数理解析研究所講究録
第1992巻 2016年 100-113

Young Books and q-Selberg Integrals *

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 はじめに

正整数 n の分割 λ の Young 図形（英国風に，単位正方形を上，左に詰めて並べる）の各箱に $1,2,\cdots,n$ の数字を1つずつ書き込んで，2つの条件

- 各数字はちょうど1回ずつ現れる.
- 各行の成分は左から右に，各列の成分は上から下に単調増加である.

をみたすようにしたものを，λ を枠とする**標準盤**という．λ を枠とする標準盤全体のなす集合を $\mathrm{STab}(\lambda)$ と表すとき，その元の個数は

$$\#\mathrm{STab}(\lambda)=\frac{n!}{\prod_{x\in\lambda}h_x} \tag{1}$$

と，Young 図形の箱 $x\in\lambda$ における鉤の長さ h_x を用いた簡単な積公式 (Frame–Robinson–Thrall [3] の鉤長公式）で与えられる．また，標準盤 $T\in\mathrm{STab}(\lambda)$ に対して major 指数と呼ばれる非負整数 $\mathrm{maj}(T)$ が定まり，これに関する母関数も

$$\sum_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)}q^{\mathrm{maj}(T)}=q^{n(\lambda)}\frac{[n]_q!}{\prod_{x\in\lambda}[h_x]_q} \tag{2}$$

（ここで，$n(\lambda)=\sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$ であり，$[r]_q=(1-q^r)/(1-q)$, $[n]_q!=\prod_{r=1}^{n}[r]_q$ である）と積公式で表される.（例えば [17, 7.21.5 Corollary] を見よ.）さらに，同様の公式が，ストリクトな分割に対する変形標準盤に対しも成り立つことが知られている.

Peterson–Proctor（例えば [14] を見よ）は，Young 図形や変形 Young 図形の一般化として d-complete な半順序集合の概念を定式化し，その半順序集合としての linear extension に対して (1), (2) と同様の鉤長公式を与えている．一方，Adin–King–Roichman [1], Panova [12] は，長方形の Young 図形や階段状の変形 Young 図形の一部を切り取った図形上の標準盤の個数も積の形に表されることを示している．しかし，この場合の積公式は鉤長公式 (1) のように単純ではなく，(2) のような一般化（q 類似）も見出されていない.

Kim–Oh [7] は，標準盤の新たな一般化として Young book という概念を導入した．これは特別な場合として長方形の Young 図形や階段状の変形 Young 図形上の標準盤を含ん

*本稿は，Jang Soo Kim の共同研究 [8] に基づくものである.

でいる．そして，彼らは Young book の個数が Selberg 積分を用いて次のように表されることを証明している：

$$\begin{aligned}
&\#\mathrm{YB}(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) \\
&= N!\prod_{k=1}^{m}\frac{F(r_k)F(s_k)}{F(n+r_k+s_k)} \\
&\quad\times\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{k=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_k}(1-x_i)^{s_k}\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|\right)dx_1\cdots dx_n. \qquad (3)
\end{aligned}$$

ここで，$F(l)=\prod_{i=1}^{l-1}i!$ である．(Young book の定義は §2 を参照されたい．) この公式 (3) と Selberg 積分の積公式 [15] を合わせることによって，Young book の個数に関する積公式（系 2.4）が導かれる．

本稿の主結果は，Kim–Oh の公式 (3) の一般化（q 類似）である．つまり，Young book の major 指数（定義 3.1 を見よ）に関する母関数は，Jackson 積分（q 積分）を用いて次のように表される：

$$\begin{aligned}
&\sum_{B\in\mathrm{YB}(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})} q^{\mathrm{maj}(B)} \\
&= q^{-(r+1)\binom{n}{2}-m\binom{n}{3}}[N]_q!\prod_{k=1}^{m}\frac{F_q(r_k)F_q(s_k)}{F_q(n+r_k+s_k)} \\
&\quad\times\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{k=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_k}\prod_{j=1}^{s_k}(1-q^jx_i)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|\right)d_qx_1\cdots d_qx_n. \qquad (4)
\end{aligned}$$

ここで，$F_q(l)=\prod_{i=1}^{l-1}[i]_q!$ である．この公式 (4) において $q\to 1$ の極限をとると，Kim–Oh の公式 (3) が得られる．しかし，(4) に現れる Jackson 積分は，よく知られた q-Selberg 積分（Askey [2] によって予想され，Habsieger [4], Kadell [6] によって独立に証明された）とは異なるものであり，一般には積公式をもたない．

本稿の構成は以下の通りである．§2 では，[7] で導入された Young book などの定義を与える．§3 では major 指数を導入し主定理を述べるとともに，その証明の概要を説明する．そして，§4 では，Schur 関数に関する Cauchy の公式などを利用することによって，特別な場合に (4) に現れる q-Selberg 型積分が積の形に表されることを示す．さらに，同様のアイデアで得られる q-Selberg 型積分の積公式も紹介する．

2 Young book とその個数

Young book を定義するために，その土台となる Young 図形の概念の一般化を導入する．

定義 2.1. (1) 正整数 n，非負整数 r, s に対して，

$$P(n;r,s)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: -r+1\le i\le n,\ 1\le j\le n+s,\ i\le j\}$$

とおき，$\boldsymbol{(n;r,s)}$**-staircase** と呼ぶ．

(2) 正整数 n, m と長さ m の非負整数列 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$, $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_m)$ が与えられたとき,

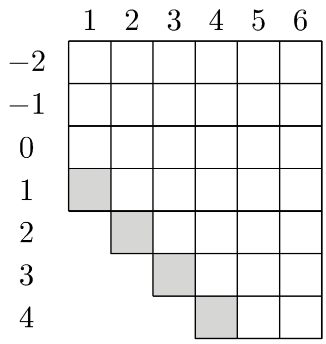
$$\widetilde{P}(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})=\{(k,i,j)\in\mathbb{Z}^3 : 1\leq k\leq m,\ (i,j)\in P(n;r_k,s_k)\}$$

とおき，その上の同値関係 $\sim$ を

$$(k,i,j)\sim(k',i',j')\iff i=j=i'=j'$$

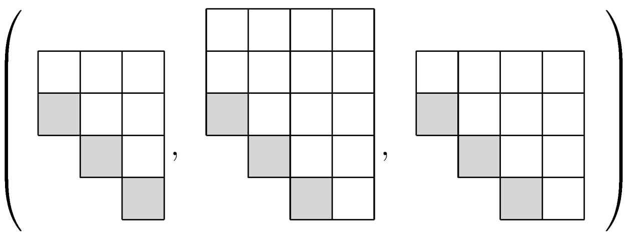
によって定める．このとき，$\widetilde{P}(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ の $\sim$ による商集合を $P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ と表し，**$(n,m;r,s)$-staircase** と呼ぶ.

Young 図形の場合と同様に格子点の代わりに単位正方形を置いて，$(n;r,s)$-staircase $P(n;r,s)$ を表す．$P(n;r,s)$ は縦 $r+n$，横 $s+n$ の長方形から左下隅の三角形部分を取り除いたものである．例えば，次の図は $(4;3,2)$-staircase を表している：



特に，$r=0$ のとき，$P(n;0,s)$ はストリクトな分割 $(s+n,s+n-1,\cdots,s+1)$ に対応する変形 Young 図形である．また，$P(n;r,s)$ の部分集合 $\{(1,1),(2,2),\cdots,(n,n)\}$ を，$P(n;r,s)$ の**対角線**と呼ぶ．上の図で影を付けた箱が $P(4;3,2)$ の対角線である.

定義 2.1 (2) では形式的な定義を与えたが，$P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ は m 枚の staircase $P(n;r_1,s_1)$, $\cdots,P(n;r_m,s_m)$ を対角線を同一視して貼り合わせたものである．そこで，$P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ を構成する $P(n;r_k,s_k)$（対角線も含む）を $P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ の **k ページ目**と呼ぶ．また，$P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ は，$P(n;r_1,s_1),\cdots,P(n;r_m,s_m)$ を並べて図示する．例えば，



は，$(3,3;(1,2,1),(0,1,1))$-staircase を表している．この図で影を付けた箱（各ページの対角線）はそれぞれの staircase にあるが，実際には同一視されている.

正整数 n, m と長さ m の非負整数列 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ に対して，$r=\sum_{k=1}^{m}r_k$, $s=\sum_{k=1}^{m}s_k$ とおくとき,

$$\begin{aligned}\#P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})&=\sum_{k=1}^{m}\left((n+r_k)(n+s_k)-\frac{1}{2}n(n-1)\right)-(m-1)n\\&=m\binom{n}{2}+(r+s+1)n+\sum_{k=1}^{m}r_ks_k\end{aligned}$$

である.

次に，本稿の主役である Young book を定義する.

定義 2.2. n, m を正整数，$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ を長さ m の非負整数列とする．$(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$-staircase $P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ の各箱に，$1, 2, \cdots, N$ （ただし，$N = \#P(n; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ である）の数字を 1 つずつ書き込んで, 2 つの条件

- 各整数はちょうど 1 回ずつ現れる.
- 各ページで，各行の成分は左から右に，各列の成分は上から下に単調増加である.

をみたすようにしたものを，**$(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$-Young book** と呼ぶ．また，$(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$-Young book 全体のなす集合を $\mathrm{YB}(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ と表す.

例えば,

$$\left(\begin{array}{ccc} & & \\ 1 & 4 & 11 \\ 7 & 8 & 16 \\ & 13 & 17 \\ & & 21 \end{array} , \quad \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 14 & 15 \\ 7 & 12 & 18 & 19 \\ & 13 & 20 & 22 \\ & & 21 & 23 \end{array} \right)$$

は $(3, 3; (1, 2), (0, 1))$-Young book である．影を付けた箱は同一視されているので，同じ数字が書き込まれていることに注意する.

Kim–Oh [7] は，Stanley による Selberg 積分の組合せ論的解釈 [17, Exercise .10 (b)] と，Potnikov による変形標準盤の重みつき母関数の公式 [13, Theorem 15.1] とを用いて，次の定理を証明している.

定理 2.3. （Kim–Oh [7]） n, m を正整数，$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ を長さ m の非負整数列とするとき，$\mathrm{YB}(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ の元の個数について次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{k=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_i^{r_k} (1 - x_i)^{s_k} \prod_{1 \le i < j \le n} |x_j - x_i| \right) dx_1 \cdots dx_n \\ &\qquad = \frac{1}{N!} \prod_{k=1}^m \frac{F(n + r_k + s_k)}{F(r_k) F(s_k)} \cdot \#\mathrm{YB}(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}). \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$N = \#P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$, $F(l) = \prod_{i=1}^{l-1} i!$ である.

この定理の (5) の左辺の積分は，$r = \sum_{k=1}^m r_k$, $s = \sum_{k=1}^m s_k$ とおくとき,

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^n x_i^r (1 - x_i)^s \prod_{1 \le i < j \le n} |x_j - x_i|^m dx_1 \cdots dx_n$$

と書き直すことができ，これは Selberg 積分 [15] に他ならない．よって，Selberg 積分の積公式を用いることにより，Young book の個数を積の形で表すことができる.

系 2.4. （Kim–Oh [7]）

$$\begin{aligned} &\#\mathrm{YB}(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \\ &\qquad = N! \prod_{k=1}^m \frac{F(r_k) F(s_k)}{F(n + r_k + s_k)} \cdot \frac{2^n}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{(jm)!!(2r + (j-1)m)!!(2s + (j-1)m)!!}{m!!(2r + 2s + 2 + (n + j - 2)m)!!}. \end{aligned}$$

ここで，$N = \#P(n; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$, $r = \sum_{k=1}^{m} r_k$, $s = \sum_{k=1}^{m} s_k$ であり，$l!! = l \cdot (l-2) \cdot (l-4) \cdots$ である．

3 Young book の母関数

Young book の母関数を考えるために，major 指数を導入する．

定義 3.1. B を $(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$-Young book とする．$B$ の成分 i は，次の (a), (b) いずれかの条件をみたすとき，B の **descent** であるという：

(a) $i+1$ は i より上の行（ページは問わない）に現れる．

(b) $i, i+1$ はどちらも対角線上にはなく，$i+1$ は i より前のページの同じ行に現れる．

B の descent 全体のなす集合を $\mathrm{Des}(B)$ とおく．そして，

$$\mathrm{maj}(B) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(B)} i$$

とおき，B の **major 指数**と呼ぶ．

例えば，$(3, 2; (1, 2), (0, 1))$-Young book

$$B = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 11 \\ \hline 7 & 8 & 16 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 13 & 17 \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 21 \\ \cline{3-3} \end{array} \, , \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 6 & 9 \\ \hline 5 & 10 & 14 & 15 \\ \hline 7 & 12 & 18 & 19 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 13 & 20 & 22 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 21 & 23 \\ \cline{3-4} \end{array} \right)$$

を考えると，(a) のタイプの descent は $1, 5, 8, 13, 17, 21$ の 6 つあり，(b) のタイプの descent は 10 のみである．よって，$\mathrm{maj}(B) = 1 + 5 + 8 + 13 + 17 + 21 + 10 = 75$ となる．

以下，$0 < q < 1$ をみたす実数 q を固定する．このとき，関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の **Jackson 積分**（q 積分）は，

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} f(x) d_q x &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) d_q x_1 \cdots d_q x_n \\ &= (1-q)^n \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} f(q^{k_1}, \ldots, q^{k_n}) q^{k_1 + \cdots + k_n} \end{aligned}$$

によって定義される．$q \to 1$ とすると，Jackson 積分は通常の Riemann 積分となる．また，次の記号を用いる：

$$[r]_q = \frac{1-q^r}{1-q}, \quad [n]_q! = \prod_{r=1}^{n} [r]_q, \quad (a; q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i).$$

以上の準備のもとで，本稿の主結果を述べることができる．

定理 3.2. (Kim–岡田 [8]) n, m を正整数, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ を長さ m の非負整数列とするとき, $\mathrm{YB}(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ の major 指数に関する母関数について次の等式が成り立つ：

$$\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{k=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_k}\prod_{j=1}^{s_k}(1-q^jx_i)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|\right)d_qx_1\cdots d_ax_n$$

$$=q^{(r+1)\binom{n}{2}+m\binom{n}{3}}\frac{1}{[N]_q!}\prod_{k=1}^{m}\frac{F_q(n+r_k+s_k)}{F_q(r_k)F_q(s_k)}\cdot\sum_{B\in\mathrm{YB}(n;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})}q^{\mathrm{maj}(B)}. \quad (6)$$

ここで, $F_q(l)=\prod_{i=1}^{l-1}[i]_q!$ である.

注意. 定理 3.2 の (6) の左辺の Jackson 積分は,

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^r\prod_{k=1}^{m}(qx_i;q)_{s_k}\right)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^m d_qx$$

と書き直すことができるが, $m=2$, $\boldsymbol{s}=(s,0)$ (あるいは $(0,s)$) の場合を除いてよく知られた q-Selberg 積分 ([2], [5] を見よ)

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}(qx_i;q)_{\beta-1}\prod_{1\le i<j\le n}x_i^{2k}\left(q^{1-k}\frac{x_j}{x_i};q\right)_{2k}d_qx_1\cdots d_qx_n,$$

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^r(qx_i;q)_s\right)\prod_{1\le i<j\le n}\left((x_j-x_i)\prod_{l=1-k}^{k-1}(x_j-q^lx_i)\right)d_qx$$

とは異なる.

この節の残りで, 定理 3.2 の証明の概略を説明する. 証明は次の 3 つのステップに分けることができる.

(1) Young book の母関数を $P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ 分割の母関数を用いて表す.
(2) $P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ 分割の母関数を Schur 関数の q 特殊値を用いて表す.
(3) (2) で得られた表示を Jackson 積分を用いて書き直す.

第 1 ステップのために, P 分割の定義と基本定理を思い出しておく. (詳細は [16, 3.15] を参照されたい.)

定義 3.3. P を N 元からなる半順序集合とする.

(1) 写像 $\sigma:P\to\mathbb{N}$ (ここで, $\mathbb{N}$ は非負整数全体のなす集合である) は, 順序を逆転させるとき, つまり,

$$P \text{ において } x\le y \implies \mathbb{N} \text{ において } \sigma(x)\ge\sigma(y)$$

が成り立つとき, ***P* 分割**であるという. P 分割 σ に対して, $|\sigma|=\sum_{x\in P}\sigma(x)$ とおく, また, P 分割全体のなす集合を $\mathcal{A}(P)$ と表す.

(2) 順序を保つ全単射 $\omega:P\to[N]$ (ここで, $[N]=\{1,2,\cdots,N\}$ である) を, P の **linear extension** と呼ぶ. P の linear extension 全体のなす集合を $\mathcal{L}(P)$ と表す.

命題 3.4. P を N 元からなる半順序集合とする．P の linear extension ω_0 を固定するとき，

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{A}(P)} q^{|\sigma|} = \frac{\sum_{\omega\in\mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(\omega_0\omega^{-1})}}{\prod_{i=1}^{N}(1-q^i)}.$$

ここで，$\omega_0\omega^{-1}$ は $[N]$ の置換であり，置換 π について

$$\mathrm{Des}(\pi)=\{i:\pi(i)>\pi(i+1)\},\quad \mathrm{maj}(\pi)=\sum_{i\in\mathrm{Des}(\pi)} i$$

である．

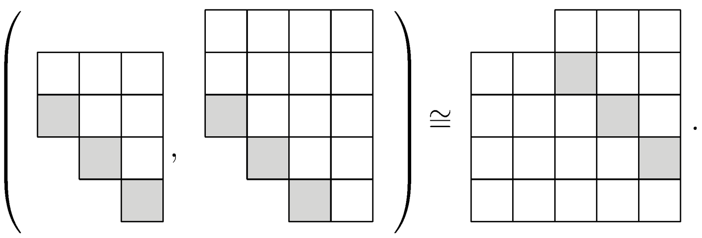
この P 分割の理論を適用するために，$(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$-staircase $P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ に半順序集合の構造を入れる．まず，$m=1$ のとき，$(n;r,s)$-staircase $P(n;r,s)$ は，

$$(i,j)\le(i',j') \Longleftrightarrow i\le i',\ j\le j'.$$

と定義することにより，半順序集合となる．一般に，$c, c'\in P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ に対して，

> c の代表元 (k,i,j) と c' の代表元 (k',i',j') で，$k=k'$, $i\le i'$, $j\le j'$ となるものが取れる

とき，$c\le c'$ と定義することにより，$P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ に半順序集合の構造を与える．つまり，各ページ $P(n;r_k,s_k)$ 上の半順序を張り合わせることで，$P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ に半順序を定義する．異なるページ上の箱（ただし，対角線上にないとする）は比較不可能であることに注意する．例えば，$(3,2;(1,2),(0,1))$-staircase は半順序集合としては，歪 Young 図形 $(5,5,5,5,5)/(2)$ と同型である：



このとき，$(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$-Young book は自然に半順序集合 $P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ の linear extension と見なすことができる．

次に，$P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ の linear extension ω_0 を，$1,2,\cdots,N$（ただし，$N=\#P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ である）の数字を次の条件をみたすように書き込んでできる Young book B_0 に対応するものとして定義する：

- 同じ行では，対角線上の箱に書き込まれている数字が最も小さい．
- 同じ行では，ページ数の若い方の部分にある数字の方が小さい．

例えば，$P(3,2;(1,2),(0,1))$ の場合は，

$$B_0=\left(\begin{array}{ccc} & & \\ 5 & 6 & 7 \\ 12 & 13 & 14 \\ & 18 & 19 \\ & & 22 \end{array},\quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 15 & 16 & 17 \\ & 18 & 20 & 21 \\ & & 22 & 23 \end{array}\right)$$

である．このとき，Young book $B \in \mathrm{YB}(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ に対応する linear extension を ω とすると，

$$\mathrm{Des}(B) = \mathrm{Des}(\omega_0 \omega^{-1}), \quad \mathrm{maj}(B) = \mathrm{maj}(\omega_0 \omega^{-1})$$

となる．よって，P 分割の基本定理（命題 3.4）を適用することにより，

命題 3.5.

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}))} q^{|\sigma|} = \frac{\sum_{B \in \mathrm{YB}(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})} q^{\mathrm{maj}(B)}}{\prod_{i=1}^{N}(1-q^i)}.$$

第 2 ステップのために，$P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ 分割の集合 $\mathcal{A}(P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}))$ を細分する．$\sigma \in \mathcal{A}(P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}))$ に対して，その対角線上の箱に書き込まれた数字を大きい順に読んでできる分割を，σ の **profile** と呼ぶ．例えば，$P(3, 2; (1, 2), (0, 1))$ 分割

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 0 \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 1 \\ \hline & & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right).$$

の profile は $(2, 2, 0)$ である．長さ n 以下の分割 λ に対して，profile が λ であるような $P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ 分割全体のなす集合を $\mathcal{A}_\lambda(P(n, m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}))$ と表す．このとき，

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P(n,m;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}))} q^{|\sigma|} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} q^{|\lambda|} \prod_{k=1}^{m} \sum_{\sigma_k \in \mathcal{A}_\lambda(P(n;r_k,s_k))} q^{|\sigma_k|-|\lambda|}.$$

ここで，Par_n は長さ n 以下の分割全体のなす集合である．よって，$m = 1$ のときの $\mathcal{A}_\lambda(P(n; r_k, s_k))$ の母関数がわかればよい．

分割 λ に対応する Schur 関数を s_λ と表す：

$$s_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+N-j}\right)_{1 \le i,j \le N}}{\det\left(x_i^{N-j}\right)_{1 \le i,j \le N}}.$$

このとき，[11, Theorem 2.1] と同様の議論から，$\mathcal{A}_\lambda(P(n; r_k, s_k))$ の母関数は，

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_\lambda(P(n;r,s))} q^{|\sigma|} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,0,\ldots,0)}(P(n+s;r,0))} q^{|\sigma|} \\ &= \frac{\prod_{h=1}^{r-1}(q;q)_h}{\prod_{h=n+s}^{n+r+s-1}(q;q)_h} \cdot s_\lambda(q^{r+1}, q^{r+2}, \ldots, q^{r+n+s}) \end{aligned}$$

と，λ に対応する Schur 関数 s_λ の q 特殊値を用いて表されることがわかる．従って，

命題 3.6.

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P(n;\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}))} q^{|\sigma|} = \prod_{k=1}^{m} \frac{\prod_{h=1}^{r_k-1}(q;q)_h}{\prod_{h=n+s_k}^{n+r_k+s_k-1}(q;q)_h} \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} q^{|\lambda|} \prod_{k=1}^{m} q^{r_k|\lambda|} s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n+s_k-1}).$$

最後に，第 3 ステップのために，次の一般的な補題に注意する．

補題 3.7. ([18, Lemma 3.1] の特別な場合) $x_1, \cdots, x_n$ の関数 f が次の 2 つの条件をみたしているとする：

(a) f は $x_1, \ldots, x_n$ に関して対称である．

(b) $x_i = x_j$ $(i \neq j)$ ならば $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ である．

このとき，

$$\int_{[0,1]^n} f(x) d_q x = n!(1-q)^n \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} q^{|\lambda| + \binom{n}{2}} f(q^{\lambda_1 + n-1}, q^{\lambda_2 + n-2}, \ldots, q^{\lambda_n}).$$

また，Vandermonde の行列式を用いることにより，Schur 関数の q 特殊値は次のように表されることがわかる．

補題 3.8. 正整数 n，非負整数 r, s と長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$q^{r|\lambda|} s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n+s-1}) = \frac{q^{-r\binom{n}{2} - \binom{n}{3}}}{\prod_{h=s}^{n+s-1} (q;q)_h} f_{n,r,s}(q^{\lambda_1+n-1}, q^{\lambda_2+n-2}, \ldots, q^{\lambda_n}).$$

ここで，

$$f_{n,r,s}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^r (qx_i;q)_s \prod_{1 \le i < j \le n} |x_j - x_i|$$

である．

補題 3.7, 3.8 を用いると，命題 3.6 の左辺に現れた Schur 関数の q 特殊値の積の和を，Jackson 積分として書き直すことができる．

命題 3.9.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \prod_{k=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_i^{r_k} (qx_i;q)_{s_k} \prod_{1 \le i < j \le n} |x_j - x_i| \right) d_q x \\ &= (1-q)^n q^{(r+1)\binom{n}{2} + m\binom{n}{3}} \prod_{k=1}^m \prod_{h=s_k}^{n+s_k-1} (q;q)_h \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} q^{|\lambda|} \prod_{k=1}^m q^{r_k|\lambda|} s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n+s_k-1}). \end{aligned}$$

以上の命題 3.5, 3.6, 3.9 を組み合わせると，定理 3.2 の証明が完成する．

4 q-Selberg 型積分

命題 3.9 は，q-Selberg 型積分を Schur 関数の q 特殊値を用いて表す式とみなすことができる．すると，Cauchy の公式

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) s_\lambda(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{\prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)} \tag{7}$$

や Schur–Littlewood の公式

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}_n} s_\lambda(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\prod_{i=1}^n(1-x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)} \tag{8}$$

などの Schur 関数の公式（例えば [9, Chapter 1], [17, Chapter 7] を見よ）を用いることによって，m, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ が特別な値をとる場合には，命題 3.9 の q-Selberg 型積分に対する積公式を導くことができる．

まず，Cauchy の公式 (7) を用いると，$m=2$, $\boldsymbol{s}=(s,0)$（あるいは $(0,s)$）の場合が計算できる．この場合は，よく知られている q-Selberg 積分の積公式に別証明を与えることになる．

定理 4.1. 正整数 n と非負整数 r, s に対して，

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^n x_i^r(qx_i;q)_s\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2\,d_qx\\&\qquad=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\frac{[1]_q![2]_q!\cdots[n-1]_q![s+1]_q![s+2]_q!\cdots[s+n-1]_q!}{\prod_{i=1}^{n+s}\prod_{j=1}^n[r+i+j-1]_q}.\end{aligned} \tag{9}$$

証明. 命題 3.9 において $m=2$, $\boldsymbol{s}=(s,0)$ とすると，

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^n x_i^r(qx_i;q)_s\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2\,d_qx\\&\qquad=n!(1-q)^nq^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\prod_{h=s}^{n+s-1}(q;q)_h\prod_{h=1}^{n-1}(q;q)_h\\&\qquad\qquad\times\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}_n}s_\lambda(1,q,\dots,q^{n+s-1})s_\lambda(q^{r+1},q^{r+2},\dots,q^{r+n}).\end{aligned}$$

よって，Cauchy の公式 (7) を $x_i=q^{i-1}$, $y_i=q^{r+i}$ $(1\le i\le n)$ として用いればよい． □

次に，Schur–Littlewood の公式 (8) を用いると，$m=1$, $\boldsymbol{s}=(0)$ の場合と，$m=1$, $\boldsymbol{s}=(1)$ の場合が計算できる．

定理 4.2. 正整数 n と非負整数 r に対して，

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^n x_i^r\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|\,d_qx=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}\frac{[1]_q![2]_q!\cdots[n-1]_q!}{\prod_{i=1}^n[r+i]_q\prod_{1\le i<j\le n}[2r+i+j]_q}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^n x_i^r(1-qx_i)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|\,d_qx\\&\qquad=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}\frac{[1]_q![2]_q!\cdots[n]_q!\left[(n+1)r+\binom{n+1}{2}\right]_q}{\prod_{i=1}^{n+1}[r+i]_q\prod_{1\le i<j\le n+1}[2r+i+j]_q}.\end{aligned} \tag{11}$$

同様のアイデアで，古典群の既約指標に対する Cauchy 型公式（例えば [10] を見よ）を用いることによって，次のような q-Selberg 型積分の積公式が得られる．

定理 4.3. 正整数 n と非負整数 r, s に対して，

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^r(qx_i;q)_s\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{s+1}x_ix_j)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2d_qx$$
$$=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\prod_{k=1}^{n-1}[k]_q!\prod_{k=1}^{n}[s+2k-2]_q!\frac{\prod_{1\le i<j\le n}[2n+2r+s+i+j-2]_q}{\prod_{i=1}^{2n+s-1}\prod_{j=1}^{n}[r+i+j-1]_q},\quad (12)$$

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^r(qx_i;q)_s(1+q^{(s+1)/2}x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{s+1}x_ix_j)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2d_qx$$
$$=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\prod_{k=1}^{n-1}[k]_q!\prod_{k=1}^{n}[s+2k-2]_q!\prod_{k=1}^{n}(1+q^{s/2+k-1/2})$$
$$\times\frac{\prod_{i=1}^{n}[n+r+s/2+i-1/2]_q\prod_{1\le i<j\le n}[2n+2r+s+i+j-1]_q}{\prod_{i=1}^{2n+s}\prod_{j=1}^{n}[r+i+j-1]_q},\quad (13)$$

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^r(qx_i;q)_s(1-q^{(s+1)/2}x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{s+1}x_ix_j)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2d_qx$$
$$=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\prod_{k=1}^{n-1}[k]_q!\prod_{k=1}^{n}[s+2k-2]!\prod_{k=1}^{n}[s/2+k-1/2]_q$$
$$\times\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+q^{n+r+s/2+i-1/2})\prod_{1\le i<j\le n}[2n+2r+s+i+j-1]_q}{\prod_{i=1}^{2n+s}\prod_{j=1}^{n}[r+i+j-1]_q},\quad (14)$$

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^r(qx_i;q)_s(1-q^{s+1}x_i^2)\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{s+1}x_ix_j)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2d_qx$$
$$=n!q^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\prod_{k=1}^{n-1}[k]_q!\prod_{k=1}^{n}[s+2k-1]_q!\frac{\prod_{1\le i\le j\le n}[2n+2r+s+i+j]_q}{\prod_{i=1}^{2n+s+1}\prod_{j=1}^{n}[r+i+j-1]_q}.\quad (15)$$

証明. $s=2l+1$ が奇数である場合に (12) を示す．(他も同様である．) $N=n+l$ と置き，斜交群 $\mathbf{Sp}_{2N}$ の既約指標を用いる．長さ N 以下の分割 λ に対応する $\mathbf{Sp}_{2N}$ の既約指標（斜交 Schur 関数）は

$$s^{C}_{\langle\lambda\rangle}(x_1,\dots,x_N)=\frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+N-j+1}-x_i^{-(\lambda_j+N-j+1)}\right)_{1\le i,j\le N}}{\det\left(x_i^{N-j+1}-x_i^{-(N-j+1)}\right)_{1\le i,j\le N}}$$

で与えられる．λ の長さが n 以下であるとき，Weyl の分母公式（あるいは Vandermonde の行列式）を用いると，$s^C_{\langle\lambda\rangle}$ の q 特殊化が次のように因数分解されることがわかる：

$$s^C_{\langle\lambda\rangle}(q^{N-1/2},q^{N-3/2},\ldots,q^{3/2},q^{1/2}) = q^{-(N-1/2)|\lambda|-\binom{n}{3}}\frac{1}{\prod_{k=1}^n(q;q)_{s+2k-2}}\cdot G(q^{\lambda_1+n-1},\ldots,q^{\lambda_n}).$$

ただし，

$$G(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^n(qx_i;q)_s\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{s+1}x_ix_j)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

である．よって，補題 3.7 を用いると，

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^n x_i^r(qx_i;q)_s\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{s+1}x_ix_j)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2d_qx\\
&=n!(1-q)^nq^{(r+1)\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}}\prod_{k=1}^{n-1}[k]_q!\prod_{k=1}^n[s+2k-2]_q!\\
&\quad\times\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}_n}s^C_{\langle\lambda\rangle}(q^{N-1/2},q^{N-3/2},\ldots,q^{3/2},q^{1/2})\cdot q^{(r+N+1/2)|\lambda|}s_\lambda(1,q,\ldots,q^{n-1}).
\end{aligned}$$

ここで，$\mathbf{Sp}_{2N}$ の既約指標に対する Cauchy 型公式

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}_n}s^C_{\langle\lambda\rangle}(x_1,\ldots,x_N)s_\lambda(u_1,\ldots,u_n)=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(1-u_iu_j)}{\prod_{i=1}^N\prod_{j=1}^n(1-x_iu_j)(1-x_i^{-1}u_j)}$$

を $x_i=q^{N-i+1/2}$ $(1\le i\le N)$, $u_j=q^{r+N+j-1/2}$ $(1\le j\le n)$ として用いると，証明が完成する． □

同様にして，一般線型群 $\mathbf{GL}_N$ の既約有理表現の指標を用いると，次のような q-Selberg 型積分が得られる．

定理 4.4. 非負整数 n, m, r, s, l に対して，

$$\begin{aligned}
&K^{r,s,l}_{n,m}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\\
&=\prod_{i=1}^n x_i^r(qx_i;q)_l\prod_{j=1}^m y_j^s(qy_j;q)_l\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m(1-q^lx_iy_j)\prod_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|^2\prod_{1\le i<j\le m}|y_j-y_i|^2
\end{aligned}$$

とおく．$N=n+m+l$ が正であるとき，

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^{n+m}}K^{r,s,l}_{n,m}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)d_qxd_qy\\
&=n!m!q^{(r+1)\binom{n}{2}+(s+1)\binom{m}{2}+2\binom{n}{3}+2\binom{m}{3}}\frac{\prod_{k=1}^{N-1}[k]_q!\prod_{k=1}^{n-1}[k]_q!\prod_{k=1}^{m-1}[k]_q!}{\prod_{k=1}^{l-1}[k]_q!}\\
&\quad\times\frac{\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m[N+r+s+i+j-1]}{\prod_{i=1}^n\prod_{k=1}^N[r+i+k-1]_q\prod_{j=1}^m\prod_{k=1}^N[s+j+k-1]_q}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

なお，定理 4.1 は，定理 4.4 において n, m の一方が 0 である場合にあたる．

参考文献

[1] R. M. Adin, R. C. King and Y. Roichman, Enumeration of standarad tableaux of certain truncated shapes, Electron. J. Combin. **18** **(2)** (2011), # P20.

[2] R. Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 203–951.

[3] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, Canad. J. Math. **6** (1954), 316–325.

[4] L. Habsieger, Une q-intégrale de Selberg–Askey, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 1475–1489.

[5] K. W. J. Kadell, A proof of some q-analogue of Selberg integral for $k = 1$, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 944–968.

[6] K. W. J. Kadell, A proof of Askey's conjectured q-analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 969–986.

[7] J. S. Kim and S. Oh, The Selberg integral and Young books, arXiv:1409.1317.

[8] J. S. Kim and S. Okada, A new q-Selberg integral, Schur functions, and Young books, Ramanujan J., available online.

[9] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed.", Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[10] 岡田 聡一,『古典群の表現論と組合せ論（下)』, 培風館, 2006.

[11] S. Okada, (q, t)-Deformations of multivariate hook product formulae, J. Algebraic Combin. **32** (2010), 399–416.

[12] G. Panova, Tableaux and plane partitions of truncated shapes, Adv. Appl. Math. **49** (2012), 196–217.

[13] A. Postnikov, Permutohedra, associahedra, and beyond, Int. Math. Res. Not. IMRN **2009** (2009), 1026–1106.

[14] R. A. Proctor, d-Complete posets generalize Young diagrams for the hook product formula: partial presentation of proof, 数理解析研究所講究録 **1913** (2014)「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」, 120–140.

[15] A. Selberg, Remarks on a multiple integral, Norsk Mat. Tidsskr. **26** (1944), 71–78.

[16] R. P. Stanley. "Enumerative Combinatorics Vol. 1, Second Edition", Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 49, Cambridge University Press, New York/Cambridge, 2011.

[17] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics Vol. 2", Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[18] S. O. Warnaar, q-Selberg integrals and Macdonald polynomials, Ramanujan J. **10** (2005), 237–268.