, より問題を広げて次のような漠然とした問いを考える．

Question 6. ある空間上の連接層のコホモロジーと, 別の空間の位相的なコホモロジーが一致するという状況の例は他にも存在するか？

もしそのような例が他に沢山あるのだとすれば, 例えばシャッフル予想の場合のように都合のいい状況では同じものを別の幾何を使って計算することで全く異なる特徴を持つ式の間の非自明な組み合わせ論的等式が得られる可能性があると考えられる．都合のいい状況になっているかどうかはともかく, 以下ではそのような例の候補について説明する．

2.1 Bases in equivariant K-theory of Slodowy varieties

まずは代数幾何側から出発する．G を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし, Borel 部分群 $B \subset G$ を取る．$U \subset B$ を B の冪単根基とし, $\mathcal{N}_G \subset \mathfrak{g}$ を冪零錐, $\widetilde{\mathcal{N}}_G := \{(gB, X) \in$

$G/B \times \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}(X) \in \mathrm{Lie}(U)\}$ を Springer resolution とする．第 2 成分への射影 $\pi : \widetilde{\mathcal{N}}_G \to \mathcal{N}_G$ は特異点解消になっており，これはまた conical symplectic resolution の例を与える．

冪零元 $e \in \mathfrak{g}$ を取り，それを含む $\mathfrak{sl}_2$-triple (e, f, h) を固定する．$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ を f の $\mathfrak{g}$ での centralizer とし，$S_e := \mathcal{N}_G \cap (e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f))$ を e に付随する Slodowy slice とする．Springer resolution を Slodowy slice に制限したもの $\widetilde{S}_e := \pi^{-1}(S_e) \to S_e$ はまた特異点解消になっており，$\widetilde{S}_e$ を Slodowy variety と呼ぶ．これもまた conical symplectic resolution の例を与えている．

C を e, f, h の G の中での centralizer の極大トーラス，$\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$ とし，$H := C \times \mathbb{S}$ とおく．すると $(c, s) \in H$ に対して $(c, s) \cdot (gB, X) = (cs^h gB, s^{-2}\mathrm{Ad}(cs^h)X)$ と定めることにより，H は $\widetilde{S}_e$ に作用する．$R_C := K_C(\mathrm{pt})$, $\mathbb{Z}[v, v^{-1}] = K_{\mathbb{S}}(\mathrm{pt})$, $R_H := K_H(\mathrm{pt}) = R_C[v, v^{-1}]$ とおく．

Lusztig は [21] において $\widetilde{S}_e$ の同変 K 群 $K_H(\widetilde{S}_e)$ に R_C-linear かつ $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-semilinear な involution $\beta : K_H(\widetilde{S}_e) \to K_H(\widetilde{S}_e)$ を定義した．定義には e に関する個別の議論が必要になるためここでは説明しないが，それには $K_H(\widetilde{S}_e)$ へのアファイン Hecke 環の作用や Serre duality から定まる involution $\mathbb{D}$ が用いられる．$K_H(\widetilde{S}_e)$ 上の pairing $(- : -) : K_H(\widetilde{S}_e) \times K_H(\widetilde{S}_e) \to \mathrm{Frac}(R_H)$ を $([\mathcal{F}] : [\mathcal{G}]) = [R\Gamma(\mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G})]$ によって定め，それを用いて pairing $(-\|-) : K_H(\widetilde{S}_e) \times K_H(\widetilde{S}_e) \to \mathrm{Frac}(R_H)$ を $([\mathcal{F}]\|[\mathcal{G}]) = ([\mathcal{F}] : \mathbb{D}\beta[\mathcal{G}])$ により定義する．これを用いて

$$\mathbf{B}^{\pm}_{\widetilde{S}_e} := \{\xi \in K_H(\widetilde{S}_e) \mid \beta(\xi) = \xi, (\xi\|\xi) \in 1 + v^{-1}R_C[\![v^{-1}]\!]\}$$

と定める．$\xi \in \mathbf{B}^{\pm}_{\widetilde{S}_e}$ ならば，各 $\tau \in X^*(C) \subset R_C$ に対して $\pm\tau\xi \in \mathbf{B}^{\pm}_{\widetilde{S}_e}$ である．

次の結果は [21] で予想され，Bezrukavnikov-Mirković [2] で証明されたことのほんの一部分を取り出したものである．

Theorem 7 (Bezrukavnikov-Mirković [2]). $\mathbf{B}^{\pm}_{\widetilde{S}_e}$ は符号を除けば $K_H(\widetilde{S}_e)$ の $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-加群としての基底となり，また $v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}] \in \mathbf{B}^{\pm}_{\widetilde{S}_e}$ となる．ここで $b(e)$ は e に付随する Springer ファイバー $\mathcal{B}_e := \pi^{-1}(e)$ の次元である．

[21] では後半の主張が特別な e について証明されている．放物型部分群 $P \subset G$ であって，その Levi 部分代数 $\mathfrak{l}$ が e, f, h を含み，かつ e が $\mathfrak{l}$ の中で regular であるものが存在することを仮定する．例えば A 型であればこの仮定はいつでも満たされている．このとき $\widetilde{S}_e$ の H-固定点は有限個になる．

$\mathfrak{n}_P$ を $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$ の冪零根基，$\mathfrak{n}_P^-$ をその opposite とする．W を G の Weyl 群とし，W_P を P に付随する W の放物型部分群とする．W^P で W/W_P の minimal length representative の集合を表すことにする．また H の表現 V に対して $\Lambda(V) := \sum_i (-1)^i [\Lambda^i V] \in R_H$ とおく．

Proposition 8 (Lusztig [21]). 上の仮定の元で

$$(v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}]\|v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}]) = \frac{1}{\Lambda(\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P}(f))\Lambda(\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P^-}(f))} \sum_{w \in W^P} v^{-2\ell(w)}. \tag{4}$$

この公式は [21] では $v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}]$ が $\mathbf{B}^{\pm}_{\widetilde{S}_e}$ に入るための条件の後半部分を示すのに使われていたが，これには G/P のコホモロジー（の双対）が右辺に現れていることが見て取れる．一方で $\widetilde{S}_e$ の H-固定点は有限個であるため，この内積は固定点に関する寄与の和として計算することもでき，(1) のような様々な分母を含むものの和として書くこともできる．よってこの等式はシャッフル予想に現れる公式と同じような特徴を持っていると言えなくもない．また $v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}]$ は β で不変であることから，

$$(v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}]\|v^{2b(e)}[\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}]) = [R\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\widetilde{S}_e}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}_e})^\vee] = [\mathbb{C}[S_e]^\vee]$$

となる．ここで $(-)^\vee$ は双対を取ることを意味し，一般に conical symplectic resolution に対してはその構造層の高次のコホモロジーは消えることなどを用いた．よって (4) の両辺の双対を取って $\Lambda(\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P}(f))\Lambda(\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P^-}(f))$ を左辺に移すと

$$\Lambda(\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P}(f)^\vee)\Lambda(\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P^-}(f)^\vee)[\mathbb{C}[S_e]] = [H^*(G/P,\mathbb{C})]$$

となる．ただし右辺はコホモロジーの次数付けを用いて $\mathbb{S}$ の表現と思い直している．またスキーム論的共通部分 $S_e \cap (e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f))$ は S_e の中で $e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P}(f)$ 方向の座標と $e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_P^-}(f)$ 方向の座標を定義方程式としているため，もしこれらが regular sequence になっているとすれば上の式は $[\mathbb{C}[S_e \cap (e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f))]] = [H^*(G/P,\mathbb{C})]$ と書くこともできる．さらにこの両辺は自然に環構造を持っているので，これらが環として同型かどうかを問うのは自然な問題であると思われる．そして実際，次が示せる．

Proposition 9 ([13]). $G = \mathrm{GL}_n$ とする．このとき次数付き環としての同型

$$\mathbb{C}[S_e \cap (e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f))] \simeq H^*(G/P,\mathbb{C})$$

が存在する．ここで左辺は $\mathbb{S}$-作用によって次数付けられている．

2.2 DeConcini-Procesi and Tanisaki's theorem

上の命題を見ると，これは DeConcini-Procesi と Tanisaki による A 型 Springer ファイバーのコホモロジー環の記述とよく似ていることに気付く．$T \subset B$ を極大トーラスとし，$\mathfrak{t}$ をその Lie 代数とする．$\overline{\mathcal{O}}_P := \mathrm{Ad}(G)(\mathfrak{n}_P)$ とおく．このとき次が成り立つ．

Theorem 10 (DeConcini-Procesi [7], Tanisaki [22]). 引き続き $G = \mathrm{GL}_n$ とする．このとき次数付き環として

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_P \cap \mathfrak{t}] \simeq H^*(\mathcal{B}_e,\mathbb{C}).$$

ただし左辺の共通部分はスキーム論的に取っており，次数は $s \in \mathbb{S}$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して $s \cdot X = s^{-2}X$ によって定まる $\mathbb{S}$-作用から来ている．

$\overline{\mathcal{O}}_P$ が $T^*(G/P)$ の affinization であることに注意してこの定理と上の命題を見比べると，ただ単に主張の形が似ているというだけではなく $T^*(G/P)$ と $\widetilde{S}_e$ の役割がそれぞれ対称的に現れていることが見て取れる．つまり $T^*(G/P)$ のコホモロジー環は $\widetilde{S}_e$ の affinization と何かのスキーム論的共通部分の座標環と同型になり，$\widetilde{S}_e$ のコホモロジー環 ($\simeq H^*(\mathcal{B}_e,\mathbb{C})$) は $T^*(G/P)$ の affinization と何かのスキーム論的共通部分の座標環と同型になっていることがわかる．これを見れば背後に何らかの双対性が隠れているのではないかと考えるのは自然であろう．そして実際，$T^*(G/P)$ と $\widetilde{S}_e$ との組は Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3] が symplectic duality と呼んだ双対性の例になっている．

3 Conjecture

上の観察を他の symplectic dual な組に一般化するために，まずは symplectic duality について簡単に説明する．

3.1 Conical symplectic resolutions

$\mathfrak{M}$ を smooth かつ symplectic な代数多様体, ω をその上の symplectic form とする. $\mathfrak{M}$ とそこへの $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$-作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ が conical symplectic resolution であるとは,

- $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $s^*\omega = s^\ell \omega$, $s \in \mathbb{S}$,
- $\pi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0 := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は projective birational,
- $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = 0$,

が成り立つことを言う. ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ は $\mathbb{S}$-weight が i の部分を表し, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = \oplus_{i<0}\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ である. 例としては例えば既に述べた $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ や $\widetilde{\mathcal{N}}_G$, $\widetilde{S}_e$ などがある.

一般的な conical symplectic resolution の性質を幾つか述べる. まず $\mathfrak{M}_0$ は normal であり, 有理特異点を持つ, つまり $R\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_0}$ が成り立つ. $\mathfrak{M}_0$ は唯一の $\mathbb{S}$ 固定点 o を持ち, $\mathfrak{M}$ とその中心ファイバー $\pi^{-1}(o)$ はホモトピー同値になることが知られている. 従って特に $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq H^*(\pi^{-1}(o), \mathbb{C})$ である. また次の Kaledin の結果によって $\mathfrak{M}_0$ は自然な stratification を持つ. ここに現れる strata を symplectic leaf と呼ぶ.

Theorem 11 (Kaledin [14]). 有限個の strata による stratification $\mathfrak{M}_0 = \sqcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ であって各 $\mathfrak{M}_\alpha$ が smooth symplectic になるものが存在する. また任意の $p \in \mathfrak{M}_\alpha$ に対して formal symplectic variety $\hat{Y}_p$ が存在して, $\mathfrak{M}_0$ の p での形式近傍は $\mathfrak{M}_\alpha$ の p での形式近傍と $\hat{Y}_p$ の直積に同型となる.

例えば $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathcal{N}}_G$ の場合, symplectic leaf は冪零軌道で与えられる. また, このとき $\hat{Y}_p$ は Slodowy slice の形式近傍で与えられる.

表現論的には $\mathfrak{M}$ の量子化の表現論を調べることが重要である. ω により $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ は Poisson 代数の構造を持つ. $(\mathfrak{M}, \omega)$ の量子化とは, $\mathfrak{M}$ 上の結合的な平坦 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-代数の (Zariski 位相に関する) 層 $\mathcal{Q}$ であって $\hbar$-進位相に関して完備なものと, 代数としての同型 $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ の組であって, $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q}$ が可換になることから誘導される Poisson 代数の構造が同型 $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ と compatible になるようなものを言う. また $\hbar$ の $\mathbb{S}$-weight を ℓ とすると $\mathbb{S}$-同変な量子化も定義することでき, $\mathbb{S}$-同変な量子化の同型類は Bezrukavnikov-Kaledin [1], Losev [19] によって $H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ で分類されることが知られている.

$\mathfrak{M}_0$ の smooth locus 上にある symplectic form を用いると, smooth locus 上の Poisson 構造が定まるが, $\mathfrak{M}_0$ が normal であることからこれは $\mathfrak{M}_0$ 全体に延びる. 従って $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は Poisson 代数の構造を持つ. $\mathcal{Q}$ を $\mathfrak{M}$ の $\mathbb{S}$-同変な量子化とする. $\mathcal{D} := \mathcal{Q}[\hbar^{-1/\ell}]$ とおき, $\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}(m) := \hbar^{-m/\ell}\mathcal{Q}[\hbar^{1/\ell}]$ により定める. $A := \Gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{D})^{\mathbb{S}}$, $A(m) := \Gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{D}(m))^{\mathbb{S}}$ とおくと, これは filtration $A(0) \subset A(1) \subset \ldots \subset A$ を定め, $\operatorname{gr} A$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ と次数付き Poisson 代数として同型となる. つまり A は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化を与える. 例えば $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathcal{N}}_G$ のとき $H^2(\widetilde{\mathcal{N}}_G, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{t}^*$ であり, $\mathcal{Q}$ が $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対応する量子化ならば $A \simeq U(\mathfrak{g})/(\operatorname{Ker}\chi_\lambda)$ となる. ここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環であり, $Z(\mathfrak{g})$ をその中心とすると $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ は highest weight $\lambda - \rho$ の Verma 加群の中心指標である. ただし ρ は全ての正ルートの和の 1/2 倍である (cf. [4]).

3.2 Symplectic duality

Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3] の文脈では conical symplectic resolution に別の良い $\mathbb{T} := \mathbb{C}^*$-作用が入る状況を考える. $\mathbb{T}$ の作用は category $\mathcal{O}$ の類似を定義するのに用いられる. 以下, conical symplectic resolution とそこへの $\mathbb{T}$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ に次の条件を仮定する.

- $\mathbb{T}$ の $\mathfrak{M}$ への作用は Hamiltonian であり, $\mathbb{S}$ の作用と可換.
- $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}$ は有限集合.
- $\mathfrak{M}_0$ の minimal symplectic leaf は $\{o\}$.

例えば $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は最後の条件を満たしていないので, $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の代わりに重心が原点になるものからなる部分多様体 $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ を考える.

$\mathbb{T}$-作用を用いると $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化 A にも $\mathbb{T}$ が作用する. その weight への分解を $A=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}A^i$ と書き, $\mathcal{O}$ を有限生成 A 加群であって $A^{\geq 0}$ が locally finite に作用するものからなる圏とする. 例えば $\mathfrak{M}=\widetilde{\mathcal{N}}_G$ で量子化のパラメータが regular のとき, $\mathcal{O}$ は BGG category $\mathcal{O}$ と圏同値になる.

Conjecture 12 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). 上の条件を満たす $(\mathfrak{M},\mathbb{S},\mathbb{T})$ に対して, 別の $(\mathfrak{M}^!,\mathbb{S}^!,\mathbb{T}^!)$ が存在して, 例えば十分良い量子化のパラメータについて $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}^!$ は Koszul dual になる等の性質 (詳細は [3] を参照) を満たす. ただし $\mathcal{O}^!$ は $\mathfrak{M}^!$ に対する category $\mathcal{O}$ である.

$(\mathfrak{M}^!,\mathbb{S}^!,\mathbb{T}^!)$ を $(\mathfrak{M},\mathbb{S},\mathbb{T})$ の symplectic dual と呼ぶ. そして以下のような例が symplectic dual になると考えられている.

Example 13. $\widetilde{\mathcal{N}}_G$ と $\widetilde{\mathcal{N}}_{G^\vee}$ は (適当な $\mathbb{C}^*$-作用の取り方に関して) symplectic dual. ここで $G^\vee$ は G の Langlands 双対である.

Example 14. §2.1 の記号で $G=\mathrm{GL}_n$ のとき, $\widetilde{S}_e$ と $T^*(G/P)$ は symplectic dual. より一般に A 型 S3 variety と呼ばれる Slodowy variety の放物版は別の A 型 S3 variety と symplectic dual.

Example 15. $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ は自分自身と symplectic dual.

Example 16. $\mathbb{C}^{2n}$ のトーラスによる Hamiltonian reduction であって smooth なもの (hypertoric variety と呼ばれる) は別の hypertoric variety と symplectic dual.

最後に § 2 の観察を一般化する予想を述べる.

Conjecture 17 ([13]). $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{M}^!$ が symplectic dual のとき, 次数付き代数として

$$H^*(\mathfrak{M},\mathbb{C})\simeq\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0^!)^{\mathbb{T}^!}],$$
$$H^*(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C})\simeq\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}].$$

ここで右辺の次数はそれぞれ $\mathbb{S}^!$, $\mathbb{S}$ の作用から定まるものであり, 固定点はスキーム論的に考えている.

Theorem 18 ([13]). この予想は A 型 S3 variety, hypertoric variety, $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合に正しい.

証明は各々の場合に知られているコホモロジー環の記述を用いて明示的に同型を作ることにより得られる. 各々のコホモロジー環の記述は, A 型 S3 variety の場合は [5], hypertoric variety の場合は [11] や [17], $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合は [18] や [23] で知られている. また, Kamnitzer-Tingley-Webster-Weekes-Yacobi [15] はこの予想の上半分を $\mathfrak{M}$ が ADE 型 quiver variety の場合に証明している.

References

[1] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, Fedosov quantization in algebraic context, Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 559–592

[2] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, Representations of semisimple Lie algebras in prime characteristic and the noncommutative Springer resolution, Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 3, 835–919

[3] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions II: category $\mathcal{O}$ and symplectic duality, arXiv:1407.0964

[4] T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure, arXiv:1208.3863

[5] J. Brundan, V. Ostrik, Cohomology of Spaltenstein varieties, Transform. Groups, 16 (2011), 619–648

[6] E. Carlsson, A. Mellit, A proof of the shuffle conjecture, arXiv:1508.06239

[7] C. DeConcini, C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, Invent. Math., 64 (1981), 203–219

[8] J. Haglund, The q,t-Catalan numbers and the space of diagonal harmonics, University Lecture Series, 41. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. viii+167 pp

[9] J. Haglund, M. Haiman, N. Loehr, J. B. Remmel, A. Ulyanov, A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants Duke Math. J., 126 (2005), no. 2, 195–232

[10] M. Haiman, Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane, Invent. Math. 149, no. 2 (2002), 371–407

[11] T. Hausel, B. Sturmfels, Toric hyperKähler varieties, Doc. Math., 7 (2002), 495–534

[12] T. Hikita, Affine Springer fibers of type A and combinatorics of diagonal coinvariants, Adv. Math. 263 (2014), 88–122

[13] T. Hikita, An algebro-geometric realization of the cohomology ring of Hilbert scheme of points in the affine plane, arXiv:1501.02430

[14] D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view, J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135–156

[15] J. Kamnitzer, P. Tingley, B. Webster, A. Weekes, O. Yacobi, Highest weights for truncated shifted Yangians and product monomial crystals, arXiv:1511.09131

[16] D. Kazhdan, G. Lusztig, Fixed point varieties on affine flag manifolds, Israel J. Math. 62 (1988), no. 2, 129–168

[17] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds, Internat. J. Math., 11 (2000), 1001–1026

[18] M. Lehn, C. Sorger, Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes, Duke Math. J., 110 (2001), 345–357

[19] I. Losev, Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions, Adv. Math. 231 (2012), no. 3-4, 1216–1270

[20] G. Lusztig, Affine Weyl groups and conjugacy classes in Weyl groups, Transform. Groups 1 (1996), no. 1-2, 83–97

[21] G. Lusztig, Bases in equivariant K-theory. II, Represent. Theory., 3 (1999), 281–353

[22] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, Tôhoku Math. J. (2), 34 (1982), 575–585

[23] E. Vasserot, Sur l'anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de $\mathbf{C}^2$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), 7–12