数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 91-99



# 周期的 $R$-多項式の組合せ論的明示公式

東京工業大学　渡邉 英也
Hideya Watanabe
Tokyo Institute of Technology

## 1 イントロダクション

有限 Weyl 群 $W$ に付随する Kazdan-Lusztig 基底 $\{C_w = T_w + \sum_{y<w} P_{y,w}T_y\}_{w\in W}$ は, $W$ の Hecke 環 $\mathcal{H}$ の上のある対合的自己同型写像 $^- : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で不変な基底として定義される. その係数 $P_{y,w} \in \mathbb{Z}[q]$ たちは Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ばれ, 幾何学的, または表現論的に重要な意味を持つことが示されてきた. Kazhdan-Lusztig 多項式は, その定義から求めることは難しく, 通常は $R$-多項式という 1 変数多項式の族 $\{R_{y,w}\}_{y,w\in W} \subset \mathbb{Z}[q]$ と等式

$$q^{\ell(y,w)}\overline{P}_{y,w} - P_{y,w} = R_{y,w} + \sum_{y<z<w} R_{y,z}P_{z,w} \quad (y, w \in W)$$

を用いて ($\ell(y,w)$ に関して) 帰納的に計算される. ここに, $<$ は Bruhat order, $\ell : W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は length function, $\ell(y,w) := \ell(w) - \ell(y)$ である. この手法では $R$-多項式をあらかじめ知っておく必要があるが, $R$-多項式に関しては簡単な漸化式が知られている. また, $R$-多項式の組合せ論的な明示公式が Dyer によって与えられている (記号は本文中で定義する):

**定理 1.1** ([D, (3.4) Corollary], [BjBr, Theorem 5.3.4]). $<$ を $\Phi_+$ 上の reflection order, $z, x \in W$ に対し $z$ から $x$ への path 全体の集合を $B^<(z,x)$ とする. このとき, $R$-多項式 $R_{z,x}$ は次のように表される:

$$R_{z,x} = \sum_{\Delta\in B^<(z,x)} q^{\frac{1}{2}\left(\ell(z,x)-\ell(\Delta)\right)}(q-1)^{\ell(\Delta)}.$$

一方, アフィン Weyl 群 $W_{\mathrm{af}}$ の Hecke 環 $\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$ の完備化 $\widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}}$ 上のある対合的自己同型写像 $\Psi : \widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}} \to \widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}}$ で不変な基底 $\{D_w = \widetilde{T}_w + \sum_{y<_{\frac{\infty}{2}}w} Q_{y,w}\widetilde{T}_y\}_{w\in W_{\mathrm{af}}}$ が [L] で導入された. ここに, $<_{\frac{\infty}{2}}$ は semi-infinite Bruhat order である. これらの係数 $Q_{y,w}$ たちを我々は周期的 Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ぶ. 周期的 Kazhdan-Lusztig 多項式もまた表現論的に重要な意味を持つと予想されている (Lusztig 予想, Feigin-Frenkel 予想). 周期的 Kazhdan-Lusztig 多項式を求めるには $R$-多項式の代わりに周期的 $R$-多項式 $\mathcal{R}_{y,w}$ を使う. 周期的 Kazhdan-Lusztig 多項式と周期的 $R$-多項式の関係は以下で与えられる:

$$q^{\ell^{\frac{\infty}{2}}(y,w)}\overline{Q}_{y,w} - Q_{y,w} = (-1)^{\ell^{\frac{\infty}{2}}(y,w)}\overline{\mathcal{R}}_{y,w} + \sum_{y<_{\frac{\infty}{2}}z<_{\frac{\infty}{2}}w} (-1)^{\ell^{\frac{\infty}{2}}(y,w)}\overline{\mathcal{R}}_{y,z}Q_{z,w} \quad (y, w \in W).$$

ここで, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(w)$ は $w \in W_{\mathrm{af}}$ の semi-infinite length, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y,w) := \ell^{\frac{\infty}{2}}(w) - \ell^{\frac{\infty}{2}}(y)$ である.

アフィン Weyl 群 $W_{\mathrm{af}}$ は有限 Weyl 群 $W$ を部分群に持つので, $y, w \in W$ に対し 4 つの多項式 $P_{y,w}$, $R_{y,w}$, $Q_{y,w}$, $\mathcal{R}_{y,w}$ が定義されるが, これらに関して次が成り立つ:

$$P_{y,w} = Q_{y,w}, \quad R_{y,w} = \mathcal{R}_{y,w}.$$

このように, 周期的 Kazhdan-Lusztig 多項式及び周期的 $R$-多項式は（通常の）Kazhdan-Lusztig 多項式及び $R$-多項式の一般化であるとみなせる. 本稿では周期的 $R$-多項式の組合せ論的な明示公式を, 定理 1.1 の自然な一般化とみなせる形で紹介する.

## 2 アフィン・ルート系

次のように記号を準備する.

- $\mathfrak{g}$ : 有限次元複素単純 Lie 環
- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ : Cartan 部分代数
- $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Phi_+ \subset \Phi(\subset \mathfrak{h}^*)$ : 単純ルートの集合, 正ルートの集合, ルート系
- $\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ : 単純余ルートの集合
- $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ : duality pairing
- $Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i$ : coroot lattice
- $P^\vee = \{\mu \in \mathfrak{h} \mid \langle \alpha_i, \mu \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for all } i = 1, \ldots, l\}$ : coweight lattice
- $P_+^\vee = \{\mu \in P^\vee \mid \langle \alpha_i, \mu \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i = 1, \ldots, l\}$ : dominant coweights の集合
- $W = \langle s_1, \ldots, s_l \rangle$ : Weyl 群, ただし $S := \{s_1, \ldots, s_l\}$ は simple reflections

$W$ と $Q^\vee$ は $\mathfrak{h}$ に次で作用する: $i = 1, \ldots, l$, $\lambda \in Q^\vee$, $\mu \in \mathfrak{h}$ に対して

$$s_i \cdot \mu = \mu - \langle \alpha_i, \mu \rangle \alpha_i^\vee, \quad t_\lambda \cdot \mu = \mu + \lambda.$$

ここで, $t_\lambda$ は $\lambda$ の, $\mathfrak{h}$ 上のアフィン変換群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ における像である. $\theta \in \Phi_+$ を最高ルートとし, $s_0 := s_\theta t_{-\theta} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ とおく（$s_\theta$ は $\theta$ に関する鏡映). すると, アフィン Weyl 群 $W_{\mathrm{af}} \simeq W \ltimes Q^\vee$ は $S_{\mathrm{af}} := \{s_0, s_1, \ldots, s_l\}$ で生成される.

$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ を untwisted アフィン Lie 環（$K$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ の中心元）とする. このとき, $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$ は

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$$

である. $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の間の duality pairing $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ を $\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$ と $\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$ の間の duality pairing $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^* \times \mathfrak{h}_{\mathrm{af}} \to \mathbb{C}$ に次のように拡張する:

$$\langle \mathfrak{h}^*, \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D \rangle = 0.$$

さらに, $\delta \in \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$ を次で定義する:

$$\langle \delta, \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \rangle = 0,$$
$$\langle \delta, D \rangle = 1.$$

このとき, $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ の正の実ルート全体の集合 $\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}}$ は次で与えられる:

$$\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}} = \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Phi_+,\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \sqcup \{-\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Phi_+,\ m \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

## 3 reflection order

この節では, 主定理で用いる reflection order の定義と基本的な性質についてまとめる.

**定義 3.1.** $\Phi_+$ (resp., $\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}}$) 上の全順序 $<$ が reflection order であるとは, 次の条件をみたすことである: $\alpha, \beta \in \Phi_+$ (resp., $\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}}$), $\alpha < \beta$, $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ とするとき, $a\alpha + b\beta \in \Phi_+$ (resp., $\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}}$) ならば $\alpha < a\alpha + b\beta < \beta$.

**例 3.2.** $A_2$ 型の positive roots を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ と書けば, reflection order は

$$\alpha_1 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_2$$

と, その逆順序の 2 つだけである.

**事実 3.3.** (1) $\Phi_+$ (resp., $\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}}$) には reflection order が存在する.

(2) $\Phi_+$ 上の任意の reflection order は $\Phi_{\mathrm{af},\,+}^{\mathrm{re}}$ 上の reflection order に拡張される.

## 4 semi-infinite Bruhat order

有限 Weyl 群 $W$ やアフィン Weyl 群 $W_{\mathrm{af}}$ などの Coxeter 群には (通常の) Bruhat order や length function $\ell$ が定義されるが, ここでは [L] に従って別の半順序 $<_{\frac{\infty}{2}}$ と整数値関数 $\ell^{\frac{\infty}{2}} : W_{\mathrm{af}} \to \mathbb{Z}$ を定義する.

まず, 各 $\alpha \in \Phi_+$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathcal{F}_{\alpha,m} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Q^\vee$ を次で定義される超平面とする:

$$\mathcal{F}_{\alpha,m} := \{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, \mu \rangle = m\}.$$

さらに

$$\mathcal{F}_{\alpha,m}^{\pm} := \{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \pm(\langle \alpha, \mu \rangle - m) > 0\}$$

とおく.

**定義 4.1.** $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus (\bigcup_{\alpha\in\Phi_+,\, m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\alpha,m})$ の連結成分を alcove という.

特に, $A^- := \{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid -1 < \langle\alpha,\lambda\rangle < 0 \text{ for all } \alpha \in \Phi_+\}$ は (fundamental) alcove である.

**事実 4.2.** $W_{\mathrm{af}}$ は alcove 全体の集合へ忠実かつ推移的に作用する. 特に

$$W_{\mathrm{af}} \to \{\text{alcoves}\},\ w := \mathrm{cl}(w)t_{\mathrm{wt}(w)} \mapsto A^- \cdot w := \mathrm{cl}(w)^{-1}A^- + \mathrm{wt}(w)$$

は, 全単射である. ここで, $\mathrm{cl}(w) \in W$, $\mathrm{wt}(w) \in Q^\vee$ である.

各 $i = 1, \ldots, l$ (resp., $i = 0$) に対し, $A^-$ の閉包 $\overline{A^-}$ と $\mathcal{F}_{\alpha_i,0}$ (resp., $\mathcal{F}_{\theta,-1}$) との共通部分を $A^-$ の $i$-wall と呼ぶ. さらに $A^-$ の $i$-wall の $w \in W_{\mathrm{af}}$ による像を $A^- \cdots w$ の $i$-wall と呼ぶ. 2 つの alcove $A^- \cdot w \neq A^- \cdot y$ の $i$-wall が一致するとき, $w = s_i y$ であることに注意せよ.

次に, alcove の組 $(A, B)$ に対し, 整数 $d(A, B)$ を次のように定める. $(A = A_0, A_1, \ldots, A_r = B)$ を alcove の列であって, 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して $A_{i-1}$, $A_i$ は唯一の共通の wall を持つものとする. このとき, $\beta_i \in \Phi_+$ と $m_i \in \mathbb{Z}$ で $\mathcal{F}_{\beta_i,m_i}$ が共通の wall を含むものが一意に定まる. そこで, $d(A, B)$ を次で定義する.

$$d(A,B) := \sum_{i=1}^{r} d(A_{i-1}, A_i),$$

$$d(A_{i-1}, A_i) := \begin{cases} 1 & \text{if } A_i \subset \mathcal{F}^+_{\beta_i,m_i} \text{ (or equivalently, } A_{i-1} \subset \mathcal{F}^-_{\beta_i,m_i}), \\ -1 & \text{if } A_i \subset \mathcal{F}^-_{\beta_i,m_i} \text{ (or equivalently, } A_{i-1} \subset \mathcal{F}^+_{\beta_i,m_i}). \end{cases}$$

そして, $y, w \in W_{\mathrm{af}}$ に対し, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y, w) := d(A^- \cdot y, A^- \cdot w)$ と定義する. 特に $y = e$ ($W$ の単位元) のとき, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(e, w)$ を $\ell^{\frac{\infty}{2}}(w)$ と書き, $w$ の semi-infinite length と呼ぶ. 3 つの alcove $A, B, C$ に対して, $(A = A_0, A_1, \ldots, A_r = B)$, $(B = B_0, B_1, \ldots, B_s = C)$ を上のような alcove の列とすると $(B = A_r, \ldots, A_1, A_0 = A)$, $(A = A_0, A_1, \ldots, A_r = B = B_0, B_1, \ldots, B_s = C)$ という alcove の列を考えれば $d(B, A) = -d(A, B)$, $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ となることがわかる. すなわち, $x, y, w \in W_{\mathrm{af}}$ に対して $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y, x) = -\ell^{\frac{\infty}{2}}(x, y)$, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(x, y) + \ell^{\frac{\infty}{2}}(y, w) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x, w)$ である. 特に $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y, w) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(w) - \ell^{\frac{\infty}{2}}(y)$ を得る.

**例 4.3.** $A_2$ 型:

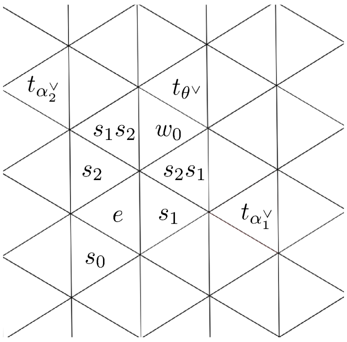



図 1: alcoves and elements of $W_{\mathrm{af}}$

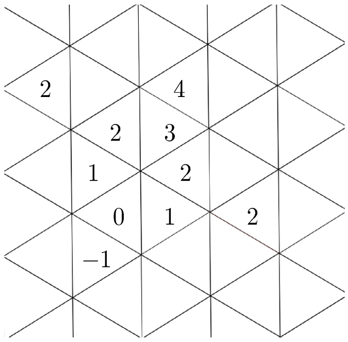



図 2: semi-infinite lengths

**事実 4.4.** $w = \mathrm{cl}(w)t_{\mathrm{wt}(w)} \in W_{\mathrm{af}}$ に対して

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(w) = \ell(\mathrm{cl}(w)) + 2\langle \rho, \mathrm{wt}(w)\rangle.$$

ただし, $\ell(\mathrm{cl}(w))$ は $\mathrm{cl}(w) \in W$ の通常の length, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_+}\alpha$ は Weyl vector である.

## 5 $R$-多項式の組合せ論的明示公式

$\mathcal{H}$ を $W$ の Hecke 環とする. すなわち, $\mathcal{H}$ は $\{T_x \mid x \in W\}$ を自由基底にもつ $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ ($q$ は不定元) 上の結合代数であり, 次の定義関係式を持つものである: $s \in S$, $x \in W$ に対して

$$T_sT_x := \begin{cases} T_{sx} & \text{if } x < sx, \\ qT_{sx} + (q-1)T_x & \text{if } sx < x. \end{cases}$$

定義より, $x = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ を $x \in W$ の簡約表示とすれば $T_x = T_{s_{i_1}}\cdots T_{s_{i_r}}$ であり, これは簡約表示の取り方に依らない. また, 直接計算で $T_s^{-1} = q^{-1}T_s - q^{-1}(q-1)T_e$ がわかるので

$$\bar{\ } : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ q \mapsto q^{-1},\ T_x \mapsto (T_{x^{-1}})^{-1}$$

なる $\mathbb{Z}$ 上の線形写像は代数自己同型写像である.

**定義 5.1.** $z, x \in W$ に対して $R$-多項式 $R_{z,x} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を次式で定義する:

$$\overline{T_x} = q^{-\ell(x)}\sum_{z\in W}(-1)^{\ell(z,x)}R_{z,x}T_z.$$

**例 5.2.** $W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = e = s_2^2,\ s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2\rangle$ ($A_2$ 型) のとき

$$\begin{aligned}\overline{T_{s_1s_2s_1}} &= \overline{T_{s_1}T_{s_2}T_{s_1}} \\ &= (q^{-1}T_{s_1} - q^{-1}(q-1)T_e)(q^{-1}T_{s_2} - q^{-1}(q-1)T_e)(q^{-1}T_{s_1} - q^{-1}(q-1)T_e) \\ &= q^{-3}\big(T_{s_1s_2s_1} - (q-1)T_{s_1s_2} - (q-1)T_{s_2s_1} + (q-1)^2T_{s_1} + (q-1)^2T_{s_2} - (q-1)^3 - q(q-1)\big)\end{aligned}$$

なので,

$$
\begin{aligned}
R_{s_1s_2s_1,s_1s_2s_1} &= 1,\\
R_{s_1s_2,s_1s_2s_1} &= q-1,\\
R_{s_2s_1,s_1s_2s_1} &= q-1,\\
R_{s_1,s_1s_2s_1} &= (q-1)^2,\\
R_{s_2,s_1s_2s_1} &= (q-1)^2,\\
R_{e,s_1s_2s_1} &= (q-1)^3+q(q-1).
\end{aligned}
$$

**注意 5.3.** $R$-多項式は, 有限 Weyl 群だけでなく, 一般の Coxeter 群についても同様に定義される.

以下で, Dyer による $R$-多項式の組合せ論的明示公式を紹介する. まず, $\Phi_+$ 上の reflection order $<$ を 1 つ固定する.

**定義 5.4.** $z, x \in W$ に対し, $z$ から $x$ への長さ $k$ の path とは, $W$ の元の列 $\Delta = (z = z_0, z_1, \dots, z_k = x)$ で, 各 $i = 1, \dots, k$ に対してある $\beta_i \in \Phi_+$ があって $z_{i-1} < z_{i-1}s_{\beta_i} = z_i$ であり, さらに $\beta_1 < \cdots < \beta_k$ を満たすものである. $\Delta$ の長さ $k$ を $\ell(\Delta)$ で表す.

**定理 5.5** ([D, (3.4) Corollary], [BjBr, Theorem 5.3.4]). $<$ を $\Phi_+$ 上の reflection order, $z, x \in W$ に対し $z$ から $x$ への path 全体の集合を $B^<(z,x)$ とする. このとき, $R$-多項式 $R_{z,x}$ は次のように表される:

$$
R_{z,x} = \sum_{\Delta \in B^<(z,x)} q^{\frac{1}{2}\left(\ell(z,x)-\ell(\Delta)\right)}(q-1)^{\ell(\Delta)}.
$$

## 6 周期的 $R$-多項式の組合せ論的明示公式

$\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$ を $W_{\mathrm{af}}$ の Hecke 環とする. 任意の $\lambda \in Q^\vee$ に対し適当な $\mu \in Q^\vee \cap P_+^\vee$ を取れば $\lambda + \mu \in Q^\vee \cap P_+^\vee$ となる. この $\mu$ を用いて

$$
X^\lambda := T_{t_{\lambda+\mu}} T_{t_\mu}^{-1} \in \mathcal{H}_{\mathrm{af}}
$$

とおく.

**事実 6.1.** $X^\lambda$ は $\lambda + \mu \in Q^\vee \cap P_+^\vee$ なる $\mu \in Q^\vee \cap P_+^\vee$ の取り方に依らない.

$w = \mathrm{cl}(w)t_{\mathrm{wt}(w)} \in W_{\mathrm{af}}$ に対し,

$$
\widetilde{T}_w := T_{\mathrm{cl}(w)} X^{\mathrm{wt}(w)}
$$

と置くと, $\{\widetilde{T}_w \mid w \in W_{\mathrm{af}}\}$ は $\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の基底をなす. この基底に関する左 $\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$-加群構造は次で与えられる: $s \in S_{\mathrm{af}}$, $w \in W_{\mathrm{af}}$ に対して

$$
T_s \widetilde{T}_w = \begin{cases} \widetilde{T}_{sw} & \text{if } w <_{\frac{\infty}{2}} sw, \\ q\widetilde{T}_{sw} + (q-1)\widetilde{T}_w & \text{if } sw <_{\frac{\infty}{2}} w. \end{cases}
$$

さらに $\widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}} := \{\sum_{w\in W_{\mathrm{af}}} a_w\widetilde{T}_w \mid \text{there exists some } y\in W_{\mathrm{af}} \text{ such that } a_w = 0 \text{ unless } w \leq_{\frac{\infty}{2}} y\}$ とおき, $\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$ の左 $\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$-加群構造を拡張するように 左 $\mathcal{H}_{\mathrm{af}}$-加群構造を定義する.

**定理 6.2** ([K, Proposition 2.8]). 次の 2 条件を満たす対合的な $\mathbb{Z}$-線形自己同型写像 $\Psi : \widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}} \to \widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}}$ が唯一つ存在する:

$$\Psi(h\cdot m) = \overline{h}\cdot\Psi(m) \quad (h\in\mathcal{H}_{\mathrm{af}},\ m\in\widehat{\mathcal{H}_{\mathrm{af}}}),$$
$$\Psi(\sum_{x\in W}\widetilde{T}_{xt_\lambda}) = q^{-\ell^{\frac{\infty}{2}}(w_0t_\lambda)}\sum_{x\in W}\widetilde{T}_{xt_\lambda} \quad (\lambda\in Q^\vee).$$

ここで, $w_0 \in W$ は最長元である.

**定義 6.3.** $y, w\in W$ に対し, 周期的 $R$-多項式 $\mathcal{R}_{z,x}\in\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ を次式で定義する:

$$\Psi(\widetilde{T}_w) = q^{-\ell^{\frac{\infty}{2}}(y)}\sum_{y\in W_{\mathrm{af}}}(-1)^{\ell^{\frac{\infty}{2}}(y,w)}\mathcal{R}_{y,w}\widetilde{T}_y.$$

以下では, 周期的 $R$-多項式の組合せ論的明示公式を述べる. $\Phi_+$ 上の reflection order $<$ を 1 つ固定する.

**定義 6.4.** $y = \mathrm{cl}(y)t_{\mathrm{wt}(y)}, w = \mathrm{cl}(w)t_{\mathrm{wt}(w)} \in W_{\mathrm{af}}$ に対し, $y$ から $w$ への長さ $k$ の path とは $W_{\mathrm{af}}$ の元の列 $\Delta = (y = y_0, y_1, \ldots, y_k = w)$ で, 各 $i = 1,\ldots,k$ に対しある $\beta_i\in\Phi_+$ があって $\mathrm{cl}(y_i) = \mathrm{cl}(y_{i-1})s_{\beta_i}$ または $\mathrm{cl}(y_i) = \mathrm{cl}(y_{i-1})$ であり, いずれの場合も $y_{i-1} <_{\frac{\infty}{2}} y_i$, $\mathrm{wt}(y_i) - \mathrm{wt}(y_{i-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\beta_i^\vee$ で, さらに $\beta_1 < \cdots < \beta_k$ を満たすものである. $\Delta$ の長さ $k$ を $\ell(\Delta)$ で表す.

$y$ から $w$ への path 全体の集合を $P^<(y,w)$ で表す. 各 $\Delta = (y = y_0, y_1, \ldots, y_k = w) \in P^<(y,w)$ に対して, $\mathrm{wt}(y_i) - \mathrm{wt}(y_{i-1}) = m_i\beta_i^\vee$ $(m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \beta_i\in\Phi_+, 1\leq i\leq k)$ とおく. さらに

$$d_i := \begin{cases} \frac{1}{2}\ell^{\frac{\infty}{2}}(y_{i-1},y_i) + m_i & (\text{if } \mathrm{cl}(y_i) = \mathrm{cl}(y_{i-1})), \\ \frac{1}{2}\left(\ell^{\frac{\infty}{2}}(y_{i-1},y_i) + 1\right) + m_i & (\text{if } \mathrm{cl}(y_{i-1}) < \mathrm{cl}(y_i)), \\ \frac{1}{2}\left(\ell^{\frac{\infty}{2}}(y_{i-1},y_i) - 1\right) + m_i & (\text{if } \mathrm{cl}(y_i) < \mathrm{cl}(y_{i-1})). \end{cases}$$

とおき, $\deg(\Delta)\in\mathbb{Z}$ を

$$\deg(\Delta) := \sum_{i=1}^{\ell(\Delta)} d_i - \ell(\Delta)$$

で定義する.

**注意 6.5.** 各 $1\leq i\leq \ell(\Delta)$ に対し, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y_{i-1},y_i)$ は $\mathrm{cl}(y_{i-1}) = \mathrm{cl}(y_i)$ のとき偶数で, そうでないとき奇数であるから $d_i$ は整数である.

以上の記号の下で, 次が主定理である.

**定理 6.6.** $y, w \in W_{\mathrm{af}}$ に対し,

$$\mathcal{R}_{y,w} = \sum_{\Delta \in P^{<}(y,w)} q^{\deg(\Delta)}(q-1)^{\ell(\Delta)}$$

が成り立つ.

**注意 6.7.** $y, w \in W$ のとき, $P^{<}(y,w) = B^{<}(y,w)$ であり, 各 $\Delta \in P^{<}(y,w) = B^{<}(y,w)$ に対して $\deg(\Delta) = \frac{1}{2}\big(\ell(y,w) - \ell(\Delta)\big)$ であることが容易に確かめられる. 従って我々の定理 6.6 は Dyer の定理 5.5 の一般化である. ここでは定理の証明は述べないが, 我々の証明は $y, w \in W$ のときでも Dyer の証明と異なるものであり, 定理 5.5 のより構成的な別証明を与える.

次に, 集合 $P^{<}(y,w)$ をより簡単に記述することで, 定理 6.6 をより使い易い形に書き直すことを考える. アイデアは, 平行移動 $w \xrightarrow[\beta]{1} wt_{\beta^\vee}$ を reflection の繰り返し $w \xrightarrow[\beta]{d_1} \mathrm{cl}(w)s_\beta t_{\mathrm{wt}(w)} \xrightarrow[\beta]{d_2} wt_{\beta^\vee}$ と見ることである. ただし $(d_1, d_2)$ は, $\mathrm{cl}(w) < \mathrm{cl}(w)s_\beta$ のとき $(0,1)$, $\mathrm{cl}(w)s_\beta < \mathrm{cl}(w)$ のとき $(1,0)$ である.

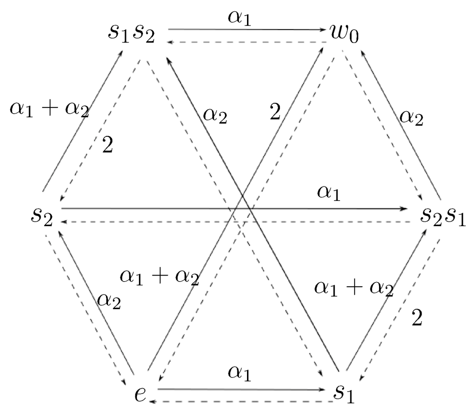
**定義 6.8.** Weyl 群 $W$ に付随する double Bruhat graph (DBG) とは, $W$ を頂点集合とするラベル付き有向グラフであり, $y', w' \in W$ が次のいずれかの条件を満たすときに限り有向辺 $y' \xrightarrow[\beta]{d} w'$ ($\beta \in \Phi_+$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$) で結ばれているものである:

(1) $y' < w'$, $w' = y's_\beta$, and $d = \frac{1}{2}\big(\ell(y', w') + 1\big)$;

(2) $w' < y'$, $w' = y's_\beta$, and $d = \frac{1}{2}\big(\ell(y', w') + 2\langle \rho, \beta^\vee \rangle + 1\big)$.

条件 (1) を満たす辺を Bruhat edge, 条件 (2) を満たす辺を quantum edge と言う.

**例 6.9.** $A_2$ 型の DBG は以下のものである.




ただし, Bruhat edge は実線で, quantum edge は点線で書かれており, ラベル 1 は省略してある.

**定義 6.10.** $y = \mathrm{cl}(y)t_{\mathrm{wt}(y)}, w = \mathrm{cl}(w)t_{\mathrm{wt}(w)} \in W_{\mathrm{af}}$ に対し, $y$ から $w$ への長さ $k$ の double Bruhat path とは, DBG 内の path $\Delta = (\mathrm{cl}(y) = y'_0 \xrightarrow[\beta_1]{d_1} y'_1 \xrightarrow[\beta_2]{d_2} \cdots \xrightarrow[\beta_k]{d_k} y'_k = \mathrm{cl}(w))$ で, $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_k$ かつ $\sum_{i \in \{1,\ldots,k \mid y'_{i-1} \xrightarrow[\beta_i]{d_i} y'_i \text{ is quantum}\}} \beta_i^\vee = \mathrm{wt}(w) - \mathrm{wt}(y)$ を満たすものである. $\Delta$ の長さ $k$ を $\ell(\Delta)$ で表す. $y$ から $w$ への double Bruhat path 全体の集合を $\mathrm{DBP}^<(y,w)$ と書く.

**定義 6.11.** $\Delta = (\mathrm{cl}(y) = y'_0 \xrightarrow[\beta_1]{d_1} y'_1 \xrightarrow[\beta_2]{d_2} \cdots \xrightarrow[\beta_k]{d_k} y'_k = \mathrm{cl}(w)) \in \mathrm{DBP}^<(y,w)$ とする.

(1) $\ell'(\Delta)$ を $\beta_i$ $(1 \leq i \leq \ell(\Delta))$ のうちで相異なるものの個数とする.

(2) $\Delta$ の degree $\deg(\Delta)$ を $\deg(\Delta) := \sum_{i=1}^{\ell(\Delta)} d_i - \ell'(\Delta)$ で定義する.

**定理 6.12.** $y, w \in W_{\mathrm{af}}$ に対して,

$$\mathcal{R}_{y,w} = \sum_{\Delta \in \mathrm{DBP}^<(y,w)} q^{\deg(\Delta)}(q-1)^{\ell'(\Delta)}.$$

## 7 謝辞

最後に, 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」において講演の機会を与えてくださった直井克之先生にこの場を借りてお礼申し上げます.

## 参考文献

[BjBr] A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter Groups, Graduate Texts in Mathematics vol. 231, Springer, New York, 2005.

[D] M. J. Dyer, Hecke algebras and shellings of Bruhat intervals, Compos. Math., 89 (1993), 91-115.

[K] S. Kato, On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups, Adv. Math., 55 (1985), 103-130.

[L] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, Adv. Math., 37 (1980), 121-164.