数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 11-17

Kempf-Laksov determinant formula in the infinitesimal cohomology theories

松村朝雄

平成 28 年 1 月 30 日

概 要

本稿では, Thomas Hudson 氏との共同研究に基づいて, 無限小コホモロジーにおける Kempf-Laksov 公式について解説する.

1 背景

シューベルト類の行列式公式は Giambelli の論文 [2] まで遡る. Giambelli は, グラスマン多様体のチャウ環におけるシューベルト類を, シュア多項式の Jacobi-Trudi 公式に類似する行列式で表した. 1974 年の Kempf-Laksov の論文 [6] では, Giambeli の公式はあるベクトル束 E に付随したグラスマン束 $\mathrm{Gr}(E)$ 内の「退化跡」に拡張された. Kempf-Laksov の公式は, チャウ環における退化跡類を, E や $\mathrm{Gr}(E)$ の同語反復ベクトル束のセグレ類で表したものだった. トーラス同変のチャウ環の構成方法を考えれば, Kempf-Laksov の退化跡の行列式公式は, そのまま同変シューベルト類の行列式公式を与えることも理解できる. また 2015 年には, Hudson 氏, 池田氏, 成瀬氏と本稿著者らによって, Kempf-Laksov の行列式公式が K 理論にまで拡張できることが示された [4].

[4] の手法は, Levine-Morel の「向き付きコホモロジー理論 (oriented cohomology theory)」の枠組みで適用できることが期待されており, 最終的には「代数的コボルディズム」における Kempf-Laksov 公式を導くことが, 本研究の目標である.

その前段階として, 本稿では, 向き付きコホモロジー理論の一例である「無限小コホモロジー (infinitesimal cohomology)」を考える. そこでは, 特異点をもつ退化跡の基本類が一般には定義されていない. そこで, Kempf-Laksov によって用いられた特異点解消の基本類を退化跡類の類似と考え, セグレ類を成分としてもつ行列式公式を導く.

その応用として, Schur 多項式や Grothendieck 多項式の, 無限小コホモロジーにおける類似を定義することができる. 今後, その多項式の組み合わせ論的な研究が望まれる.

2 無限小コホモロジー

2.1 向き付きコホモロジー理論と代数的コボルディズム

向き付きコホモロジー理論は, 体 $\mathbf{k}$ 上の滑らかなスキームの圏 $\mathbf{Sm_k}$ から次数付き可換環の圏への半変関手 A^* であり, 加えて, 射影射 f に対しては「押し出し射 f_*(pushforward)」が定義され, 幾つかの自然な公理が満たされているものである. 詳しくは [1, 3, 8] を参照されたい. 本稿では $\mathbf{k}$ の標数は 0 とする.

一般に, 向き付きコホモロジー理論 A^* では, ベクトル束 E のチャーン類 $c_i(E)$ が定義される. L を直線束, s をそのゼロ切断とした時, 1 次チャーン類 $c_1(L)$ は $s^*s_*(1)$ である. 直線束 L, M のテンソル積 $L\otimes M$ の 1 次チャーン類は, 以下の形式群則によって特徴づけられている.

定義 2.1. R を単位元をもつ可換環とする. 今, 不定元 u, v に対し, 無限級数 $F_R(u,v) \in R[[u,v]]$ を考える. 対 (R, F_R) は, 以下の公理を満たす時, 階数 1 の可換形式群則と呼ばれる：

(1) $F_R(u,0) = u = F_R(0,u)$;

(2) $F_R(u,v) = F_R(v,u)$;

(3) $F_R(F_R(u,v),w) = F_R(u, F_R(v,w))$.

今, A^* を任意の向き付きコホモロジー理論とした時, $R := A^*(\mathrm{Spec}\,\mathbf{k})$ には形式群則 $F_R(u,v)$ が定まり,

$$c_1(L \otimes M) = F_R(c_1(L), c_1(M))$$

が成り立つ.

Levine-Morel の向き付きコホモロジー理論における一つの功績は, 「代数的コボルディズム Ω^*」の構成と, それが普遍的な向き付きコホモロジー理論を与え, $\Omega^*(\mathrm{Spec}\,\mathbf{k})$ を普遍的な形式群則である Lazard 環 $(\mathbb{L}, F_{\mathbb{L}})$ と同一視できることを示したことである. 本稿においてのその重要な性質は, 代数的コボルディズム Ω^* から任意の向き付きコホモロジー理論が誘導されることである. すなわち, (R, F_R) を任意の形式的群則としたとき, 形式群則を保つ射 $\mathbb{L} \to R$ があって,

$$A^*(X) := \Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{L}} R$$

は向き付きコホモロジー理論を定める.

2.2 形式群則と Lazard 環

Lazard によって, 普遍な階数 1 の可換形式群則 $(\mathbb{L}, F_{\mathbb{L}})$ が存在し, $\mathbb{L}$ は加算個の不定元の多項式環と同型であることが示された [7]. Lazard 環 $\mathbb{L}$ の構成方法は以下のように代数的には簡明である.

定義 2.2. $a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$ を不定元とし, その多項式環 $\mathbb{Z}[a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}]$ を考える. 次数は $\deg a_{ij} = -i-j+1$ で与える. このとき, Lazard 環 $\mathbb{L}$ は $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ を

$$F_{\mathbb{L}}(u,v) = u + v + \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} u^i v^j$$

が形式群則 (1)(2)(3) を満たすように定めた a_{ij} たちの関係式による商環と定める.

無限小コホモロジー I_n^* を定義するために, 商環 $Q_n := \mathbb{Z}[\alpha_n]/(\alpha_n^2)$ を考え, 以下の全射な準同型を与える：

$$\mathbf{q}_n : \mathbb{L} \twoheadrightarrow Q_n : \quad a_{i,j} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{d_n}\binom{i+j}{i}\alpha_n & -i-j+1 = -n \text{ の時} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

ここでは d_n は $n = p^e - 1$ (p は素数, $e \in \mathbb{Z}$) のときは, $d_n = p$ とし, それ以外は $d_n = 1$ とした. 射影 $\mathbf{q}_n$ は, Q_n に $F_{Q_n}(u,v) := \mathbf{q}_n(F_{\mathbb{L}}(u,v))$ という形式群則を定める.

定義 2.3. 無限小コホモロジー I_n は

$$I_n^*(X) := \Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{L}} Q_n$$

によって定義される.

以下, 簡単のため $n=2m$ とする.

$$\gamma_i^{(2m)} := \frac{1}{d_{2m}}\left(\binom{2m}{i} - (-1)^i\right)$$

と置くと, Q_{2m} に自然に誘導される形式群則は,

$$F_{Q_{2m}}(u,v) = (u+v)\left(1+\alpha_{2m}\sum_{i=1}^{2m-1}\gamma_i^{(2m)}u^iv^{2m-i}\right)$$

で与えられる. すなわち, L, M を X 上の直線束とすると, $I_{2m}^*(X)$ における $L\otimes M$ の1次チャーン類は

$$c_1(L\otimes M) = (c_1(L)+c_1(M))\left(1+\alpha_{2m}\sum_{i=1}^{2m-1}\gamma_i^{(2m)}c_1(L)^ic_1(M)^{2m-i}\right)$$

で表される. $L^\vee$ を L の双対束とすると, $c_1(L^\vee) = -c_1(L)$ であることに注意したい.

べき和対称多項式を

$$p_l(x_1,\cdots,x_e) := \sum_{i=1}^{e} x_i^l, \quad l>0.$$

と表す. ただし, 本稿では $p_0(x_1,\ldots,x_e)=1$ とおく. p_l は対称多項式なので, $x_1,\ldots,x_e$ をベクトル束 E のチャーン根だと考えた時,

$$p_l(E) := p_l(x_1,\cdots,x_e)$$

と書くことにする. $p_l(E)$ は E のチャーン類を使って表されるので, $p_l(E-F)$ も定義することができる. 正整数 l については, $p_l(E-F) = p_l(E) - p_l(F)$ が成り立つことに注意する.

補題 2.4. L を直線束, E を階数 e のベクトル束とする. $\tau := c_1(L)$ とする. この時,

$$c_e(E\otimes L) = \sum_{p=0}^{e} c_p(E)\left(\tau^{e-p} + a_{2m}\sum_{l=1}^{2m-1}\gamma_l^{(2m)}p_l(E)\tau^{e-p+2m-l}\right) \tag{2. 1}$$

が成り立つ.

2.3 チャーン類

ベクトル束の短完全系列 $0\to E\to F\to G\to 0$ に対してはホイットニーの和の公式

$$c(G;t) = c(E;t)c(F;t) \tag{2. 2}$$

が成り立つ. ここで $c(E;t) = \sum_{i=0}^{e} c_i(E)t^i$ はチャーン多項式とする. これにより, $[E]-[F]$ というベクトル束のグロタンディック群の元に対しても

$$c(E-F;t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E-F)t^i = \frac{c(E;t)}{c(F;t)}$$

によって, **相対チャーン類** $c_i(E-F)$ を定義できる. 任意の向き付きコホモロジー理論 A^* について、部分多様体 Y の基本類 $[Y]\in A^*(X)$ はベクトル束 E の最高次チャーン類と一致することがある. 次の補題はその事実を示す.

補題 2.5 (Lemma 6.6.7.[8]). E を X 上の階数 e のベクトル束とし, s を E の切断, Z をその 0 スキームとする. もし X が *Cohen-Macaulay* で Z の余次元が e ならば,

$$c_e(E) = [Z] \in A^e(X).$$

3 セグレ類

Kempf-Laksov の公式を無限小コホモロジーで求めるにあたって、その成分となるセグレ類を定義し、基本的な公式を求めておくことが必要である。

定義 3.1. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $k \geq -e - \ell + 1$ を満たす非負整数 ℓ を選ぶ. ベクトル束 $E \oplus \mathcal{O}^{\ell}$ の双対射影束 $\pi : \mathbb{P}^*(E \oplus \mathcal{O}^{\oplus \ell}) \to X$ を考え, 同語反復直線束 $\mathcal{O}(1)$ の一次チャーン類を $\tau := c_1(\mathcal{O}(1))$ とする. ここで $\mathcal{O}$ は自明な直線束とした。ベクトル束 E の k **次のセグレ類**を

$$\mathcal{S}_k(E) := \pi_*(\tau^{k+e+\ell-1}).$$

で定める. $\mathcal{S}_k(E)$ は ℓ の選び方によらないことを示すことを示すことができる. また、Vishik[9] の公式を使うと, $\mathcal{S}_k(E)$ の母関数 $\mathcal{S}_t(E) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_k(E) t^k$ は以下のように求まる.

補題 3.2. 任意のベクトル束 E について, $I^*_{2m}(X)$ におけるセグレ類は

$$\mathcal{S}_t(E) = c_{-t}(-E)\left(1 - a_{2m}\sum_{l=0}^{2m-1}(-1)^l \gamma_l^{(2m)} p_l(E) t^{-2m+l}\right).$$

を満たす. ここでは $\gamma_0^{(2m)} := \frac{2m+1}{d_{2m}}$ と置いた.

この補題により, 相対セグレ類 $\mathcal{S}_k(E - F)$ を以下の母関数で定めることができる:

$$\mathcal{S}_t(E-F) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_t(E-F)t^k := c_{-t}(F-E)\left(1 - a_{2m}\sum_{l=0}^{2m-1}(-1)^l \gamma_l^{(2m)} p_l(E-F) t^{-2m+l}\right). \quad (3.\ 1)$$

これは

$$\mathcal{S}_t(E-F) = \mathcal{S}_t(E) c_t(F^\vee)\left(1 + a_{2m}\sum_{l=0}^{2m-1}\gamma_l^{(2m)} p_l(F^\vee) t^{-2m+l}\right). \quad (3.\ 2)$$

とも書けることに注意する. セグレ類が射影束による押し出しで定まっていたのと同様に, 相対セグレ類も押し出しで記述できる.

命題 3.3. E, F をそれぞれ階数 e, f のベクトル束とする. 双対射影束 $\pi : \mathbb{P}^*(E) \to X$ に対し, $\mathcal{Q}$ を同語反復直線束とする. この時, 任意の非負整数 s に対し,

$$\pi_*(\tau^s c_f(F^\vee \otimes \mathcal{Q})) = \mathcal{S}_{s+f-e+1}(E-F)$$

が成り立つ.

4 Kempf-Laksov 公式

4.1 退化跡と Kempf-Laksov 特異点解消

X を非特異準射影代数多様体とし, E を X 上の階数 n のベクトル束とする. 階数 d のグラスマン束 $\mathrm{Gr}_d(E) \to X$, すなわち

$$\mathrm{Gr}_d(E) := \{(x, S_x) \mid x \in X, S_x \text{ は } E_x \text{ の } d \text{ 次元部分空間}\}.$$

を考える. S は $\mathrm{Gr}_d(E)$ の同語反復ベクトル束とする. E の部分束の完全旗 $0 = F^n \subset \cdots \subset F^1 \subset E$ を一つ決めておく. ここで上付きの添え字は余階数を表す. 本稿では, ベクトル束の引き戻しは, 同じ記号で書くこととする.

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ を分割とする．ただし，$\lambda_1 \le n-d$ かつ $\lambda_r > 0$ と仮定する．$\mathrm{Gr}_d(E)$ における λ についての退化跡は

$$X_\lambda := \{(x, S_x) \in \mathrm{Gr}_d(E) \mid \dim(F_x^{\lambda_i - i + d} \cap S_x) \ge i, i = 1, \ldots, d\}.$$

によって定義される．

部分旗 $\{F^{\lambda_i - i + d}, i = 1, \ldots, r\}$ に付随した旗束

$$\varpi : Fl(F_\lambda^\bullet) \to \mathrm{Gr}_d(E),$$

は，以下のように定められる．点 $p := (x, S_x) \in \mathrm{Gr}_d(E)$ におけるファイバーは E_p の部分旗 $(D_1)_p \subset \cdots \subset (D_r)_p$ で，$\dim(D_i)_p = i$ と $(D_i)_p \subset F_p^{\lambda_i - i + d}$ を満たすものとする．$D_i, i = 1, \ldots, r$ を $Fl(F_\lambda^\bullet)$ 上の同語反復束とする．この時，$Fl(F_\lambda^\bullet)$ の部分多様体 Y_λ を D_r が S に含まれるような跡とすれば，Y_λ は非特異であり，ϖ を通して，X_λ に双有理なものになることが知られている．チャウ環や K 理論では，$\varpi_*[Y_\lambda] = [X_\lambda]$ であることが知られているが (cf. [4]), 無限小コホモロジー I_n^* や代数的コボルディズム Ω^* においては，X_λ の基本類が定義されていない．よって，本研究では $\varpi_*[Y_\lambda]$ を無限小コホモロジー，もしくは代数的コボルディズムにおける退化跡類の類似として，その公式を求める．

4.2 Kempf-Laksov 公式

前節の記号をそのまま使う．

補題 4.1 (cf. [4])．任意の向き付きコホモロジー理論 $A^*(\mathrm{Gr}_d(E))$ において，

$$[Y_\lambda] = \prod_{i=1}^{r} c_{n-d}((D_i/D_{i-1})^\vee \otimes E/S)$$

が成り立つ．

$\varpi_*[Y_\lambda]$ を記述するために，記号を導入しておく．まず $k \in \mathbb{Z}$ と $\ell = 1, \ldots, n$ に対し，

$$\mathscr{A}_k^{(\ell)} := \mathcal{S}_k((S - E/F^\ell)^\vee)$$

と定める．次に $c^{(i)} = \{c_k^{(i)}, k \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, r\}$ を不定元の集合としたとき，$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して

$$\mathrm{Det}[c_{\ell_1}^{(1)} \cdots c_{\ell_r}^{(r)}] := \det(c_{\ell_i + j - i}^{(i)})_{1 \le i, j \le r}$$

とおく．これはマルチシューア行列式と呼ばれる．

定理 4.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ に対し，

$$\begin{aligned}\varpi_*[Y_\lambda] \quad = \quad & \mathrm{Det}\left[\mathscr{A}_{\lambda_1}^{(k_1)} \cdots \mathscr{A}_{\lambda_r}^{(k_r)}\right] + a_{2m} \sum_{l=-m+1}^{m-1} (-1)^{m+l} \gamma_{m+l}^{(2m)} \times \\ & \left(\sum_{1 \le a < b \le r} \mathrm{Det}\left[\mathscr{A}_{\lambda_1}^{(k_1)} \cdots \mathscr{A}_{\lambda_a + m + l}^{(k_a)} \cdots \mathscr{A}_{\lambda_b + m - l}^{(k_b)} \cdots \mathscr{A}_{\lambda_r}^{(k_r)}\right] \right)\end{aligned}$$

が成り立つ．

4.3 Kempf-Laksov 公式の証明の概要

旗束 $\varpi : Fl(F_\lambda^\bullet) \to \mathrm{Gr}_d(E)$ が射影束の塔

$$\varpi : Fl(F_\lambda^\bullet) = \mathbb{P}(F^{\lambda_r - r + d}/D_{r-1}) \xrightarrow{\varpi_r} \mathbb{P}(F^{\lambda_{r-1}-(r-1)+d}/D_{r-2}) \xrightarrow{\varpi_{r-1}} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\varpi_3} \mathbb{P}(F^{\lambda_2 - 2 + d}/D_1) \xrightarrow{\varpi_2} \mathbb{P}(F^{\lambda_1 - 1 + d}) \xrightarrow{\varpi_1} \mathrm{Gr}_d(E). \qquad (4.\ 1)$$

によって構成できることに注意すれば，塔に沿って補題 4.1 におけるチャーン類を押し出していけば，$\varpi_*[Y_\lambda]$ を計算することができる．塔のステージごとの押し出しを求めた以下の主張は，補題 3.3 と式 (3. 2) より従う．

補題 4.3. D_i/D_{i-1} は $\mathbb{P}(F^{\lambda_i - i + d}/D_{i-1})$ の同語反復直線束であることに注意して，$\tau_i := c_1((D_i/D_{i-1})^\vee)$ とおく．また $\alpha_i := c_{n-d}((D_i/D_{i-1})^\vee \otimes E/S)$ とした時，任意の非負整数 s について，

$$\varpi_{i*}(\tau_i^s \alpha_i) = \sum_{p \geq 0} c_p(D_{i-1}) \left(\mathscr{A}_{\lambda_i + s - p}^{(\lambda_i - i + d)} + a_{2m} \sum_{l=1}^{2m-1} \gamma_l^{(2m)} p_l(D_{i-1}) \mathscr{A}_{\lambda_i + s - p + 2m - l}^{(\lambda_i - i + d)} \right)$$

が成り立つ．

これのステージごとの押し出しを，塔に沿ってまとめて計算し，定理 4.2 の公式の形にするためには，Kazarian[5] の手法を拡張したものを使う ([4] も参照されたい)．厳密な定義は省くが，ϕ_i を

$$\phi_i(t_1^{s_1} \cdots t_r^{s_r}) = \tau_1^{s_1} \cdots \tau_{i-1}^{s_{i-1}} \mathscr{A}_{s_i}^{(\lambda_i - i + d)} \cdots \mathscr{A}_{s_d}^{(\lambda_d - d + d)}, \quad s_1, \ldots, s_{i-1} \geq 0,$$

という，不定元 t_i たちへの代入の写像と定めると，

$$\varpi_{i*}(\tau_i^s \alpha_i) = \phi_i \left(t_i^{\lambda_i + s} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (1 - t_j/t_i) \right) \left(1 + a_{2m} t_i^{2m} \sum_{l=1}^{2m-1} \gamma_l^{(2m)} p_l(-t_1/t_i, \ldots, -t_{i-1}/t_i) \right) \right)$$

と表すことができる．これによって，塔に沿った押し出しが有理関数の計算に置き換えられ，

$$\varpi_*[Y_\lambda] = \phi_1 \left(\mathrm{Det}\left[t_1^{\lambda_1} \cdots t_r^{\lambda_r} \right] + a_{2m} \sum_{l=-m+1}^{m-1} (-1)^{m+l} \gamma_{m+l}^{(2m)} \sum_{1 \leq a < b \leq r} \mathrm{Det}\left[\cdots t_a^{\lambda_a + m + l} \cdots t_b^{\lambda_b + m - l} \cdots \right] \right)$$

のように求まる．これで，定理 4.2 が得られることがわかった．

5 I_{2m}^* におけるシューア多項式の一般化

定義 5.1. $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_d\}$ を不定元とする．任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し，対称多項式 $s_k^{[2m]}(\mathbf{x}) \in Q_{2m}[x_1, \ldots, x_d]^{S_d}$ を以下の母関数で定義する．

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{[2m]}(\mathbf{x}) t^k = \left(1 - \alpha_{2m} \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i \gamma_{2m-i}^{(2m)} p_{2m-i}(\mathbf{x}) t^{-i} \right) \frac{1}{(1 - x_1 t) \cdots (1 - x_d t)}.$$

補題 3.2 の任意のベクトル束 E のセグレ類の母関数と比べれば，$x_1, \ldots, x_d$ を E のチャーン根とすれば

$$\mathcal{S}_k(E) = s_k^{[2m]}(\mathbf{x})$$

であることがわかる．

次に任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ に対し，無限小シューア多項式 $s_\lambda^{[2m]}(\mathbf{x})$ を以下のように定める．

定義 5.2.

$$s_\lambda^{[2m]}(\mathbf{x}) \quad = \quad \mathrm{Det}\left[s_{\lambda_1}^{[2m]}\cdots s_{\lambda_r}^{[2m]}\right] + \alpha_{2m}\sum_{\ell=-m+1}^{m-1}(-1)^{m+\ell}\gamma_{m+\ell}^{(2m)}\sum_{1\le a<b\le r}\mathrm{Det}\left[\cdots s_{\lambda_a+m+\ell}^{[2m]}\cdots s_{\lambda_b+m-\ell}^{[2m]}\cdots\right]$$

$X=\{\mathrm{pt}\}$, $E=\mathbb{C}^n$ という状況では, 同語反復束 $S\to \mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ の双対束 $S^\vee$ のチャーン根を $x_1,\ldots,x_d$ と考えれば, $I_{2m}^*(\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n))$ の Kempf-Laksov 類 $\varpi_*[Y_\lambda]$ は $s_\lambda^{[2m]}(\mathbf{x})$ で与えられる.

今, $\mathcal{P}_d(n)$ を $r\le d$ と $\lambda_1\le n-d$ を満たす分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ 全体とするとき, $\{\varpi_*[Y_\lambda],\lambda\in\mathcal{P}_d(n)\}$ は $I_{2m}^*(\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n))$ の Q_{2m} 上の基底であることが知られている. よって,

$$Q_{2m}[x_1,\ldots,x_d]^{S_d}\to I_{2m}^*(\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n));\quad s_\lambda^{[2m]}(\mathbf{x})\mapsto\begin{cases}\varpi_*[Y_\lambda] & \lambda\in\mathcal{P}_d(n)\\ 0 & \lambda\notin\mathcal{P}_d(n).\end{cases}$$

という全射な準同型が存在る.

一方, $\mathcal{P}_d$ を $r\le d$ を満たす分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ 全体とすれば, $\{s_\lambda^{[2m]}(\mathbf{x}),\lambda\in\mathcal{P}_d\}$ が対称多項式環 $Q_{2m}[x_1,\ldots,x_d]^{S_d}$ の Q_{2m} 上の基底になることも, 代数的に示すことは容易である.

また, 定義 5.1 と定義 5.2 は, factorial Schur/Grothendieck polynomial の類似に拡張することもでき, その場合は, $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ の同変無限小コホモロジーにおける $\varpi_*[Y_\lambda]$ に対応する多項式を定義することもできる.

参考文献

[1] Dai, S., and Levine, M. Connective algebraic K-theory. *J. K-Theory 13*, 1 (2014), 9–56.

[2] Giambelli. Risoluzione del problema degli spazi secanti. *Mem. R. Accad. Sci. Torino 52*, 2 (1902), 171–211.

[3] Hudson, T. A Thom-Porteous formula for connective K-theory using algebraic cobordism. *J. K-Theory 14*, 2 (2014), 343–369.

[4] Hudson, T., Ikeda, T., Matsumura, T., and Naruse, H. Determinantal and Pfaffian formulas of K-theoretic schubert calculus. 2015, `arXiv:1504.02828`.

[5] Kazarian, M. On lagrange and symmetric degeneracy loci. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series* (2000).

[6] Kempf, G., and Laksov, D. The determinantal formula of Schubert calculus. *Acta Math. 132* (1974), 153–162.

[7] Lazard, M. Sur les groupes de Lie formels à un paramètre. *Bull. Soc. Math. France 83* (1955), 251–274.

[8] Levine, M., and Morel, F. *Algebraic cobordism.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[9] Vishik, A. Symmetric operations in algebraic cobordism. *Adv. Math. 213*, 2 (2007), 489–552.