

## シューベルト多様体の Newton-Okounkov 凸体と結晶基底の多面体表示

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻 藤田 直樹 (Naoki Fujita)\*

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

### 概要

本稿は RIMS 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」における講演内容をまとめたものである。シューベルト多様体のある付値に関する Newton-Okounkov 凸体が 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示と一致するという結果を紹介し、その応用として結晶基底の  $*$ -involution に対する付値を用いた意味付けを与える。

### 1 導入.

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその関数体上の付値から作られる凸体であり、Okounkov によって [O1], [O2] において導入された。その後 Kaveh-Khovanskii ([KK1]) および Lazarsfeld-Mustata ([LM]) によって系統的な定義がなされ、トーリック多様体に対する Newton 多面体の拡張として注目されている。トーリック多様体の幾何学的な情報がその Newton 多面体から復元されるため、この凸体も元々の射影多様体の幾何学的な情報を数多く含んでいると考えられている。例えば Newton-Okounkov 凸体の理論を用いることで射影多様体のトーリック退化を系統的に構成することができる ([HK, Corollary 3.14] および [A, Theorem 1] 参照)。しかしながらこの凸体を定義から計算することは非常に大変であり、具体的に計算できる Newton-Okounkov 凸体の例は興味深い対象であると言える。本稿の主結果はシューベルト多様体のある付値に関する Newton-Okounkov 凸体が 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示と一致するというものである。この結果は具体的に計算できる Newton-Okounkov 凸体の新しい例を与えてくれる。

結晶基底を扱う際にはその具体的な実現を与えることが必要不可欠であり、これまで組み合わせ論的対象を用いた様々な実現が発見されてきた。中島-Zelevinsky による多面体表示もその一つであり、結晶基底を具体的な線形不等式系を満たす格子点全体の集合として実現するというものである。量子包絡環  $U_q(\mathfrak{g})$  の下半三角部分  $U_q(\mathfrak{u}^-)$  および既約最高ウェイト加群  $V_q(\lambda)$  について、それらの結晶基底  $B(\infty), B(\lambda)$  を考える。中島-Zelevinsky ([NZ]) は 柏原が論文 [Kas4] において導入した crystal の埋め込み  $\Psi_i : B(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}^\infty$  を考え、その像を具体的な線形不等式系を用いて表示した (これらの用語は 3, 4 節において定義する)。ここで  $\mathbb{Z}^\infty$  は無限階数の  $\mathbb{Z}$ -格子である。その後中島 ([N1]) は  $B(\lambda)$  に対して同様の表示を与えた。これらの表示を  $B(\infty)$  および  $B(\lambda)$  の多面体表示という。本稿では半単純代数群  $G$  の極大冪単部分群  $U^-$  について座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  の付値による像と  $B(\infty)$  の多面体表示が一致することや、対応する Newton-Okounkov 凸体の格子点全体の集合と  $B(\lambda)$  の多面体表示が一致することを紹介する。

シューベルト多様体の Newton-Okounkov 凸体を結晶基底の理論に由来する多面体と結び付ける、という試みは既に Kaveh ([Kav]) によって行われていたものである。Kaveh はシューベルト多様体のある付値に関する Newton-Okounkov 凸体が Littelmann によるストリング多面体と一致することを見出した。このストリング多面体と 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示との差が  $*$ -involution で与えられるため、本稿の結果と Kaveh の結果を対比することで、 $*$ -involution を Newton-Okounkov 凸体の言葉で (正確には対応する付値の言葉で) 解釈することができる。

簡単のため本稿では旗多様体  $G/B$  の Newton-Okounkov 凸体に限って話を進めることにする。実際には Demazure 結晶の多面体表示 ([N2] 参照) を用いることで、いずれの結果もシューベルト多様体  $X(w) \subset G/B$ ,  $w \in W$ , まで自然に拡張することができる。なお本稿の詳細を記述した論文 [F2] を現在執筆中である。

\*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp

## 2 Newton-Okounkov 凸体.

ここでは本稿で扱う Newton-Okounkov 凸体を定義する ([KK1], [KK2], および [HK] 参照).  $G$  を  $\mathbb{C}$  上の連結単連結半単純代数群とし,  $\mathfrak{g}$  をその Lie 環,  $W$  を Weyl 群,  $P$  をウェイト格子,  $E_i, F_i, h_i \in \mathfrak{g}$ ,  $i \in I$ , を Chevalley 生成元とする. ここで  $I$  は Dynkin 図形の頂点集合である. Borel 部分群  $B \subset G$  を固定し, 旗多様体  $G/B$  を考える. 最長元  $w_0 \in W$  の長さを  $N$  とすると,  $G/B$  は複素  $N$  次元の非特異射影多様体である. 優整ウェイト  $\lambda \in P$  に対して,  $G/B$  上の直線束  $\mathcal{L}_\lambda$  を

$$\mathcal{L}_\lambda := (G \times \mathbb{C})/B$$

と定義する. ここで  $B$  の右作用は  $g \in G$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , および  $b \in B$  に対して,

$$(g, c) \cdot b := (gb, \lambda(b)c)$$

により定める. 最高ウェイト  $\lambda$  の既約最高ウェイト  $G$ -加群を  $V(\lambda)$  と書き,  $v_\lambda \in V(\lambda)$  をその最高ウェイトベクトルとする. このとき Borel-Weil の定理により, 大域切断のなす空間  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$  は双対加群  $V(\lambda)^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V(\lambda), \mathbb{C})$  と同型な  $G$ -加群である. さて  $U^- \subset G$  を opposite Borel 部分群  $B^-$  の冪単根基とする. このとき自然な写像  $U^- \rightarrow G/B$ ,  $u \mapsto u \bmod B$ , は開埋め込みである. そのため関数体  $\mathbb{C}(G/B)$  は関数体  $\mathbb{C}(U^-)$  と同一視することができる.

**補題 2.1.** 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} = (i_N, \dots, i_1) \in I^N$  に対し (添え字の順序に注意せよ), 写像

$$\mathbb{C}^N \rightarrow U^-, (t_N, \dots, t_1) \mapsto \exp(t_N F_{i_N}) \cdots \exp(t_1 F_{i_1}),$$

は双有理射である. この双有理射により, 座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  を多項式環  $\mathbb{C}[\mathbb{C}^N] = \mathbb{C}[t_N, \dots, t_1]$  の部分環とみなし, 関数体  $\mathbb{C}(U^-)$  を有理関数体  $\mathbb{C}(\mathbb{C}^N) = \mathbb{C}(t_N, \dots, t_1)$  と同一視する.

$\mathbb{Z}^N$  上の辞書式順序  $\prec$  および  $\prec'$  を次で定義する:  $(a_1, \dots, a_N), (a'_1, \dots, a'_N) \in \mathbb{Z}^N$  に対し,

$$(a_1, \dots, a_N) \prec (a'_1, \dots, a'_N) \iff \text{ある } 1 \leq k \leq N \text{ について, } a_1 = a'_1, \dots, a_{k-1} = a'_{k-1}, a_k < a'_k;$$

$$(a_1, \dots, a_N) \prec' (a'_1, \dots, a'_N) \iff \text{ある } 1 \leq k \leq N \text{ について, } a_N = a'_N, \dots, a_{k+1} = a'_{k+1}, a_k < a'_k.$$

**定義 2.2** (highest term valuation). 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} \in I^N$  に対し, 補題 2.1 を用いて関数体  $\mathbb{C}(G/B)$  を有理関数体  $\mathbb{C}(t_N, \dots, t_1)$  と同一視する. さらに上で定義した  $\mathbb{Z}^N$  上の辞書式順序  $\prec$  を用いて,  $t_N, \dots, t_1$  を変数とする単項式たちの間の順序  $\prec$  を次で定義する:

$$t_N^{a_N} \cdots t_1^{a_1} \prec t_N^{a'_N} \cdots t_1^{a'_1} \iff (a_1, \dots, a_N) \prec (a'_1, \dots, a'_N).$$

以上の準備のもとで写像  $v_{\mathbf{i}} : \mathbb{C}(G/B) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^N$  を次のように定める:  $f, g \in \mathbb{C}[t_N, \dots, t_1] \setminus \{0\}$  に対して  $v_{\mathbf{i}}(f/g) := v_{\mathbf{i}}(f) - v_{\mathbf{i}}(g)$  とし,  $f = ct_N^{a_N} \cdots t_1^{a_1} + (\text{lower terms}) \in \mathbb{C}[t_N, \dots, t_1] \setminus \{0\}$  に対して  $v_{\mathbf{i}}(f) := -(a_1, \dots, a_N)$  とする; ここで  $c$  は 0 でない複素数であり, “lower terms” は上で定めた順序に関して  $t_N^{a_N} \cdots t_1^{a_1}$  より小さい単項式たちの線形結合である. このとき  $v_{\mathbf{i}}$  は  $\mathbb{C}(G/B)$  上の付値となる. つまり  $f, g \in \mathbb{C}(G/B) \setminus \{0\}$  および  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  に対して次が成り立つ:

$$(i) \quad v_{\mathbf{i}}(f \cdot g) = v_{\mathbf{i}}(f) + v_{\mathbf{i}}(g).$$

$$(ii) \quad v_{\mathbf{i}}(c \cdot f) = v_{\mathbf{i}}(f).$$

$$(iii) \quad f + g \neq 0 \text{ であれば } v_{\mathbf{i}}(f + g) \geq \min\{v_{\mathbf{i}}(f), v_{\mathbf{i}}(g)\}.$$

ここで (iii) における “min” は  $v_{\mathbf{i}}$  の定義で用いた辞書式順序  $\prec$  に関して小さい方を取る. この付値  $v_{\mathbf{i}}$  を  $\mathbb{Z}^N$  の辞書式順序  $\prec$  に関する **highest term valuation** という. 同様に  $\mathbb{Z}^N$  の辞書式順序  $\prec'$  に関する highest term valuation  $\tilde{v}_{\mathbf{i}}$  が定義される.

次に切断  $\tau_\lambda \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = V(\lambda)^*$  を  $\tau_\lambda(v_\lambda) = 1$  となる最低ウェイトベクトルとする。  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -次数付き  $\mathbb{C}$ -代数  $R(\mathcal{L}_\lambda) := \bigoplus_{k \geq 0} H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda^{\otimes k})$  を考えよう。切断  $\tau_\lambda$  を用いて、  $R(\mathcal{L}_\lambda)_k := H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda^{\otimes k})$  を次のように関数体  $\mathbb{C}(G/B)$  の有限次元  $\mathbb{C}$ -部分空間とみなす：

$$R(\mathcal{L}_\lambda)_k \hookrightarrow \mathbb{C}(G/B), \sigma \mapsto \sigma/\tau_\lambda^k.$$

すると関数体  $\mathbb{C}(G/B)$  上の付値  $v_i, \tilde{v}_i$  は  $R(\mathcal{L}_\lambda)_k \setminus \{0\}$  から  $\mathbb{Z}^N$  への写像を誘導する。

**定義 2.3** (Newton-Okounkov 凸体). 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  を取り、付値  $v$  を  $v_i$  または  $\tilde{v}_i$  のいずれかとする。半群  $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$  を

$$S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda) := \bigcup_{k > 0} \{(k, v(\sigma/\tau_\lambda^k)) \mid \sigma \in R(\mathcal{L}_\lambda)_k \setminus \{0\}\}$$

と定義しよう。さらにこの  $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  を含む最小の実閉錐を  $C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$  とする。つまり、

$$C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda) := \overline{\{c \cdot (k, \mathbf{a}) \mid c \in \mathbb{R}_{>0}, (k, \mathbf{a}) \in S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)\}}$$

である；ただし Euclid 空間の部分集合  $H$  に対して、その Euclid 位相に関する閉包を  $\overline{H}$  とする。ここで  $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  が半群であるため、  $C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  は実凸錐となっていることに注意する。最後に凸集合  $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda) \subset \mathbb{R}^N$  を

$$\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)\}$$

により定める。この  $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  は凸体、つまりコンパクト凸集合となっており ([KK2, Theorem 2.30] 参照), Newton-Okounkov 凸体と呼ばれる。

よく知られているように、直線束  $\mathcal{L}_\lambda$  が非常に豊富であることとウェイト  $\lambda$  が regular であることは同値である。このとき Newton-Okounkov 凸体  $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  は実  $N$  次元の凸体となっている ([KK2, Corollary 3.2]).  $\lambda$  が regular でないとき、その実次元は一般に  $N$  よりも小さくなる。

**注意 2.4.**  $\lambda$  が regular のとき、つまり  $\mathcal{L}_\lambda$  が非常に豊富な直線束のとき、射影空間への閉埋め込み  $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)^*)$  が自然に定義され、  $\mathcal{L}_\lambda$  は Serre のねじり層  $\mathcal{O}(1)$  の引き戻しとなる。 [HK] を含む多くの文献では  $R(\mathcal{L}_\lambda)$  の代わりに、この埋め込みに関する斉次座標環  $R = \bigoplus_{k \geq 0} R_k$  を用いて Newton-Okounkov 凸体を定義している。よく知られているように  $R$  は  $R(\mathcal{L}_\lambda)$  の  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -次数付き部分代数である。しかし  $G/B$  が非特異 (特に正規) であるため、十分大きいすべての  $k$  に対して  $R_k = R(\mathcal{L}_\lambda)_k$  が成り立つ ([Hart, Chapter II, Ex. 5.14]). さらに  $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  が半群であるため、すべての  $k' > 0$  に対し、実錐  $C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v, \tau_\lambda)$  は

$$\bigcup_{k > k'} \{(k, v(\sigma/\tau_\lambda^k)) \mid \sigma \in R(\mathcal{L}_\lambda)_k \setminus \{0\}\}$$

を含む最小の実閉錐と一致する。従ってどちらの次数付き代数を定義に用いても Newton-Okounkov 凸体は同じものとなる。

以上の議論と全く同様にして、一般の正規射影多様体  $X$ 、その上の直線束  $\mathcal{L}$ 、関数体  $\mathbb{C}(X)$  上の付値  $v$ 、および切断  $\tau \in H^0(X, \mathcal{L})$  に対して Newton-Okounkov 凸体  $\Delta(X, \mathcal{L}, v, \tau)$  が定義されることに注意する。

### 3 柏原結晶基底と大域結晶基底.

ここでは [Kav] および本稿の議論で本質的な役割を果たす、柏原結晶基底および大域結晶基底について説明する ([Kas2], [Kas3], および [Kas4] 参照). まずは [Kas4] において導入された抽象的な crystal の定義を思い出そう。  $\mathfrak{t} := \sum_{i \in I} \mathbb{C}h_i \subset \mathfrak{g}$  とし、  $\mathfrak{t}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$  をその双対空間、  $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{t}^*$  を単純ルートの集合とする。このとき  $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset P \subset \mathfrak{t}^*$  であることに注意する。

定義 3.1 (crystal). 集合  $\mathcal{B}$  と写像

$$\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow P, \varepsilon_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \varphi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\},$$

$$\bar{e}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}, \bar{f}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}, i \in I,$$

が次の性質を満たすとき, 組  $(\mathcal{B}; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \bar{e}_i, \bar{f}_i)$  を **crystal** という:  $i \in I$  および  $b, b' \in \mathcal{B}$  について,

- (i)  $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle \text{wt}(b), h_i \rangle$ .
- (ii)  $\bar{e}_i b \in \mathcal{B}$  ならば  $\text{wt}(\bar{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i, \varepsilon_i(\bar{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \varphi_i(\bar{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$ .
- (iii)  $\bar{f}_i b \in \mathcal{B}$  ならば  $\text{wt}(\bar{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i, \varepsilon_i(\bar{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \varphi_i(\bar{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$ .
- (iv)  $b' = \bar{e}_i b$  と  $b = \bar{f}_i b'$  は同値である.
- (v)  $\varphi_i(b) = -\infty$  ならば  $\bar{e}_i b = \bar{f}_i b = 0$ .

ここで  $-\infty$  および  $0$  はそれぞれ  $\mathbb{Z}$  および  $\mathcal{B}$  に含まれていない付加的な元であり, すべての  $k \in \mathbb{Z}$  に対して  $-\infty + k = -\infty$  とする.

定義 3.2 (strict embedding). crystal  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  に対し, 単射  $\psi : \mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$  が **strict embedding** であるとは, すべての  $i \in I$  および  $b \in \mathcal{B}_1$  に対し,

$$\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b), \varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b), \varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b), \bar{e}_i \psi(b) = \psi(\bar{e}_i b), \bar{f}_i \psi(b) = \psi(\bar{f}_i b)$$

が成り立つことである. ただし  $\bar{e}_i b = 0$  または  $\bar{f}_i b = 0$  のときには,  $\psi(0) = 0$  として考える.

$\mathfrak{t}^*$  上の対称双線形形式  $(\cdot, \cdot)$  を次の条件を満たすように定義する:

- (i) すべての  $i, j \in I$  に対し,  $2(\alpha_j, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) = \langle \alpha_j, h_i \rangle$ ;
- (ii) すべての短単純ルート  $\alpha_i$  に対し,  $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ .

さらに  $i \in I$  および  $s \in \mathbb{Z}$  に対して

$$q_i := q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2}, [s]_i := \frac{q_i^s - q_i^{-s}}{q_i - q_i^{-1}}$$

と書く.

定義 3.3 (量子包絡環). 有限次元半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に対応する量子包絡環  $U_q(\mathfrak{g})$  を  $e_i, f_i, t_i, t_i^{-1}, i \in I$ , で生成され, 以下の関係式を満たす単位的結合  $\mathbb{Q}(q)$ -代数とする:  $i, j \in I$  について,

- (i)  $t_i t_i^{-1} = 1, t_i t_j = t_j t_i$ .
- (ii)  $t_i e_j t_i^{-1} = q_i^{c_{i,j}} e_j, t_i f_j t_i^{-1} = q_i^{-c_{i,j}} f_j$ .
- (iii)  $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{i,j} (t_i - t_i^{-1}) / (q_i - q_i^{-1})$ .
- (iv)  $i \neq j$  ならば  $\sum_{s=0}^{1-c_{i,j}} (-1)^s e_i^{(s)} e_j e_i^{(1-c_{i,j}-s)} = \sum_{s=0}^{1-c_{i,j}} (-1)^s f_i^{(s)} f_j f_i^{(1-c_{i,j}-s)} = 0$ .

ここで  $(c_{i,j})_{i,j \in I}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 行列であり,  $i \in I$  および  $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $[s]_i! := [s]_i [s-1]_i \cdots [1]_i, e_i^{(s)} := e_i^s / [s]_i!,$  および  $f_i^{(s)} := f_i^s / [s]_i!$  と定める. また  $\delta_{i,j}$  は Kronecker の delta である.

量子包絡環  $U_q(\mathfrak{g})$  は次で定まる余積  $\Delta$ , 余単位射  $\varepsilon$ , および対蹠  $S$  により Hopf 代数となる:  $i \in I$  に対し,

$$\begin{aligned}\Delta(e_i) &= e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i, \quad \Delta(t_i) = t_i \otimes t_i, \\ \varepsilon(e_i) &= 0, \quad \varepsilon(f_i) = 0, \quad \varepsilon(t_i) = 1, \\ S(e_i) &= -e_i t_i, \quad S(f_i) = -t_i^{-1} f_i, \quad S(t_i) = t_i^{-1}.\end{aligned}$$

ここで採用した  $\Delta$  は [Kas2] における  $\Delta_-$  と同じものである. 次に  $\{f_i \mid i \in I\}$  で生成される  $U_q(\mathfrak{g})$  の  $\mathbb{Q}(q)$ -部分代数を  $U_q(u^-)$  と書き,  $U_q(\mathfrak{g})$  の  $\mathbb{Q}(q)$ -involution  $-$  および  $\mathbb{Q}(q)$ -anti-involution  $*$  を

$$\begin{aligned}\bar{e}_i &= e_i, \quad \bar{f}_i = f_i, \quad \bar{t}_i = t_i^{-1}, \quad \bar{q} = q^{-1}, \\ e_i^* &= e_i, \quad f_i^* = f_i, \quad t_i^* = t_i^{-1}\end{aligned}$$

と定める. これらの involution はどちらも  $U_q(u^-)$  を保つことに注意する. さて  $i \in I$  および  $u \in U_q(u^-)$  に対して [Kas2, Lemma 3.4.1] より,

$$e_i u - u e_i = \frac{t_i e_i''(u) - t_i^{-1} e_i'(u)}{q_i - q_i^{-1}}$$

となる  $e_i'(u), e_i''(u) \in U_q(u^-)$  が唯一つ存在する. このとき  $e_i'$  および  $e_i''$  は  $U_q(u^-)$  上の線形変換を誘導する. [Kas2, Proposition 3.2.1 および Lemma 3.4.2] より

$$U_q(u^-) = \bigoplus_{k \geq 0} f_i^{(k)} \text{ Ker } e_i'$$

となっている. 以上の準備のもとで,  $U_q(u^-)$  上の作用素  $\bar{e}_i, \bar{f}_i, i \in I$ , を次で定める ([Kas2, §§3.5] 参照):  $u \in \text{Ker } e_i'$  および  $k \geq 0$  に対して,

$$\bar{e}_i(f_i^{(k)} u) := f_i^{(k-1)} u, \quad \bar{f}_i(f_i^{(k)} u) := f_i^{(k+1)} u.$$

ただし  $f_i^{(-1)} u = 0$  とする. これらの作用素を柏原作用素という.  $q = 0$  で正則な  $\mathbb{Q}(q)$  の元全体のなす集合を  $A$  と書き,  $U_q(u^-)$  の  $A$ -部分加群  $L(\infty)$  および  $L(\infty)/qL(\infty)$  の部分集合  $B(\infty)$  を,

$$\begin{aligned}L(\infty) &:= \sum_{\substack{l \geq 0, \\ i_1, \dots, i_l \in I}} A \bar{f}_{i_1} \cdots \bar{f}_{i_l} 1, \\ B(\infty) &:= \{\bar{f}_{i_1} \cdots \bar{f}_{i_l} 1 \bmod qL(\infty) \mid l \geq 0, i_1, \dots, i_l \in I\}\end{aligned}$$

と定義する.

**命題 3.4** ([Kas2, Theorem 4] 参照). 次が成り立つ.

- (1) すべての  $i \in I$  に対し,  $\bar{e}_i L(\infty) \subset L(\infty)$ ,  $\bar{f}_i L(\infty) \subset L(\infty)$ . 特に  $\bar{e}_i, \bar{f}_i, i \in I$ , は  $L(\infty)/qL(\infty)$  に作用する.
- (2) すべての  $i \in I$  に対し,  $\bar{e}_i B(\infty) \subset B(\infty) \cup \{0\}$ ,  $\bar{f}_i B(\infty) \subset B(\infty)$ .
- (3)  $B(\infty)$  は  $L(\infty)/qL(\infty)$  の  $\mathbb{Q}$ -基底である.
- (4) 写像  $\varepsilon_i, \varphi_i : B(\infty) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ,  $i \in I$ , を

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \bar{e}_i^k b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) := \varepsilon_i(b) + \langle \text{wt}(b), h_i \rangle$$

と定めると, 組  $(B(\infty); \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \bar{e}_i, \bar{f}_i)$  は crystal である.

組  $(L(\infty), \mathcal{B}(\infty))$  を  $U_q(u^-)$  の下側結晶基底という。[Kas2, Proposition 5.2.4] および [Kas4, Theorem 2.1.1] より,  $L(\infty)^* = L(\infty)$ ,  $\mathcal{B}(\infty)^* = \mathcal{B}(\infty)$  である。そのため写像

$$\text{wt}, \varepsilon_i^* := \varepsilon_i \circ *, \varphi_i^* := \varphi_i \circ *, \tilde{e}_i^* := * \circ \tilde{e}_i \circ *, \tilde{f}_i^* := * \circ \tilde{f}_i \circ *, i \in I,$$

は  $\mathcal{B}(\infty)$  の上にもう一つの crystal 構造を定める。さて優整ウェイト  $\lambda$  に対して, 最高ウェイト  $\lambda$  の既約最高ウェイト  $U_q(\mathfrak{g})$ -加群を  $V_q(\lambda)$  とし, その最高ウェイトベクトルを  $v_{q,\lambda}$  としよう。ウェイト  $\mu \in P$  のウェイト空間を  $V_q(\lambda)_\mu$  と書くと, すべての  $i \in I$  に対して

$$V_q(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \in P, \\ 0 \leq k \leq \langle \mu, h_i \rangle}} f_i^{(k)}(\text{Ker } e_i \cap V_q(\lambda)_\mu)$$

となっている ([Kas2, §2.2] 参照)。そこで  $V_q(\lambda)$  上の作用素  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, i \in I$ , を次で定める:  $v \in \text{Ker } e_i \cap V_q(\lambda)_\mu$  および  $0 \leq k \leq \langle \mu, h_i \rangle$  に対して,

$$\tilde{e}_i(f_i^{(k)}v) := f_i^{(k-1)}v, \tilde{f}_i(f_i^{(k)}v) := f_i^{(k+1)}v.$$

ただし  $f_i^{(-1)}v = 0$  とする。これらの作用素も柏原作用素という。  $V_q(\lambda)$  の  $A$ -部分加群  $L(\lambda)$  および  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  の部分集合  $\mathcal{B}(\lambda)$  を,

$$L(\lambda) := \sum_{\substack{l \geq 0, \\ i_1, \dots, i_l \in I}} A \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} v_{q,\lambda},$$

$$\mathcal{B}(\lambda) := \{ \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} v_{q,\lambda} \bmod qL(\lambda) \mid l \geq 0, i_1, \dots, i_l \in I \} \setminus \{0\}$$

と定義する。

**命題 3.5** ([Kas2, Theorem 2] 参照)。優整ウェイト  $\lambda$  について, 次が成り立つ。

- (1) すべての  $i \in I$  に対し,  $\tilde{e}_i L(\lambda) \subset L(\lambda)$ ,  $\tilde{f}_i L(\lambda) \subset L(\lambda)$ 。特に  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, i \in I$ , は  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  に作用する。
- (2) すべての  $i \in I$  に対し,  $\tilde{e}_i \mathcal{B}(\lambda) \subset \mathcal{B}(\lambda) \cup \{0\}$ ,  $\tilde{f}_i \mathcal{B}(\lambda) \subset \mathcal{B}(\lambda) \cup \{0\}$ 。
- (3)  $\mathcal{B}(\lambda)$  は  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  の  $\mathbb{Q}$ -基底である。
- (4) 写像  $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ,  $i \in I$ , を

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}, \varphi_i(b) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_i^k b \neq 0\}$$

と定めると, 組  $(\mathcal{B}(\lambda); \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$  は crystal である。

組  $(L(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$  を  $V_q(\lambda)$  の下側結晶基底という。これらの crystal  $\mathcal{B}(\infty), \mathcal{B}(\lambda)$  は互いに密接な関係にある。

**命題 3.6** ([Kas2, Theorem 5] 参照)。優整ウェイト  $\lambda$  に対し,  $\pi_\lambda : U_q(u^-) \rightarrow V_q(\lambda)$  を  $\pi_\lambda(u) = u \cdot v_{q,\lambda}$  により定まる  $U_q(u^-)$ -加群の準同型とする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $\pi_\lambda(L(\infty)) = L(\lambda)$ 。特に  $\pi_\lambda$  は  $\mathbb{Q}$ -線形写像  $\pi_\lambda : L(\infty)/qL(\infty) \rightarrow L(\lambda)/qL(\lambda)$  を誘導する。
- (2)  $\tilde{\mathcal{B}}(\lambda) := \{b \in \mathcal{B}(\infty) \mid \pi_\lambda(b) \neq 0\}$  と書くと,  $\pi_\lambda$  は  $\tilde{\mathcal{B}}(\lambda)$  から  $\mathcal{B}(\lambda)$  の上への全単射を誘導する。
- (3) すべての  $i \in I$  および  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  について,  $\tilde{f}_i \pi_\lambda(b) = \pi_\lambda(\tilde{f}_i b)$ 。
- (4) すべての  $i \in I$  および  $b \in \tilde{\mathcal{B}}(\lambda)$  について,  $\tilde{e}_i \pi_\lambda(b) = \pi_\lambda(\tilde{e}_i b)$ ,  $\varepsilon_i(\pi_\lambda(b)) = \varepsilon_i(b)$ ,  $\varphi_i(\pi_\lambda(b)) = \varphi_i(b) + \langle \lambda, h_i \rangle$ 。

$U_q^{\mathbb{Q}}(u^-)$  を  $\{f_i^{(k)} \mid i \in I, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  で生成される  $U_q(u^-)$  の  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -部分代数とし,  $V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda) := \pi_\lambda(U_q^{\mathbb{Q}}(u^-))$  とする. このとき  $V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda)$  は  $e_i, f_i, (t_i - t_i^{-1})/(q_i - q_i^{-1}), i \in I$ , の作用で閉じている. さて  $V_q(\lambda)$  の  $\mathbb{Q}$ -involution  $-$  を  $\overline{u \cdot v_{q,\lambda}} = \bar{u} \cdot v_{q,\lambda}, u \in U_q(\mathfrak{g})$ , により定めると, 自然な写像

$$\begin{aligned} L(\infty) \cap \overline{L(\infty)} \cap U_q^{\mathbb{Q}}(u^-) &\rightarrow L(\infty)/qL(\infty), \\ L(\lambda) \cap \overline{L(\lambda)} \cap V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda) &\rightarrow L(\lambda)/qL(\lambda) \end{aligned}$$

はどちらも線形同型となっている ([Kas2, Theorem 6]). そこでそれぞれの逆写像を

$$\begin{aligned} G_q^{\text{low}} : L(\infty)/qL(\infty) &\rightarrow L(\infty) \cap \overline{L(\infty)} \cap U_q^{\mathbb{Q}}(u^-), \\ G_{q,\lambda}^{\text{low}} : L(\lambda)/qL(\lambda) &\rightarrow L(\lambda) \cap \overline{L(\lambda)} \cap V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda) \end{aligned}$$

と書くと, 集合  $\{G_q^{\text{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$  および  $\{G_{q,\lambda}^{\text{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$  はそれぞれ  $U_q^{\mathbb{Q}}(u^-)$  および  $V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda)$  の  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -基底となっている. これらを  $U_q(u^-)$  および  $V_q(\lambda)$  の下側大域基底という. 次は下側大域基底の基本的な性質である.

命題 3.7. 優整ウェイト  $\lambda$  について, 次が成り立つ.

- (1) すべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対し,  $G_q^{\text{low}}(b)^* = G_q^{\text{low}}(b^*)$ .
- (2) すべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対し,  $\pi_\lambda(G_q^{\text{low}}(b)) = G_{q,\lambda}^{\text{low}}(\pi_\lambda(b))$ .
- (3) すべての  $i \in I, b \in \mathcal{B}(\lambda)$ , および  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し,

$$\begin{aligned} e_i^{(k)} \cdot G_{q,\lambda}^{\text{low}}(b) &\in \begin{bmatrix} \varphi_i(b) + k \\ k \end{bmatrix}_i G_{q,\lambda}^{\text{low}}(\bar{e}_i^k b) + \sum_{\substack{b' \in \mathcal{B}(\lambda); \text{wt}(b') = \text{wt}(\bar{e}_i^k b), \\ \varphi_i(b') > \varphi_i(\bar{e}_i^k b)}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] G_{q,\lambda}^{\text{low}}(b'), \\ f_i^{(k)} \cdot G_{q,\lambda}^{\text{low}}(b) &\in \begin{bmatrix} \varepsilon_i(b) + k \\ k \end{bmatrix}_i G_{q,\lambda}^{\text{low}}(\bar{f}_i^k b) + \sum_{\substack{b' \in \mathcal{B}(\lambda); \text{wt}(b') = \text{wt}(\bar{f}_i^k b), \\ \varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(\bar{f}_i^k b)}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] G_{q,\lambda}^{\text{low}}(b'). \end{aligned}$$

ここで  $k \leq s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し,

$$\begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_i := \frac{[s]_i [s-1]_i \cdots [s-k+1]_i}{[k]_i [k-1]_i \cdots [1]_i}$$

と定める.

- (4) すべての  $i \in I, b \in \mathcal{B}(\infty)$ , および  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し,

$$\begin{aligned} f_i^{(k)} \cdot G_q^{\text{low}}(b) &\in \begin{bmatrix} \varepsilon_i(b) + k \\ k \end{bmatrix}_i G_q^{\text{low}}(\bar{f}_i^k b) + \sum_{\substack{b' \in \mathcal{B}(\infty); \text{wt}(b') = \text{wt}(\bar{f}_i^k b), \\ \varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(\bar{f}_i^k b)}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] G_q^{\text{low}}(b'), \\ G_q^{\text{low}}(b) \cdot f_i^{(k)} &\in \begin{bmatrix} \varepsilon_i^*(b) + k \\ k \end{bmatrix}_i G_q^{\text{low}}((\bar{f}_i^*)^k b) + \sum_{\substack{b' \in \mathcal{B}(\infty); \text{wt}(b') = \text{wt}((\bar{f}_i^*)^k b), \\ \varepsilon_i^*(b') > \varepsilon_i^*((\bar{f}_i^*)^k b)}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] G_q^{\text{low}}(b'). \end{aligned}$$

#### 4 結晶基底の多面体表示.

この節では 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示について説明する ([NZ] および [N1] 参照). 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $i = (i_N, \dots, i_1)$  を固定し, 次の条件を満たすように  $I$  の元の無限列  $\bar{i} = (\dots, i_k, \dots, i_{N+1}, i_N, \dots, i_1)$  へと拡張する:

- (i) すべての  $k \geq 1$  に対し,  $i_k \neq i_{k+1}$ ;

(ii) すべての  $i \in I$  に対し,  $i_k = i$  となる  $k \geq 1$  が無限個存在する.

この無限列  $\bar{i}$  を用いて,  $\mathbb{Z}^\infty := \{(\dots, a_k, \dots, a_2, a_1) \mid a_k \in \mathbb{Z}, \text{ 十分大きい } k \text{ に対して } a_k = 0\}$  上の crystal 構造を定義する. まず  $k \geq 1, i \in I$ , および  $\mathbf{a} = (\dots, a_j, \dots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}^\infty$  に対し,

$$\begin{aligned}\sigma_k(\mathbf{a}) &:= a_k + \sum_{j>k} \langle \alpha_{i_j}, h_{i_k} \rangle a_j, \\ \sigma^{(i)}(\mathbf{a}) &:= \max\{\sigma_k(\mathbf{a}) \mid k \geq 1, i_k = i\}, \\ M^{(i)}(\mathbf{a}) &:= \{k \geq 1 \mid i_k = i, \sigma_k(\mathbf{a}) = \sigma^{(i)}(\mathbf{a})\}\end{aligned}$$

とする. 十分大きい  $j > 0$  について  $a_j = 0$  であるため,  $\sigma_k(\mathbf{a})$  および  $\sigma^{(i)}(\mathbf{a})$  は整数として well-defined になっている. さらに  $\sigma^{(i)}(\mathbf{a})$  は非負の整数であり,  $M^{(i)}(\mathbf{a})$  が有限集合であることと  $\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > 0$  であることは同値である. 以上の準備のもとで,  $i \in I$  および  $\mathbf{a} = (\dots, a_k, \dots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}^\infty$  に対して

$$\begin{aligned}\text{wt}(\mathbf{a}) &:= -\sum_{k \geq 1} a_k \alpha_{i_k}, \quad \varepsilon_i(\mathbf{a}) := \sigma^{(i)}(\mathbf{a}), \quad \varphi_i(\mathbf{a}) := \varepsilon_i(\mathbf{a}) + \langle \text{wt}(\mathbf{a}), h_i \rangle, \\ \tilde{e}_i(\mathbf{a}) &:= \begin{cases} (a_k - \delta_{k, \max M^{(i)}(\mathbf{a})})_{k \geq 1} & (\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) = 0 \text{ のとき}), \end{cases} \\ \tilde{f}_i(\mathbf{a}) &:= (a_k + \delta_{k, \min M^{(i)}(\mathbf{a})})_{k \geq 1}\end{aligned}$$

とすると, 組  $(\mathbb{Z}^\infty; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$  は crystal である. この crystal を  $\mathbb{Z}_i^\infty$  と書く. 次に優整ウェイト  $\lambda$  および  $i \in I$  に対し,

$$\sigma_0^{(i)} := -\langle \lambda, h_i \rangle + \sum_{k \geq 1} \langle \alpha_{i_k}, h_i \rangle a_k$$

とする. このとき  $i \in I$  および  $\mathbf{a} = (\dots, a_k, \dots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}^\infty$  に対して

$$\begin{aligned}\text{wt}(\mathbf{a}) &:= \lambda - \sum_{k \geq 1} a_k \alpha_{i_k}, \quad \varepsilon_i(\mathbf{a}) := \max\{\sigma^{(i)}(\mathbf{a}), \sigma_0^{(i)}(\mathbf{a})\}, \quad \varphi_i(\mathbf{a}) := \varepsilon_i(\mathbf{a}) + \langle \text{wt}(\mathbf{a}), h_i \rangle, \\ \tilde{e}_i(\mathbf{a}) &:= \begin{cases} (a_k - \delta_{k, \max M^{(i)}(\mathbf{a})})_{k \geq 1} & (\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > 0 \text{ かつ } \sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > \sigma_0^{(i)}(\mathbf{a}) \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}), \end{cases} \\ \tilde{f}_i(\mathbf{a}) &:= \begin{cases} (a_k + \delta_{k, \min M^{(i)}(\mathbf{a})})_{k \geq 1} & (\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > \sigma_0^{(i)}(\mathbf{a}) \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

とすると, これらの写像は  $\mathbb{Z}^\infty$  の上にもう一つの crystal 構造を定める. この crystal を  $\mathbb{Z}_i^\infty[\lambda]$  と書く. 結晶基底  $\mathcal{B}(\infty)$  および  $\mathcal{B}(\lambda)$  はそれぞれ  $\mathbb{Z}_i^\infty$  および  $\mathbb{Z}_i^\infty[\lambda]$  の中に埋め込むことができる.

**命題 4.1** ([NZ, §2.4] 参照). 次が成り立つ.

- (1) crystal の strict embedding  $\Psi_i : \mathcal{B}(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}_i^\infty$  であって,  $\Psi_i(b_\infty) = (\dots, 0, \dots, 0, 0)$  を満たすものが唯一つ存在する. ここで  $b_\infty$  は  $1 \in U_q(\mathfrak{u}^-)$  に対応する  $\mathcal{B}(\infty)$  の元である.
- (2)  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  について  $\Psi_i(b) = (\dots, a_k, \dots, a_2, a_1)$  とすると, すべての  $k \geq 1$  に対して

$$a_k = \varepsilon_{i_k}(\tilde{e}_{i_{k-1}}^{-a_{k-1}} \dots \tilde{e}_{i_1}^{-a_1} b^*)$$

が成り立つ.

**命題 4.2** ([N1, Theorem 3.2] 参照). 優整ウェイト  $\lambda$  について, 次が成り立つ.

- (1) crystal の strict embedding  $\Psi_i^{(\lambda)} : \mathcal{B}(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}_i^\infty[\lambda]$  であって,  $\Psi_i^{(\lambda)}(b_\lambda) = (\dots, 0, \dots, 0, 0)$  を満たすものが唯一つ存在する. ここで  $b_\lambda$  は  $\mathcal{B}(\lambda)$  の最高ウェイト元である.



(2) すべての  $b \in \tilde{B}(\lambda)$  に対し,  $\mathbb{Z}^\infty$  の元として  $\Psi_i^{(\lambda)}(\pi_\lambda(b)) = \Psi_i(b)$  が成り立つ.

これらの strict embedding  $\Psi_i$  および  $\Psi_i^{(\lambda)}$  を柏原埋め込みといい,  $\Psi_i(B(\infty))$  および  $\Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda))$  をそれぞれ  $B(\infty)$  および  $B(\lambda)$  の多面体表示という. 本来 [NZ] や [N1] における “多面体表示” とは, 命題 4.8 および命題 4.9 で述べる  $\Psi_i(B(\infty))$  や  $\Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda))$  の具体的な表示のことであり, 本稿の用語は若干不正確であることを注意しておく. 5, 6 節でみるように  $\Psi_i(B(\infty))$  はある有理凸多面錐の格子点全体の集合であり,  $\Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda))$  はある有理凸多面体の格子点全体の集合となっている.  $i$  が最長元  $w_0$  の簡約語であるため, すべての  $b \in B(\infty)$  に対して  $\tilde{e}_{i_N}^{\max} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{\max} b = b_\infty$  となる ([Kas4, §§3.2] 参照). そのため命題 4.1 (2) および命題 4.2 (2) より,

$$\begin{aligned} \Psi_i(B(\infty)) &\subset \{(\dots, a_k, \dots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}_i^\infty \mid \text{すべての } k > N \text{ に対して } a_k = 0\}, \\ \Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda)) &\subset \{(\dots, a_k, \dots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}_i^\infty[\lambda] \mid \text{すべての } k > N \text{ に対して } a_k = 0\} \end{aligned}$$

となる. そこで次のように  $\Psi_i(B(\infty))$  および  $\Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda))$  を  $\mathbb{Z}^N$  の部分集合と同一視する:

$$\begin{aligned} \Psi_i(B(\infty)) &\hookrightarrow \mathbb{Z}^N, (\dots, 0, 0, a_N, \dots, a_2, a_1) \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_N); \\ \Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda)) &\hookrightarrow \mathbb{Z}^N, (\dots, 0, 0, a_N, \dots, a_2, a_1) \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_N). \end{aligned}$$

記号 4.3. 命題 4.1 (2) および命題 4.2 (2) より, 合成写像

$$\begin{aligned} B(\infty) &\xrightarrow{\Psi_i} \Psi_i(B(\infty)) \hookrightarrow \mathbb{Z}^N, \\ B(\lambda) &\xrightarrow{\Psi_i^{(\lambda)}} \Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda)) \hookrightarrow \mathbb{Z}^N \end{aligned}$$

はどちらも拡張  $\tilde{i}$  の取り方に依らず, 簡約語  $i$  のみから定まる. そこでこれらの写像を単に  $\Psi_i$  および  $\Psi_i^{(\lambda)}$  と書くことにする.

定義 4.4.  $w_0 \in W$  の簡約語  $i \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  に対して, 部分集合  $S_i^{(\lambda)} \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$  を

$$S_i^{(\lambda)} := \bigcup_{k>0} \{(k, \Psi_i^{(k\lambda)}(b)) \mid b \in B(k\lambda)\}$$

により定義する. さらに  $S_i^{(\lambda)}$  を含む最小の実閉錐を  $C_i^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$  とし, 部分集合  $\Delta_i^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^N$  を

$$\Delta_i^{(\lambda)} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in C_i^{(\lambda)}\}$$

と定める.

この  $\Delta_i^{(\lambda)}$  も  $B(\lambda)$  の多面体表示と呼ぶことにする. 実際に  $\Delta_i^{(\lambda)}$  の格子点全体の集合として  $B(\lambda)$  の多面体表示が得られる.

命題 4.5 ([F2] 参照).  $w_0 \in W$  の簡約語  $i \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  に対して,  $\Delta_i^{(\lambda)} \cap \mathbb{Z}^N = \Psi_i^{(\lambda)}(B(\lambda))$  である.

次に  $\Delta_i^{(\lambda)}$  の有界性について述べる.

補題 4.6 ([N1, Theorem 3.1]). 優整ウェイト  $\lambda$  について  $\tilde{B}(\lambda) \subset B(\infty)$  を命題 3.6 (2) で定義した集合とすると,

$$\tilde{B}(\lambda) = \{b \in B(\infty) \mid \text{すべての } i \in I \text{ について } \varepsilon_i(b^*) \leq \langle \lambda, h_i \rangle\}$$

である.

従って命題 4.1 (2) および命題 4.2 (2) より次が成り立つ.

系 4.7.  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} = (i_N, \dots, i_1) \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  に対して,

$$\Delta_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} \subset \{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N \mid \text{すべての } 1 \leq k \leq N \text{ について } 0 \leq a_k \leq \langle \lambda, h_{i_k} \rangle\}$$

である. 特に  $\Delta_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}$  はコンパクト集合となる (5 節でみるように実際には有理凸多面体となっている).

最後に [NZ] および [N1] の主結果である  $\Psi_{\mathbf{i}}(B(\infty))$  および  $\Psi_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}(B(\lambda))$  の具体的な表示について述べる.  
 $k \geq 1$  に対して

$$k^{(+)} := \min\{l > k \mid i_l = i_k\}, \text{ および}$$

$$k^{(-)} := \begin{cases} \max\{l < k \mid i_l = i_k\} & (\text{ある } l < k \text{ について } i_l = i_k \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と書く. 無限次元の  $\mathbb{Q}$ -線型空間

$$\mathbb{Q}^\infty := \{\mathbf{a} = (\dots, a_k, \dots, a_2, a_1) \mid a_k \in \mathbb{Q}, \text{ 十分大きい } k \text{ に対して } a_k = 0\}$$

を考え, その上のアフィン関数  $\beta_k^{(\pm)}(\mathbf{a})$  および  $\lambda^{(i)}(\mathbf{a})$  を

$$\beta_k^{(+)}(\mathbf{a}) := a_k + \sum_{k < j < k^{(+)}} \langle \alpha_{i_j}, h_{i_k} \rangle a_j + a_{k^{(+)}},$$

$$\beta_k^{(-)}(\mathbf{a}) := \begin{cases} a_{k^{(-)}} + \sum_{k^{(-)} < j < k} \langle \alpha_{i_j}, h_{i_k} \rangle a_j + a_k & (k^{(-)} > 0 \text{ のとき}), \\ -\langle \lambda, h_{i_k} \rangle + \sum_{1 \leq j < k} \langle \alpha_{i_j}, h_{i_k} \rangle a_j + a_k & (k^{(-)} = 0 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$\lambda^{(i)}(\mathbf{a}) := \langle \lambda, h_i \rangle - \sum_{1 \leq j < \bar{i}^{(i)}} \langle \alpha_{i_j}, h_i \rangle a_j - a_{\bar{i}^{(i)}}$$

と定める. ここで  $\bar{i}^{(i)} := \min\{k \geq 1 \mid i_k = i\}$  である. 次に  $\mathbb{Q}^\infty$  上のアフィン関数  $\psi$  を  $\psi_0, \psi_1, \dots \in \mathbb{Q}$  を用いて  $\psi(\mathbf{a}) = \psi_0 + \sum_{k \geq 1} \psi_k a_k$  と表示し, 作用素  $\hat{S}_k, k \geq 1$ , を

$$\hat{S}_k(\psi) := \begin{cases} \psi - \psi_k \beta_k^{(+)} & (\psi_k > 0 \text{ のとき}), \\ \psi - \psi_k \beta_k^{(-)} & (\psi_k \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. この作用素  $\hat{S}_k, k \geq 1$ , により  $a_j, j \geq 1$ , から生成される線形関数全体の集合を  $\Xi_{\mathbf{i}}$  とし,  $a_j, j \geq 1$ , および  $\lambda^{(i)}(\mathbf{a}), i \in I$ , から生成されるアフィン関数全体の集合を  $\Xi_{\mathbf{i}}[\lambda]$  とする. つまり

$$\Xi_{\mathbf{i}} := \{\hat{S}_{j_k} \cdots \hat{S}_{j_1} a_{j_0} \mid k \geq 0, j_0, \dots, j_k \geq 1\},$$

$$\Xi_{\mathbf{i}}[\lambda] := \{\hat{S}_{j_k} \cdots \hat{S}_{j_1} a_{j_0} \mid k \geq 0, j_0, \dots, j_k \geq 1\}$$

$$\cup \{\hat{S}_{j_k} \cdots \hat{S}_{j_1} \lambda^{(i)}(\mathbf{a}) \mid k \geq 0, i \in I, j_1, \dots, j_k \geq 1\}$$

である.

命題 4.8 ([NZ, Theorem 3.1]).

$$\Sigma_{\mathbf{i}} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{i}}^\infty \subset \mathbb{Q}^\infty \mid \text{すべての } \psi \in \Xi_{\mathbf{i}} \text{ に対して } \psi(\mathbf{a}) \geq 0\}$$

と書く. このときすべての  $\psi \in \Xi_{\mathbf{i}}$  と  $k^{(-)} = 0$  となる  $k \geq 1$  に対して  $\psi_k = 0$  であれば, 多面体表示  $\Psi_{\mathbf{i}}(B(\infty))$  は  $\Sigma_{\mathbf{i}}$  と一致する.

命題 4.9 ([N1, Theorem 4.1]).

$$\Sigma_{\mathbf{i}}[\lambda] := \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{i}}^\infty[\lambda] \subset \mathbb{Q}^\infty \mid \text{すべての } \psi \in \Xi_{\mathbf{i}}[\lambda] \text{ に対して } \psi(\mathbf{a}) \geq 0\}$$

と書く. このとき  $(\dots, 0, \dots, 0, 0) \in \Sigma_{\mathbf{i}}[\lambda]$  であれば, 多面体表示  $\Psi_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}(B(\lambda))$  は  $\Sigma_{\mathbf{i}}[\lambda]$  と一致する.

## 5 主結果.

本稿の主結果を述べる前に大域結晶基底の  $q = 1$  による特殊化を考え、いくつかの補題を準備する.  $u^- \subset \mathfrak{g}$  を  $U^-$  の Lie 環とし,  $U(u^-)$  をその普遍包絡環とする.  $\mathbb{Q}$ -代数の準同型  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}, q \mapsto 1$ , により  $\mathbb{C}$  を  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -加群とみなすと,  $\mathbb{C}$ -代数としての同型

$$U(u^-) \xrightarrow{\sim} U_q^{\mathbb{Q}}(u^-) \otimes_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]} \mathbb{C}, F_i \mapsto f_i \otimes 1,$$

が得られる. また  $V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda) \subset V_q(\lambda)$  が  $e_i, f_i, (t_i - t_i^{-1})/(q_i - q_i^{-1}), i \in I$ , の作用で閉じていることから,  $\mathbb{C}$ -線形空間  $V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]} \mathbb{C}$  は次で定まる  $\mathfrak{g}$ -加群の構造を持つ:  $i \in I, v \in V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda)$ , および  $c \in \mathbb{C}$  に対し,

$$E_i(v \otimes c) := (e_i v) \otimes c, F_i(v \otimes c) := (f_i v) \otimes c, h_i(v \otimes c) := \left( \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} v \right) \otimes c.$$

この  $\mathfrak{g}$ -加群は  $V(\lambda)$  と同型であることが知られている ([J, Lemma 5.14] 参照).  $G^{\text{low}}(b), b \in \mathcal{B}(\infty)$ , および  $G_\lambda^{\text{low}}(b), b \in \mathcal{B}(\lambda)$ , をそれぞれ  $G_q^{\text{low}}(b), b \in \mathcal{B}(\infty)$ , および  $G_{q, \lambda}^{\text{low}}(b), b \in \mathcal{B}(\lambda)$ , の  $q = 1$  による特殊化とする. つまり

$$\begin{aligned} G^{\text{low}}(b) &:= G_q^{\text{low}}(b) \otimes 1 \in U_q^{\mathbb{Q}}(u^-) \otimes_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]} \mathbb{C} \simeq U(u^-), \\ G_\lambda^{\text{low}}(b) &:= G_{q, \lambda}^{\text{low}}(b) \otimes 1 \in V_q^{\mathbb{Q}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]} \mathbb{C} \simeq V(\lambda) \end{aligned}$$

である. さて普遍包絡環  $U(u^-)$  は次で定める余積  $\Delta$ , 余単位射  $\varepsilon$ , および対蹠  $S$  により Hopf 代数となる:  $i \in I$  に対し,

$$\Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + 1 \otimes F_i, \varepsilon(F_i) = 0, S(F_i) = -F_i.$$

また  $i \in I$  に対して  $e_i \in \mathbb{Z}^I$  を  $i$  の成分のみ 1, 他は 0 として定まるベクトルとすると,  $F_i$  の次数を  $e_i$  とすることで  $U(u^-)$  は  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ -次数付き  $\mathbb{C}$ -代数となる:

$$U(u^-) = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} U(u^-)_{\mathbf{d}}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ -次数付き  $\mathbb{C}$ -代数としての双対

$$U(u^-)_{\text{gr}}^* := \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} U(u^-)_{\mathbf{d}}^*$$

を考えよう.  $U(u^-)$  が Hopf 代数であることから, その双対  $U(u^-)_{\text{gr}}^*$  にも自然に Hopf 代数の構造が入る.  $\{G_\lambda^{\text{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\} \subset H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = V(\lambda)^*$  を  $\{G_\lambda^{\text{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\} \subset V(\lambda)$  の双対基底とし,  $\{G^{\text{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset U(u^-)_{\text{gr}}^*$  を  $\{G^{\text{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset U(u^-)$  の双対基底とする.  $\pi_\lambda: U(u^-) \rightarrow V(\lambda)$  を  $\pi_\lambda(u) = u \cdot v_\lambda$  により定まる  $U(u^-)$ -加群の準同型とすると, 命題 3.7 (2) よりすべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対して  $\pi_\lambda(G^{\text{low}}(b)) = G_\lambda^{\text{low}}(\pi_\lambda(b))$  となっている; ただし  $\pi_\lambda(b) = 0$  のときには  $G_\lambda^{\text{low}}(\pi_\lambda(b)) = 0$  として考える. そのため  $\pi_\lambda^*: H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = V(\lambda)^* \hookrightarrow U(u^-)_{\text{gr}}^*$  を双対写像とすると, すべての  $b \in \tilde{\mathcal{B}}(\lambda)$  に対して  $\pi_\lambda^*(G_\lambda^{\text{up}}(\pi_\lambda(b))) = G^{\text{up}}(b)$  が成り立つ. さて, 座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  も以下で定まる Hopf 代数の構造を持っている:  $f \in \mathbb{C}[U^-]$  および  $u, u_1, u_2 \in U^-$  に対し,

$$\Delta(f)(u_1 \otimes u_2) = f(u_1 u_2), \varepsilon(f) = f(1), S(f)(u) = f(u^{-1}).$$

よく知られているように座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  は Hopf 代数として  $U(u^-)_{\text{gr}}^*$  と同型である. 具体的に同型写像を記述すると次のようになる.

**補題 5.1** ([GLS, Proposition 5.1] 参照). 写像  $\Upsilon: U(u^-)_{\text{gr}}^* \rightarrow \mathbb{C}[U^-]$  を次で定義する:  $\rho \in U(u^-)_{\text{gr}}^*$  および  $x \in u^-$  に対して,

$$\Upsilon(\rho)(\exp(x)) = \sum_{l \geq 0} \rho(x^l)/l!$$

このとき  $\Upsilon$  は Hopf 代数の同型である.

この同型  $\Upsilon$  を通して,  $U(\mathfrak{u}^-)_{\text{gr}}^*$  と  $\mathbb{C}[U^-]$  を同一視する. さて  $\mathbf{i} \in I^N$  を最長元  $w_0 \in W$  の簡約語とし, 補題 2.1 を用いて座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  を多項式環  $\mathbb{C}[t_N, \dots, t_1]$  の部分環と同一視しよう. このとき  $\Upsilon$  を通して,  $G^{\text{up}}(b) \in U(\mathfrak{u}^-)_{\text{gr}}^*$ ,  $b \in \mathcal{B}(\infty)$ , は  $t_N, \dots, t_1$  を変数とする多項式とみなすことができる. 本稿の主結果では大域切断のなす空間  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$  上で付値  $v_i$  の値を取ることが柏原理め込み  $\Psi_i^{(\lambda)}$  に対応し, 座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  上で付値  $v_i$  の値を取ることが柏原理め込み  $\Psi_i$  に対応する.

**補題 5.2.** すべての  $\tau \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$  に対し,  $\mathbb{C}[U^-]$  において  $(\tau/\tau_\lambda)|_{U^-} = (\Upsilon \circ \pi_\lambda^*)(\tau)$  が成り立つ. 特にすべての  $b \in \tilde{\mathcal{B}}(\lambda)$  に対し,  $G_\lambda^{\text{up}}(\pi_\lambda(b))/\tau_\lambda$  の  $U^-$  への制限は  $G^{\text{up}}(b) \in \mathbb{C}[U^-]$  と一致する.

この補題は補題 4.2 (2) の類似となっており, これらを用いることで  $\mathcal{B}(\lambda)$  や  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$  に関する議論を  $\mathcal{B}(\infty)$  や  $\mathbb{C}[U^-]$  に関する議論に帰着させることができる. 次が本稿の主結果である.

**定理 5.3.** 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  について, 次が成り立つ.

- (1) すべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対し,  $\Psi_i(b) = -v_i(G^{\text{up}}(b))$  である. 特に多面体表示  $\Psi_i(\mathcal{B}(\infty))$  は  $-v_i(\mathbb{C}[U^-] \setminus \{0\})$  と一致する.
- (2) すべての  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$  に対し,  $\Psi_i^{(\lambda)}(b) = -v_i(G_\lambda^{\text{up}}(b)/\tau_\lambda)$  である.
- (3) 線形同型  $\omega: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  を  $\omega(k, \mathbf{a}) = (k, -\mathbf{a})$  と定めると,  $\mathcal{S}_i^{(\lambda)} = \omega(S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda))$ ,  $\mathcal{C}_i^{(\lambda)} = \omega(C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda))$ , および  $\Delta_i^{(\lambda)} = -\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)$  が成り立つ.

補題 4.2 (2) および補題 5.2 より, (2) の主張は (1) の主張から直ちに従う. また (3) の主張は (2) の主張からほぼ明らかである. (1) の主張は命題 3.7 (4) の二つ目の主張を繰り返し用いることで証明される. ここで座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  を多項式環  $\mathbb{C}[t_N, \dots, t_1]$  の部分環とみなしたとき, Chevalley 生成元  $F_{i_1}$  の  $\mathbb{C}[U^-]$  への右作用が  $t_1$  に関する偏微分と対応するという事実を用いる.

以降ではこの定理の応用について述べる. まず (3) の主張から次が従う.

**系 5.4.** 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  について, 次が成り立つ.

- (1) 集合  $\mathcal{S}_i^{(\lambda)}$  および  $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)$  は有限生成半群である.
- (2) 実閉錐  $\mathcal{C}_i^{(\lambda)}$  および  $C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)$  は有理凸多面錐であり,

$$S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda) = C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda) \cap (\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N)$$

が成り立つ.

- (3) 多面体表示  $\Delta_i^{(\lambda)}$  および Newton-Okounkov 凸体  $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)$  は有理凸多面体であり, 多面体表示  $\Psi_i^{(\lambda)}(\mathcal{B}(\lambda))$  は  $-\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda) \cap \mathbb{Z}^N$  と一致する.

次の応用として命題 4.9 を用いて Newton-Okounkov 凸体の具体的な表示を与える. 4 節のように簡約語  $\mathbf{i} = (i_N, \dots, i_1)$  の拡張  $\bar{\mathbf{i}} = (\dots, i_k, \dots, i_{N+1}, i_N, \dots, i_1)$  を取る. すべての  $\psi \in \Xi_{\bar{\mathbf{i}}}[\lambda]$  に対して, 定数項  $\psi((\dots, 0, \dots, 0, 0))$  が  $\lambda$  の線形関数とみなせることに注意しよう. 特に  $(\dots, 0, \dots, 0, 0) \in \Sigma_{\bar{\mathbf{i}}}[\lambda]$  のとき, すべての  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して  $(\dots, 0, \dots, 0, 0) \in \Sigma_{\bar{\mathbf{i}}}[k\lambda]$  となっている. よって命題 4.9 から次が従う.

**系 5.5.**  $(\dots, 0, \dots, 0, 0) \in \Sigma_{\bar{\mathbf{i}}}[\lambda]$  のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i^{(\lambda)} &= \omega(S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)) \\ &= \{(k, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N \mid \text{すべての } \psi \in \Xi_{\bar{\mathbf{i}}}[k\lambda] \text{ に対して, } \psi(\dots, 0, 0, a_N, \dots, a_1) \geq 0\}, \\ \mathcal{C}_i^{(\lambda)} &= \omega(C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)) \\ &= \{(k, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N \mid \text{すべての } \psi \in \Xi_{\bar{\mathbf{i}}}[k\lambda] \text{ に対して, } \psi(\dots, 0, 0, a_N, \dots, a_1) \geq 0\}, \\ \Delta_i^{(\lambda)} &= -\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda) \\ &= \{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N \mid \text{すべての } \psi \in \Xi_{\bar{\mathbf{i}}}[\lambda] \text{ に対して, } \psi(\dots, 0, 0, a_N, \dots, a_1) \geq 0\} \end{aligned}$$

が成り立つ。

## 6 \*-involution.

この節では主結果の応用として付値の言葉で \*-involution を解釈する。まずは Newton-Okounkov 凸体とストリング多面体をつなぎ付ける [Kav] の結果を思い出そう。最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} = (i_N, \dots, i_1) \in I^N$  に対応するストリング・パラメトリゼーションを  $\Phi_{\mathbf{i}} : \mathcal{B}(\infty) \rightarrow \mathbb{Z}^N$  とする。つまり  $\Phi_{\mathbf{i}}(b) = (a_N, \dots, a_1)$  とすると、すべての  $1 \leq k \leq N$  に対して

$$a_k = \varepsilon_{i_k}(\tilde{e}_{i_{k+1}}^{a_{k+1}} \cdots \tilde{e}_{i_N}^{a_N} b)$$

である。命題 4.1 (2) により  $\Phi_{\mathbf{i}} = \Psi_{\mathbf{i}^{\text{op}}} \circ *$  となっていることに注意する。ただし  $\mathbf{i}^{\text{op}} := (i_1, \dots, i_N)$  である。

**定義 6.1** (ストリング多面体). 最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  に対して、部分集合  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$  を

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} := \bigcup_{k>0} \{(k, \Phi_{\mathbf{i}}(b)) \mid b \in \tilde{\mathcal{B}}(k\lambda)\}$$

により定義する。さらに  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}$  を含む最小の実閉錐を  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$  とし、部分集合  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^N$  を

$$\tilde{\Delta}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}\}$$

と定める。この  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}$  をストリング多面体という ([Lit, Section 1] および [Kav, Definition 3.5] 参照)。

$\tilde{\Delta}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}$  は有理凸多面体であり、 $\tilde{\Delta}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} \cap \mathbb{Z}^N = \Phi_{\mathbf{i}}(\tilde{\mathcal{B}}(\lambda))$  となることが知られている ([Lit, Section 1] および [BZ, §§3.2 および Theorem 3.10] 参照)。次が [Kav] の主結果である。

**命題 6.2** ([Kav, Theorem 4.1, Corollary 4.2, および Remark 4.6] 参照)。最長元  $w_0 \in W$  の簡約語  $\mathbf{i} \in I^N$  および優整ウェイト  $\lambda$  について、次が成り立つ。

- (1) すべての  $b \in \tilde{\mathcal{B}}(\lambda)$  に対し、 $\Phi_{\mathbf{i}}(b) = -\tilde{v}_{\mathbf{i}}(G_{\lambda}^{\text{up}}(\tau_{\lambda}(b)))/\tau_{\lambda}$  である。
- (2) 線形同型  $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  を  $\omega(k, \mathbf{a}) = (k, -\mathbf{a})$  と定めると、 $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} = \omega(S(G/B, \mathcal{L}_{\lambda}, \tilde{v}_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda}))$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} = \omega(C(G/B, \mathcal{L}_{\lambda}, \tilde{v}_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda}))$ , および  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} = -\Delta(G/B, \mathcal{L}_{\lambda}, \tilde{v}_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda})$  が成り立つ。

**注意 6.3.** Kaveh の結果は命題 3.7 (3) の二つ目の主張を繰り返し用いることで証明される。ここでは Chevalley 生成元  $F_i, i \in I$ , の左作用が鍵となるため、 $G_q^{\text{up}}(b)$  や  $G^{\text{up}}(b)$  を導入する必要がなく、すべての議論を  $G_{q,\lambda}^{\text{up}}(b)$  と  $G_{\lambda}^{\text{up}}(b)$  のみを用いて行うことができる。一方で本稿の主結果 (定理 5.3) の証明において鍵となるものは、Chevalley 生成元  $F_i, i \in I$ , の座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  への右作用である。大域切断のなす空間  $H^0(G/B, \mathcal{L}_{\lambda})$  にはこの作用を制限することができないため、 $G_q^{\text{up}}(b)$  や  $G^{\text{up}}(b)$  を導入して座標環  $\mathbb{C}[U^-]$  へと話を帰着させる必要が生じる。この部分が本稿の議論の特色である。

$\mathcal{C}_{\mathbf{i}} \subset \mathbb{R}^N$  を  $\Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\infty)) \subset \mathbb{Z}^N$  を含む最小の実閉錐とする。命題 4.1 (2) により  $\Psi_{\mathbf{i}} = \Phi_{\mathbf{i}^{\text{op}}} \circ *$  なので、 $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$  は  $\mathbf{i}^{\text{op}}$  に対応するストリング錐と一致する ([BZ, §§3.2] 参照)。 $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$  は有理凸多面錐であり、 $\mathcal{C}_{\mathbf{i}} \cap \mathbb{Z}^N = \Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\infty))$  となることが知られている ([Lit, Section 1] および [BZ, §§3.2 および Theorem 3.10] 参照)。さて、柏原埋め込みからストリング・パラメトリゼーションへの変換  $\eta_{\mathbf{i}} : \Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\infty)) \rightarrow \Phi_{\mathbf{i}^{\text{op}}}(\mathcal{B}(\infty))$ ,  $\Psi_{\mathbf{i}}(b) \mapsto \Phi_{\mathbf{i}^{\text{op}}}(b)$ , を考えよう。命題 4.1 (2) により  $\Phi_{\mathbf{i}^{\text{op}}} = \Psi_{\mathbf{i}} \circ *$  なので、この写像  $\eta_{\mathbf{i}}$  は柏原埋め込み  $\Psi_{\mathbf{i}}$  を通して \*-involution と対応する。つまりすべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対して

$$b^* = \Psi_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \eta_{\mathbf{i}} \circ \Psi_{\mathbf{i}}(b)$$

が成り立つ。ここで  $\mathbf{i}$  の拡張  $\tilde{\mathbf{i}} = (\dots, i_k, \dots, i_{N+1}, i_N, \dots, i_1)$  を 4 節のように取ると、 $\eta_{\mathbf{i}}$  の定義により  $\eta_{\mathbf{i}}((a_1, \dots, a_N)) = \Phi_{\mathbf{i}^{\text{op}}}(\Psi_{\tilde{\mathbf{i}}}^{-1}(\mathbf{a}))$  となっている。ここで  $\mathbf{a} := (\dots, 0, 0, a_N, \dots, a_1) \in \mathbb{Z}_{\neq 0}^{\infty}$  とした。すると

$\Psi_{\mathbf{i}}$  が crystal の strict embedding であったことから,  $\eta_{\mathbf{i}}((a_1, \dots, a_N))$  は  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{i}}^{\infty}$  の  $\mathfrak{i}^{\text{op}}$  に関するストリング・パラメトリゼーションと一致する. ここで  $\mathbb{Z}_{\mathbf{i}}^{\infty}$  の定義を思い出すと,  $\eta_{\mathbf{i}}((a_1, \dots, a_N))$  が  $a_1, \dots, a_N$  を変数とする区分的線形関数であることがわかる. 従って  $\eta_{\mathbf{i}}$  は  $C_{\mathbf{i}}$  から自分自身の上への区分的線形関数  $\eta_{\mathbf{i}}$  に自然に拡張される.  $C_{\mathbf{i}} \cap \mathbb{Z}^N = \Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\infty))$  より, このような拡張の仕方は一意的である. また定義により  $\eta_{\mathbf{i}}^2 = \text{id}_{C_{\mathbf{i}}}$  となっている. 以上をまとめると次が成り立つ.

系 6.4.  $\mathbf{i} \in I^N$  を最長元  $w_0 \in W$  の簡約語とすると, 区分的線形関数  $\eta_{\mathbf{i}}: C_{\mathbf{i}} \rightarrow C_{\mathbf{i}}$  であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

- (i) 柏原理め込み  $\Psi_{\mathbf{i}}$  を通して,  $\eta_{\mathbf{i}}$  は  $*$ -involution と対応する: すべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対して  $b^* = \Psi_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \eta_{\mathbf{i}} \circ \Psi_{\mathbf{i}}(b)$  である.
- (ii)  $\eta_{\mathbf{i}}$  は  $v_{\mathbf{i}}$  から  $\tilde{v}_{\mathfrak{i}^{\text{op}}}$  への付値の取り換えに対応する: すべての  $b \in \mathcal{B}(\infty)$  に対して  $\eta_{\mathbf{i}}(-v_{\mathbf{i}}(G^{\text{up}}(b))) = -\tilde{v}_{\mathfrak{i}^{\text{op}}}(G^{\text{up}}(b))$  である.
- (iii)  $\eta_{\mathbf{i}}^2 = \text{id}_{C_{\mathbf{i}}}$  である.
- (iv) すべての優整ウェイト  $\lambda$  に対して,  $\eta_{\mathbf{i}}$  は多面体表示  $\Delta_{\mathbf{i}}^{(\lambda)} = -\Delta(G/B, \mathcal{L}_{\lambda}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda})$  からストリング多面体  $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{i}^{\text{op}}}^{(\lambda)} = -\Delta(G/B, \mathcal{L}_{\lambda}, \tilde{v}_{\mathfrak{i}^{\text{op}}}, \tau_{\lambda})$  の上への全単射を誘導する.

例 6.5.  $G = SL_3(\mathbb{C})$  および  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$  とする. このとき命題 4.8 により

$$\Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\infty)) = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \mid a_2 \geq a_3\}$$

であり,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\infty))$  に対して  $\mathbb{Z}_{\mathbf{i}}^{\infty}$  の定義により

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{a}) &= \max\{a_3, a_1 - a_2 + 2a_3\}, \quad \tilde{e}_1^{\max} \mathbf{a} = (\min\{a_1, a_2 - a_3\}, a_2, 0), \\ \varepsilon_2(\tilde{e}_1^{\max} \mathbf{a}) &= a_2, \quad \tilde{e}_2^{\max} \tilde{e}_1^{\max} \mathbf{a} = (\min\{a_1, a_2 - a_3\}, 0, 0), \\ \varepsilon_1(\tilde{e}_2^{\max} \tilde{e}_1^{\max} \mathbf{a}) &= \min\{a_1, a_2 - a_3\} \end{aligned}$$

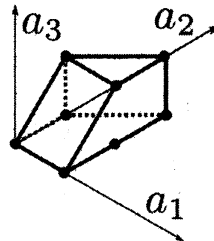
となっている. そのため  $\eta_{\mathbf{i}}$  は

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto (\max\{a_3, a_1 - a_2 + 2a_3\}, a_2, \min\{a_1, a_2 - a_3\})$$

により与えられる区分的線形関数と一致し, すべての優整ウェイト  $\lambda$  に対して, 多面体表示  $\Delta_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}$  からストリング多面体  $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{i}^{\text{op}}}^{(\lambda)}$  の上への全単射を誘導する. ここで  $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2$  とすると, 多面体表示  $\Delta_{\mathbf{i}}^{(\lambda)}$  は

$$0 \leq a_1 \leq 1, 0 \leq a_3 \leq 1, a_3 \leq a_2 \leq a_1 + 1$$

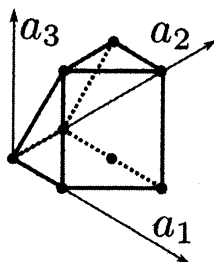
で与えられる次の多面体と一致し,



ストリング多面体  $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{i}^{\text{op}}}^{(\lambda)}$  は

$$0 \leq a_3 \leq 1, a_3 \leq a_2 \leq a_3 + 1, 0 \leq a_1 \leq a_2 - 2a_3 + 1$$

で与えられる次の多面体と一致する.



謝辞. RIMS 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」において講演の機会を与えてくださった直井克之先生にこの場を借りて御礼申し上げます.

## 参考文献

- [A] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, *Math. Ann.* **356** (2013), 1183-1202.
- [BZ] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* **143** (2001), 77-128.
- [F1] N. Fujita, Newton-Okounkov bodies for Bott-Samelson varieties and string polytopes for generalized Demazure modules, preprint 2015, arXiv:1503.08916.
- [F2] N. Fujita, Newton-Okounkov bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases, in preparation.
- [GLS] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, Preprojective algebras and cluster algebras, in *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2008), 253-283.
- [HK] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, *Invent. Math.* **202** (2015), 927-985.
- [J] J. C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [Kas1] M. Kashiwara, Crystalizing the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 249-260.
- [Kas2] M. Kashiwara, On crystal bases of the  $Q$ -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465-516.
- [Kas3] M. Kashiwara, Global crystal bases of quantum groups, *Duke Math. J.* **69** (1993), 455-485.
- [Kas4] M. Kashiwara, The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, *Duke Math. J.* **71** (1993), 839-858.
- [Kav] K. Kaveh, Crystal bases and Newton-Okounkov bodies, *Duke Math. J.* **164** (2015), 2461-2506.
- [Kir] V. Kiritchenko, Newton-Okounkov polytopes of flag varieties, preprint 2015, arXiv:1506.00362.
- [KK1] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology*, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser, 2012, 263-282.
- [KK2] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, *Ann. of Math.* **176** (2012), 925-978.
- [LM] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, *Ann. Sci. de l'ENS* **42** (2009), 783-835.
- [Lus] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progr. Math. Vol. 110, Birkhäuser, 1993.
- [Lit] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups* **3** (1998), 145-179.
- [N1] T. Nakashima, Polyhedral realizations of crystal bases for integrable highest weight modules, *J. Algebra* **219** (1999), 571-597.
- [N2] T. Nakashima, Polytopes for crystallized Demazure modules and extremal vectors, *Comm. Algebra*, **30** (2002), 1349-1367.
- [NZ] T. Nakashima and A. Zelevinsky, Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras, *Adv. Math.* **131** (1997), 253-278.
- [O1] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, *Invent. Math.* **125** (1996), 405-411.
- [O2] A. Okounkov, Why would multiplicities be log-concave?, in *The Orbit Method in Geometry and Physics*, Progr. Math. Vol. 213, Birkhäuser, 2003, 329-347.