数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 33-43

Schur の分割定理の $p=7$ 類似について

(On a $p=7$ analog of Schur partition theorem)

東京大学大学院数理科学研究科　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*
Graduate school of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1 はじめに

2015 年 10 月中旬に開催された RIMS 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」において、渡部正樹（東大数理）さんとの共同研究（現在論文を投稿準備中）についてお話させていただいた。

講演内容は Schur の分割定理（1926）の類似で、Schur の分割定理が $p=3$ の場合、我々のものが $p=7$ の場合と思えるものである（$p=5$ の場合と思える結果は Andrews [A1, Conjecture 2]=Bessenrodt-Morris-Olsson [BMO, Conjecture]=Andrews-Bessenrodt-Olsson [ABO, Theorem 3.1] であり、本稿で論じる)。これらはもっとも有名な分割定理である Rogers-Ramanujan 恒等式と直接関わっている。本稿ではその辺の事情を含めつつ、我々の結果を簡単に紹介したい。

以下、必要な記法を簡単に確認しておく。分割 $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_\ell)\in\mathsf{Par}$ について、$\ell=\ell(\lambda)$ でその長さを、$|\lambda|=\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}\lambda_i$ でそのサイズを、$m_i(\lambda)=\#\{1\leq j\leq\ell(\lambda)\mid\lambda_j=i\}$ で i の重複度を表す。

2 Rogers-Ramanujan 恒等式

定義 2.1 ([A3, Definition 8.3]). 分割の部分集合 $\mathcal{C}\subseteq\mathsf{Par}$ が分割イデアルであるとは、以下の条件が成り立つことを言う。

$$\forall\lambda\in\mathcal{C},\forall\mu\in\mathsf{Par},(\forall i,m_i(\mu)\leq m_i(\lambda)\Rightarrow\mu\in\mathcal{C})$$

分割イデアル $\mathcal{C}$ について、$\mathcal{C}(n):=\mathsf{Par}(n)\cap\mathcal{C}$ と定義し、$p_n(\mathcal{C})=\#\mathcal{C}(n)$ とする。

定義 2.2 ([A2, Definition 3]). 2 つの分割イデアル $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ が分割理論的に同値（$\mathcal{C}_1\overset{\mathrm{PT}}{\sim}\mathcal{C}_2$ と記す）とは、任意の $n\geq 0$ について $p_n(\mathcal{C}_1)=p_n(\mathcal{C}_2)$ となることを言う。

例 2.3. 2 つの分割イデアル $\mathcal{D},\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{D}=\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid\forall i\geq 1,m_i(\lambda)\leq 1\},$$
$$\mathcal{O}=\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid\forall i\geq 1,m_{2i}(\lambda)=0\}$$

と定める（その元はそれぞれ strict partition/odd partition と呼ばれる)。このとき $\mathcal{D}\sim\mathcal{O}$ (Euler) はよく知られている。

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported in part by JSPS Kakenhi Grant 26800005.

$\mathcal{D}, \mathcal{O}$ は共に「order 1 の分割イデアル」([A3, §8.3]) の例であり、一般に.order 1 の分割イデアル $\mathcal{C}$ について母関数

$$g_{\mathcal{C}}(q) := \sum_{n \geq 0} p_n(\mathcal{C}) q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|} \tag{2.1}$$

が(有理関数として)計算可能である [A3, Theorem 8.3]。よって 2 つの分割イデアル $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ が order 1 であれば、$\mathcal{C}_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{C}_2$ かどうかは決定可能である [A3, Theorem 8.4]。

定理 2.4 (Rogers-Ramanujan 恒等式). 分割イデアル

$$\begin{aligned} R &= \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1, m_i(\lambda) + m_{i+1}(\lambda) \leq 1\}, \\ T &= \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1, m_{5i \pm 2}(\lambda) = m_{5i}(\lambda) = 0\}, \\ R' &= R \cap \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \lambda_{\ell(\lambda)} \geq 2 (\Leftrightarrow m_1(\lambda) = 0)\}, \\ T' &= \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1, m_{5i \pm 1}(\lambda) = m_{5i}(\lambda) = 0\} \end{aligned}$$

について、$R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T$ および $R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T'$ が成り立つ。

Rogers-Ramanujan 恒等式の歴史は興味深いが([A3, §7] や [A4, §1] を参照されたい)、ここではそれに立ち入ることなく、[A2, §3] にある $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T$ の証明を簡単に復習するにとどめよう。

まず $x = 1$ を代入すると (2.1) になるような、$g_{\mathcal{C}}(q)$ の精密化

$$f_{\mathcal{C}}(x, q) := \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} \tag{2.2}$$

を考える。すると $f_R(0, q) = 1$ かつ

$$f_R(x, q) = f_R(xq, q) + xq f_R(xq^2, q) \tag{2.3}$$

となっていることが簡単に分かる(一般に分割イデアル $\mathcal{C}$ が、([A3, §8.3] の意味で) linked であれば $f_{\mathcal{C}}(x, q)$ に関する q 差分漸化式を立てることができる [A3, Theorem 8.11])。

次に唐突だが $i \geq 0$ について、初等的な級数

$$f_i = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2} - in} (1 - x^{i+1} q^{(2n+1)(i+1)})}{(1-q) \cdots (1-q^n) \prod_{j > n} (1 - xq^j)}$$

を考える。すると

$$f_i(x, q) = f_{i-1}(x, q) + x^i q^i f_{1-i}(xq, q) \tag{2.4}$$

となっていることが (high school algebra で) 確認できる(ただし $f_{-1} = 0$)。詳細は略すが、初期条件および (2.3) と (2.4) から $f_R = f_1$ を導くことができる。よって

$$g_R(q) = f_R(1; q) = f_1(1; q) = \Delta^{-1} \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} (1 - q^{4n+2})$$

である(ここで $\Delta := \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)$)。さて不思議なことに

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} (1 - q^{4n+2}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}}$$

となっている。$1/g_T(q) = \prod_{n \geq 0} (1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})$ であるから、$g_R(q) = g_T(q)$ を示すには

$$\Delta^{-1} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}$$

を示せばよい。これは Jacobi triple product から従う。

3 Andrewsによる3 parameter generalization

以上よりRogers-Ramanujan型恒等式の証明には、次のレシピがあることが分かった [A2, §3]。

(a) 母関数 (2.2) について、q 差分漸化式を立てる。

(b) q 差分漸化式を解くことで、母関数の q 級数の表示を得る。

(c) q 級数の定理を援用し、定理を導く。

G.E.Andrewsは同じ方針により、以下の一般化を証明した。なおMSC2010の分類に

11P84 Partition identities; identities of Rogers-Ramanujan type

があることからも分かるように、このレシピは（後にも説明するが）全く万能ではない。

定理 3.1 ([A1]). $\ell \geq 0$ および $k, a \geq 1$ が、$0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$ を満たすならば、$A_{\ell,k,a} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B_{\ell,k,a}$ が成り立つ。ここで

$$B_{\ell,k,a} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(B1)},\text{(B2)},\text{(B3)}\}, \quad A_{\ell,k,a} = \begin{cases} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(B1)},\text{(A2)}\} & (\ell \in 2\mathbb{Z}) \\ \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(A1)},\text{(A2)},\text{(A3)}\} & (\ell \notin 2\mathbb{Z}) \end{cases}$$

は、以下の条件によって定義される分割イデアルである。

(A1) $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in (\ell+1)/2 \cdot \mathbb{Z}$,

(A2) $i \equiv 0, \pm(2a-\ell)(\ell+1)/2 \pmod{(2k-\ell+1)(\ell+1)} \Rightarrow m_i(\lambda) = 0$,

(A3) $i \equiv \ell+1 \pmod{2(\ell+1)} \Rightarrow m_i(\lambda) = 0$,

(B1) $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in (\ell+1)\mathbb{Z}$,

(B2) $1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - k + 1, \lambda_i - \lambda_{i+k-1} \geq \ell + 1$（ただし $\lambda_i \in (\ell+1)\mathbb{Z}$ のとき $\geq$ は $>$）,

(B3) $\sum_{i=1}^{\ell+1} m_i(\lambda) < a$ かつ $1 \leq \forall j \leq (\ell+1)/2, \sum_{i=j}^{\ell-j+1} m_i(\lambda) \leq a - j$.

$\ell = 0, a = k = 2$ の場合が $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T$ で、$\ell = 0, a = 1, k = 2$ の場合が $R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T'$ である。さてAndrewsの定理の仮定 $0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$ が崩れているときを考察してみよう。

例 3.2. $\ell = 3, k = a = 2$ とする。このとき

$$A_{3,2,2} = \mathcal{O} \cap \mathcal{D},$$
$$B_{3,2,2} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid m_2(\lambda) = 0, 1 \leq \forall i < \ell(\lambda), \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 4 \text{（ただし } \lambda_i \in 4\mathbb{Z} \text{ のとき } \geq \text{ は } >\text{）}\}$$

となっている（$n \geq 2$ ならば、$p_n(A_{3,2,2})$ は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類であって交代群 $\mathfrak{A}_n$ でsplitするものの数であることに注意しよう）。少し実験してみると（次ページ表を参照）、$A_{3,2,2} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B_{3,2,2}$ は成り立たないことが分かる。

しかし次ページ表をさらに眺めると、$B_{3,2,2}$ の部分分割イデアル

$$B^{\circ}_{3,2,2} := B_{3,2,2} \cap \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall j \geq 0, m_{4j+2}(\lambda) = 0\}$$

について、$A_{3,2,2} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B^{\circ}_{3,2,2}$ となることが期待される。これはSchurによって証明された [Sc1]。

n	$A_{3,2,2}(n)$	$B_{3,2,2}(n)$
1	(1)	(1)
2	none	none
3	(3)	(3)
4	(3,1)	(4)
5	(5)	(5)
6	(5,1)	(6),(5,1)
7	(7)	(7),(6,1)
8	(7,1),(5,3)	(8),(7,1)
9	(9),(5,3,1)	(9),(8,1)
10	(9,1),(7,3)	(10),(9,1),(7,3)
11	(11),(7,3,1)	(11),(10,1),(8,3)
12	(11,1),(9,3),(7,5)	(12), (11,1), (9,3)

以上の試行によって、以下の教訓が得られた。

> Andrews による Rogers-Ramanujan 恒等式の 3 パラメーター一般化 $A_{\ell,k,a} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B_{\ell,k,a}$ は、仮定 $0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$ が破れていれば成り立たないかもしれない。しかし $B_{\ell,k,a}$ の条件をうまく追加して部分分割イデアル $B^\circ_{\ell,k,a} \subseteq B_{\ell,k,a}$ を定義することで分割論的同値 $A_{\ell,k,a} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B^\circ_{\ell,k,a}$ が得られるかもしれない。

定義 3.3. $p \geq 2$ について、分割イデアル C_p を

$$C_p = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1, m_{ip}(\lambda) = 0\}$$

と定義し（p-class regular partitions）、$D_p = \mathcal{D} \cap C_p$ とする（strict p-class regular partitions）。

さて先の教訓を $\ell = 4, k = a = 3$ の場合に適用してみよう。このとき $A_{4,3,3} = D_5$ であり、$B_{4,3,3}$ は以下の条件を満たす分割 $\lambda \in \mathsf{Par}$ たちからなる分割イデアルとなっている。

- $1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - 2, \lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 5$（ただし $\lambda_i \in 5\mathbb{Z}$ のとき $\geq$ は $>$）,
- $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in 5\mathbb{Z}$,
- $m_3(\lambda) + m_2(\lambda) \leq 1$.

Andrews は部分分割イデアル $B^\circ_{4,3,3} \subseteq B_{4,3,3}$ を

$$B^\circ_{4,3,3} = B_{4,3,3} \cap \left\{\lambda \in \mathsf{Par} \middle| \forall j \geq 0, {}^{m_{5j+3}(\lambda)+m_{5j+2}(\lambda)\leq 1, m_{5j+6}(\lambda)+m_{5j+4}(\lambda)\leq 1,}_{m_{5j+11}(\lambda)+m_{5j+10}(\lambda)+m_{5j+5}(\lambda)+m_{5j+4}(\lambda)\leq 3}\right\}$$

と定義し、$(A_{4,3,3} =)D_5 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B^\circ_{4,3,3}$ を予想した [A1, Conjecture 2]。具体的には $0 \leq n \leq 59$ ならば $p_n(D_5) = p_n(B^\circ_{4,3,3})$ となることを確認し、次のように述べている [A1, 85 ページ]。

> Unfortunately the assumption $k \geq \ell$ so permeates the work in this paper that Conjecture 2（注：$A_{4,3,3} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B^\circ_{4,3,3}$ のこと） seems well beyond the techniques herein introduced（注：本節冒頭のレシピのことと筆者は理解している）.
>
> If Conjecture 2 is in fact correct, the methods of proof should have interesting ramifications in the theory of partition identities.

Andrews の予想は、Andrews-Bessenrodt-Olsson によって証明された [ABO, §2,§3]。

4 Schurの分割定理の$p=5$類似

本研究でSchurの分割定理と言ったときには以下の定理を意味している。

定理 4.1 ([Sc1, Satz V]). 分割イデアル

$$\mathrm{Schur}_3 = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \le \forall i < \ell(\lambda), \lambda_i - \lambda_{i+1} \ge 3 \text{（ただし } \lambda_i \in 3\mathbb{Z} \text{ のとき} \ge \text{は} >\text{）}\}$$

について、$D_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Schur}_3$ が成り立つ。

この定理は§2で説明したレシピを適用しても証明できるし（[A4, §6]を参照）、組合せ論的全単射による証明も知られている[Bre, Be1]。Schur_3は対称群の3モジュラースピン表現論と関係することが知られている[BMO]。例えば任意の$n \ge 0$について、

$$p_n(D_3) = \#\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{Q}}\widehat{\mathfrak{S}}_n))$$

が成立する（ここでIrrでどのような既約表現を同一視して数えているについては[LT, §6]を参照)。

さて$p \ge 2$について、分割イデアルR_pを

$$R_p = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \ge 1, m_i(\lambda) < p\}$$

と定義する（p正則分割)。このとき下左が成り立つことはよく知られている[Jam]（すぐ後の話のためには、R_pをp正則分割からなる分割イデアルとするよりは、p-restricted分割からなる分割イデアルとしたほうがよいかもしれない。その場合は[Mat, 3.43]を参照)。

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Par}(n) \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n)) \\ R_p(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D}(n) \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{Q}}\widehat{\mathfrak{S}}_n)) \\ R_p^{??}(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{F}_p}\widehat{\mathfrak{S}}_n)) \end{tikzcd}$$

以上のスピン類似を考えると、上右を満たす「うまい」分割イデアル$R_p^{??}$の存在を期待したくなる（上右の1行目の全単射はSchurによる[Sc2])。この話題については[Be2, §3]が優れた解説になっている。対称群の5モジュラースピン表現論の研究から、Bessenrodt-Morris-Olssonは、次の分割定理を予想した[BMO, §3, Conjecture]。

定理 4.2 ([BMO, §3, Conjecture]=[ABO, Theorem 3.1]). 分割イデアルSchur_5を、以下の条件を満たすParの部分集合として定義する。このとき$D_5 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Schur}_5$が成り立つ。

- $1 \le \forall i \le \ell(\lambda) - 2, \lambda_i - \lambda_{i+2} \ge 5$（ただし$\lambda_i \in 5\mathbb{Z}$または$\lambda_i + \lambda_{i+1} \in 5\mathbb{Z}$のとき$\ge$は$>$),
- $\forall j \ge 0, m_{5j+3}(\lambda) + m_{5j+2}(\lambda) \le 1,$
- $\forall j \ge 0, m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+9}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) \le 2,$
- $\forall j \ge 0, m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+6}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \le 2,$
- $\forall j \ge 0, m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \le 3.$

なお Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki 理論のスピン類似にアイデアを得て（この heuristic については [LT, §7] も参照）、$p \geq 3$ について $A^{(2)}_{p-1}$-crystal としての同型

$$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{F}_p}\widehat{\mathfrak{S}}_n)) \cong B(\Lambda_0)$$

が知られている [BK, Theorem 8.11]。Perfect crystal による「Kyoto path 模型」によると $A^{(2)}_{p-1}$-crystal $B(\Lambda_0)$ の Par の部分集合としての実現は p-strict p-restricted な分割 RP_p によるものが自然であることが知られている。ここで $\lambda \in RP_p$ とは以下の条件が成り立つことと定義される。

- $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in p\mathbb{Z}$,
- $1 \leq \forall r < \ell(\lambda), \lambda_r - \lambda_{r+1} \leq p$（ただし $\lambda_r \in p\mathbb{Z}$ のとき $\leq$ は $<$）.

以上の経緯から naïve な期待である $R^{??}_p \subseteq \mathcal{D}$ の存在は一旦白紙に戻った感がある（後述の主予想はこの観点を復活させるものと思える）。

さて、Andrews の予想は定理 4.2 と等価であることが、以下の通り容易に分かる（証明は略）。

Proposition 4.1 ([BMO, §3]). 単射 $\varphi_5 : B^{\circ}_{4,3,3} \hookrightarrow \mathsf{Par}$ を「$(5j, 5j)$ の現われを $(5j+1, 5j-1)$ に置き換える」によって定義すると、$\mathsf{Image}\,\varphi_5 = \mathit{Schur}_5$ が成り立つ。特に $B^{\circ}_{4,3,3} \overset{PT}{\sim} \mathit{Schur}_5$ である。

ここで定理 4.2 の Andrews-Bessenrodt-Olsson による証明を復習する前に、§2 で説明したレシピを適用するとどうなるか述べておく。まず母関数 $f := f_{\mathsf{Schur}_5}(x,q)$ を考え（(2.2) を参照）、これが満たす q 差分漸化式を求めるのであった。

$$\begin{aligned}
f(x,q) &:= \sum_{\lambda\in\mathsf{Schur}_5} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} \\
&= Af(xq^5,q) - xBf(xq^{10},q) - x^3q^{20}Cf(xq^{15},q) + x^4q^{40}Df(xq^{20},q) - x^6q^{80}Ef(xq^{25},q), \\
A &= 1 + x + xq + xq^2 + xq^3 + xq^4 + xq^5 + x^2q^3 + x^2q^4 + x^2q^6 + x^2q^7 - x^2q^{10}, \\
B &= (1-xq^5)(1 - x^2q^{12} - x^2q^{14} + 2x^2q^{15} - x^2q^{16} + x^2q^{19} + x^2q^{21} + x^2q^{22}), \\
C &= (1-xq^5)(1-xq^{10})(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 - xq^8 - xq^9 - xq^{11} + xq^{14} + 2xq^{15} + xq^{16} + xq^{18}), \\
D &= (1-xq^5)(1-xq^{10})(1-xq^{15})(1 + xq^{10} - xq^{13} - xq^{14} - xq^{16} - xq^{17}), \\
E &= (1-xq^5)(1-xq^{10})(1-xq^{15})(1-xq^{20}).
\end{aligned}$$

次に

$$\sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n = f(x,q) / \prod_{i\geq 0}(1 - xq^{5i})$$

によってべき級数 $A_n(q)$ を定義すると、q 差分漸化式より

$$\begin{aligned}
&(1-q^{5n})A_n(q) \\
&= A_{n-1}(q)(1 + q^{5n-5}(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) - q^{10n-10}) \\
&+ A_{n-2}(q)(1 + q + q^3 + q^4 - q^7)q^{5n-7} \\
&+ A_{n-3}(q)((1 + q^2 + 2q^3 + q^4 - q^7 - q^9 - q^{10})q^{10n-18} - (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5)q^{15n-25}) \\
&+ A_{n-4}(q)((1 + q + q^3 - q^6 - 2q^7 - q^8 - q^{10})q^{15n-32} + q^{20n-40}) \\
&+ A_{n-5}(q)(1 - q^3 - q^4 - q^6 - q^7)q^{20n-50} \\
&- A_{n-6}(q)q^{25n-70}.
\end{aligned}$$

となる（初期条件は $A_0(q)=1$ かつ $\forall n<0, A_n(q)=0$）。この漸化式を $(\star)$ と名づける。

少し考えると定理 4.2 を証明するには、次が言えればよいことが分かる。

予想 4.3. 初期条件 $A_0(q)=1$ かつ $\forall n<0, A_n(q)=0$ について、漸化式 $(\star)$ を考える。このとき任意の $n\geq 0$ について、以下（の q-adic な収束）が成立する。

$$A_n(q)-\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+q^{5i-1})(1+q^{5i-2})(1+q^{5i-3})(1+q^{5i-4})}{1-q^{5i}}\in q^{5n-2}\mathbb{Z}[q].$$

予想 4.3 は初等的な命題であるが、これが証明できなかったことを Andrews は先の引用の通り表現した（[A1, 85 ページ]）のではないかと筆者は推測している。

4.1 Andrews-Bessenrodt-Olsson による証明の概略

[ABO] による証明の概略を説明する。類題によって理解を深めたければ、Göllnitz の定理 [Gol] にこの考え方を適用した別証明 [A5] の説明が、[A4, §10.6] に再録されている。

まず $\mathrm{Schur}_5 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} D_5$ を示すのではなく、命題 4.1 によって等価である $B^{\circ}_{4,3,3} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} D_5$ を示す。そのために $f_{B^{\circ}_{4,3,3}}$ のような無限和をいきなり考えるのではなく、以下のように有限の近似を行う。

定義 4.4. $0\leq k<16$ と $j\geq 0$ について、

$$S_j(k)=\sum_{\lambda}x^{\#\{1\leq i\leq \ell(\lambda)\mid\lambda_i\in 5\mathbb{Z}\}+\ell(\lambda)}q^{|\lambda|} \tag{4.1}$$

と定義する。ここで λ は $\lambda\in B^{\circ}_{4,3,3}$ であって多重集合として

$$0\leq\exists\ell\leq k, P(\ell)=\lambda\cap\{5j+1,\cdots,5j+5\}$$

となるようなものを走る（$P(\ell)$ の定義は下表参照）。$S_j(k)$ は x,q の多項式である。

以下 $j<0$ については、$S_j(k)=\delta_{j,-1}$ と約束しておく（$0\leq k<16$）。

k	$P(k)$	漸化式
0	$\emptyset$	$S_n(0)=S_{n-1}(15)$
1	$\{5j+1\}$	$S_n(1)=S_n(0)+xq^{5n+1}(S_{n-1}(11)-S_{n-1}(9)+S_{n-1}(5))-x^6q^{20n-10}S_{n-3}(9)$
2	$\{5j+2\}$	$S_n(2)=S_n(1)+xq^{5n+2}(S_{n-1}(12)-S_{n-1}(9)+S_{n-1}(8))$
3	$\{5j+2,5j+1\}$	$S_n(3)=S_n(2)+x^2q^{10n+3}S_{n-1}(3)$
4	$\{5j+3\}$	$S_n(4)=S_n(3)+xq^{5n+3}S_{n-1}(13)$
5	$\{5j+3,5j+1\}$	$S_n(5)=S_n(4)+x^2q^{10n+4}S_{n-1}(5)$
6	$\{5j+4\}$	$S_n(6)=S_n(5)+xq^{5n+4}S_{n-1}(14)$
7	$\{5j+4,5j+1\}$	$S_n(7)=S_n(6)+x^2q^{10n+5}S_{n-1}(5)$
8	$\{5j+4,5j+2\}$	$S_n(8)=S_n(7)+x^2q^{10n+6}S_{n-1}(8)$
9	$\{5j+4,5j+3\}$	$S_n(9)=S_n(8)+x^2q^{10n+7}S_{n-1}(9)$
10	$\{5j+5\}$	$S_n(10)=S_n(9)+x^2q^{5n+5}S_{n-1}(14)$
11	$\{5j+5,5j+1\}$	$S_n(11)=S_n(10)+x^3q^{10n+6}S_{n-1}(5)$
12	$\{5j+5,5j+2\}$	$S_n(12)=S_n(11)+x^3q^{10n+7}S_{n-1}(8)$
13	$\{5j+5,5j+3\}$	$S_n(13)=S_n(12)+x^3q^{10n+8}S_{n-1}(9)$
14	$\{5j+5,5j+4\}$	$S_n(14)=S_n(13)+x^3q^{10n+9}S_{n-1}(9)$
15	$\{5j+5,5j+5\}$	$S_n(15)=S_n(14)+x^4q^{10n+10}S_{n-1}(9)$

ここで $S_j(k)$ については、表右の漸化式が成立することが容易に分かる [ABO, §2]。これを元に

$$S_n(15) = (1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)(1+xq^4)\cdot S_{n-1}(9)|_{x\mapsto xq^5} \tag{4.2}$$

を示す [ABO, Lemma 3.4]、というのが証明の概略である。

(4.2) が示せれば、$n\to\infty$ とすることで

$$\sum_{\lambda\in B^{\circ}_{4,3,3}} x^{\#\{1\le i\le \ell(\lambda)\mid \lambda_i\in 5\mathbb{Z}\}+\ell(\lambda)}q^{|\lambda|} = \prod_{k\ge 0}(1+xq^{5k+1})(1+xq^{5k+2})(1+xq^{5k+3})(1+xq^{5k+4})$$

が分かり、$x=1$ を代入すれば証明が完結する。

(4.1) 中の x の肩が、$\ell(\lambda)$ ではなく $\#\{1\le i\le \ell(\lambda)\mid \lambda_i\in 5\mathbb{Z}\}+\ell(\lambda)$ となっていることが気になるかもしれない。x の肩は最終的に $x=1$ にするので重要ではなく、$S_{15}(0)=(1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)(1+xq^4)$ となるように

- (4.1) 中の和で λ は（Schur_5 ではなく）$B^{\circ}_{4,3,3}$ を走っている
- (4.1) 中の $S_j(k)$ の x の肩が、$\ell(\lambda)$ ではなく $\#\{1\le i\le \ell(\lambda)\mid \lambda_i\in 5\mathbb{Z}\}+\ell(\lambda)$ となっている

のが $S_j(k)$ の定義の肝と筆者は理解している。

なお (4.2) はこの形そのものでなくとも証明は機能する。重要なのは、例えば

$$S_n(*_1) = (1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)(1+xq^4)\cdot S_{n-1}(*_2)|_{x\mapsto xq^5} + \sum_{\text{有限和}} x^{*_3}q^{(n\,\to\,\infty\text{ で }\infty\text{ になる式})}S_{n+*_4}$$

という形をしている（ここで $*$ たちは（例えば）定数）ということである。「たくさんの有限の多項式の中から、こののような関係式を見出す自由度が増えた」ということが、§2 で説明したレシピにない [ABO] のテクニックの要点であると筆者は理解している。

一度 (4.2) のような式が予想でき（かつ正しけ）れば、（コンピュータを援用して）$S_j(k)$ たちの漸化式から原理的には機械的な「計算」=「消去」によって証明できる（詳細は [ABO, §3] を参照)。ただしこの過程には本質的に大きな多項式が現われる。そのため証明したい分割恒等式によっては、適切な関係式を予想できたとしても、実際にその計算を完遂できないことがありえると筆者は理解している（例えば、後述の主予想（の $p=9$ の場合）$D_9 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_9$ が現状そうだろうと思われる）。

5 主定理と主予想

定理 5.1 ([TW]). 分割論的な同値 $D_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Schur}_7$ が成り立つ。ここで

$$\mathrm{Schur}_7 = \{\lambda\in\mathsf{Par}\mid \lambda\text{ は 7-good かつ }S_{876}\ni\forall s\text{-avoiding}\}(\subseteq\mathcal{D})$$

と定義される分割イデアルで、必要な語は次の通りである。

- λ が 7-good とは、$\lambda\in\mathcal{D}$ であって、任意の $1\le i\le \ell(\lambda)-3$ について $\lambda_i-\lambda_{i+3}\ge 7$ かつ、$\lambda_i-\lambda_{i+3}=7$ ならば次の条件 (a) または (b) のいずれかを満たしていることを言う（ここで $a\%b$ は $a\ge 1$ を $b\ge 1$ で割った余りである)。

  (a) $\lambda_i, \lambda_i+\lambda_{i+1}, \lambda_i+\lambda_{i+1}+\lambda_{i+2}, \lambda_{i+1}+\lambda_{i+2}+\lambda_{i+3}, \lambda_{i+2}+\lambda_{i+3}, \lambda_{i+3}\notin 7\mathbb{Z}$,

  (b) $(\lambda_i\%7, \lambda_{i+1}\%7, \lambda_{i+2}\%7)\in\{(1,4,2),(2,1,4),(3,6,5),(4,2,1),(5,3,6),(6,5,3)\}$.

- $s = (s_1, \cdots, s_t) \in \mathbb{Z}^t_{\geq 1}$ について、$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ が s-avoiding とは、任意の $1 \leq j \leq \ell - t + 1$ と $k \geq 1$ について $(\lambda_j, \cdots, \lambda_{j+t-1}) \neq (s_1 + 7k, \cdots, s_t + 7k)$, なることを言う。

- S_{876} は以下の元からなる有限集合である。

$$\left\{\begin{array}{c}(4,3), (5,3,2), (5,4,2), (9,6,5,1), (14,8,7,6), (13,9,8,5), (14,9,8,5), (14,9,8,6), (14,10,8,6), (14,11,8,6),\\ (14,12,8,6), (14,13,8,6), (15,13,8,6), (15,13,8,7), (15,13,9,7), (15,13,10,7), (15,13,11,7), (15,13,12,7),\\ (14,13,9,6,5), (15,13,9,6,5), (16,13,12,7), (15,14,13,7), (15,14,9,6,5), (15,14,9,7,5), (15,14,9,7,6),\\ (15,14,10,7,6), (15,14,11,7,6), (15,14,12,7,6), (16,14,12,7,6), (16,15,12,7,6), (16,15,12,8,6),\\ (16,15,12,8,7), (16,14,13,7,6,5), (16,15,13,7,6,5), (16,15,14,7,6,5), (16,15,14,8,6,5), (16,15,14,8,7,5).\end{array}\right\}$$

定理 5.1 をどうやって見つけたのかは、本稿では論じないことにするが、その証明は §4.1 で説明した [ABO] と同様に行うことができる。そのためには

(a) 単射 $\varphi_7 : \mathrm{Schur}_7 \hookrightarrow \mathsf{Par}$ であって、$\mathsf{Image}\,\varphi_7$ が「$B^{\circ}_{4,3,3}$ のように振舞う（= 以下の (b),(c) が可能)」ものを見つけ、

(b) $\mathsf{Image}\,\varphi_7$ を使って、定義 4.1 を同様に行い、それらの満たす漸化式を導出し、

(c) 証明が機能するように (4.2) の類似を発見的に見出し、漸化式を使って証明する

という方針をとることになる。どのステップも大変な計算になるが、詳細は述べないことにする。

さて $p = 3, 5, 7$ について「Schur の分割定理」を知ったことにより、一般の奇数 $p \geq 3$ についての予想に至った。この予想は $p = 3, 5, 7$ では正しく、例えば $p = 9, 11$ では $n \leq 10^6$ まで正しいことが確認できる。

予想 5.2. 任意の奇数 $p = 2h + 1 \geq 3$ について、分割論的同値 $D_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_p$ が成立する。ここで T_p は以下の条件を満たす $\lambda \in \mathsf{Par}$ たちからなる分割イデアルである。

(T1) $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in p\mathbb{Z}$,

(T2) $\lambda_i - \lambda_{i+h} \geq p$,

(T3) 任意の $1 \leq i < j \leq \ell(\lambda)$ について、以下が成り立つ。

- $j - i \geq h$ ならば「$\lambda_i + \lambda_j \in p\mathbb{Z}$ かつ $\lambda_j - \lambda_i = 2(j-i) + 1$」とはならない
- $j - i < h$ ならば「$\lambda_i + \lambda_j \in p\mathbb{Z}$ かつ $\lambda_j - \lambda_i = 2(j-i), 2(j-i) - 1$」とはならない

少し考えてみると (T3) の最初の条件は、$j - i$ が十分大きければ $\lambda_j - \lambda_i$ が $2(j-i)+1$ より大きくなる（(T2) より）ことが分かる。以上より (T3) は有限個の「部分パターン（とその p ずらし）を禁止」という形の制限であることが分かる。より正確に

$$T_3 = \mathrm{Schur}_3, \quad T_5 = B^{\circ}_{4,3,3}(\overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Schur}_5), \quad T_7 = \varphi_7(\mathrm{Schur}_7)$$

となっている（φ_7 は定義を述べていないので、最後の等式はお話と思っていただきたい)。

予想 5.2 は、純粋な分割理論の定理としても（正しければ）未発見であったことを疑わせるものに筆者には感じられる。少なくとも（主定理とは異なり）記憶できるほどの短さであり、またこれまで説明した経緯からも分かるように Rogers-Ramanujan 恒等式とも直接的に関連している。

本稿では Schur_7 の定義に至った経緯を述べなかったが、その heuristic には

- Külshammer-Olsson-Robinson による generalized blocks [KOR]
- Kashiwara-Miwa-Petersen-Yung による量子アフィン群の Fock 空間 [KMPY]（$A^{(2)}_{\text{偶数}}$ への特殊化は [LT] も参照）

の理論を用いている。このような経緯からも、我々は Schur_7 や T_p は（少なくとも）対称群のモジュラースピン表現論と関係あると期待しており、現状いくつかの予想や観察がある。これらを正確に定式化・証明すること、そして予想 5.2 の証明が今後の課題である。

6 最後に

講演の機会を与えてくださった直井克之さんに感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

[A1] G.E. Andrews, *On the general Rogers-Ramanujan theorem*, Memiors of the American Mathematical Society, No. 152. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974.

[A2] G.E. Andrews, *A general theory of identities of the Rogers-Ramanujan type*, Bull.Amer Math.Soc. **80** (1974) 1033-1052.

[A3] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Reprint of the 1976 original. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[A4] G.E. Andrews, *q-series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 66. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[A5] G.E. Andrews, *Physics, Ramanujan, and computer algebra. Computer algebra*, (New York, 1984), 97-109, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 113, Dekker, New York, 1989.

[ABO] G.E. Andrews, C. Bessenrodt and J.B. Olsson, *Partition identities and labels for some modular characters*, Trans.Amer.Math.Soc. **344** (1994), 597-615.

[Be1] C. Bessenrodt, *A combinatorial proof of a refinement of the Andrews-Olsson partition identity*, European J.Combin. **12** (1991), 271–276.

[Be2] C. Bessenrodt, *Representations of the covering groups of the symmetric groups and their combinatorics*, Sem.Lothar.Combin. **33** (1994) (electronic).

[BK] J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A^{(2)}_{2\ell}$ and modular branching rules for $\widehat{S}_n$*, Represent.Theory **5** (2001), 317–403.

[BMO] C. Bessenrodt, A.O. Morris and J.B. Olsson, *Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups at characteristic 3*, J.Algebra **164** (1994), 146-172.

[Bre] D.M. Bressoud, *A combinatorial proof of Schur's 1926 partition theorem*, Proc.Amer.Math.Soc. **79** (1980), 338-340.

[BK] J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A^{(2)}_{2l}$ and modular branching rules for $\widehat{S}_n$*, Represent.Theory **5** (2001), 317–403.

[Gol] H. Göllnitz, *Partitionen mit Differenzenbedingungen* (German), J.Reine Angew.Math. **225** (1967) 154-190.

[Jam] G.D. James, *The irreducible representations of the symmetric groups*, Bull.London Math.Soc. **8** (1976), 229–232.

[KMPY] M. Kashiwara, T. Miwa, J-U. Petersen and C.M. Yung, *Perfect crystals and q-deformed Fock spaces*, Selecta Math.(N.S.) **2** (1996), 415-499.

[KOR] B. Külshammer, J.B. Olsson and G.R. Robinson, Generalized blocks for symmetric groups, Invent. Math. **151** (2003), 513–552.

[LT] B. Leclerc and J-Y. Thibon, *q-deformed Fock spaces and modular representations of spin symmetric groups*, J.Phys.A **30** (1997), 6163-6176.

[Mat] A. Mathas, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, University Lecture Series, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Sc1] I. Schur, *Gesammelte Abhandlungen. Band III* (German), Herausgegeben von Alfred Brauer und Hans Rohrbach. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Sc2] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen and der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *On a general Schur partition theorem* (tentative), in preparation