数理解析研究所講究録
第 1993 巻 2016 年 71-78

ケプラー型ポテンシャル系のエネルギー固定問題における周期解

京都大学大学院情報学研究科　柴山允瑠
Mitsuru Shibayama
Graduate School of Informatics
Kyoto University

1　ハミルトン系の変分構造

ハミルトン系

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q,p), \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q,p) \quad (k=1,\ldots,N) \tag{1}$$

を考える．ここで, $q=(q_1,\ldots,q_N), p=(p_1,\ldots,p_N)$ である．

ここでは，ハミルトン系の周期解の存在について論ずる．周期解の存在を示すために最も有効な手法の１つは変分法である．ハミルトン系に対応する汎関数はいくつかある．それを，まず述べる．

■ハミルトニアン汎関数　ハミルトン系の解軌道は, 汎関数

$$\mathcal{H}_T = \int_0^T p \cdot \dot{q} - H(q,p)dt$$

の臨界点として特徴付けられる．

■ラグランジュ作用積分　H の p に関するルジャンドル変換によりラグランジアン $L(q,\dot{q})$ が定まったとき，ハミルトン系の解軌道は ラグランジュ作用積分

$$\mathcal{A}_T = \int_0^T L(q,\dot{q})dt$$

の臨界点としても特徴づけることができる．

特にハミルトニアンが古典型のとき, つまり

$$H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$$

と表せる時は, ラグランジュ作用積分は

$$\mathcal{A}_T = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(q)dt$$

と表せる．

■Maupertuis 汎関数 ハミルトン系の解に沿って H は一定である．つまり各解はある定数 h に対し，

$$H(p(t), q(t)) = h \tag{2}$$

を満たす．H が古典型で，その値を $h \in \mathbb{R}$ に固定したエネルギー曲面上の解は

$$\mathcal{J}_h = \int_0^1 \sqrt{h - V(v)} \left| \frac{dv}{ds} \right| ds$$

の臨界点により特徴付けることができる．より正確には，$\mathcal{J}_h$ の臨界点 $v(s)$ について，

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dq}{dt} \right|^2 + V(q) = h$$

を満たすように時間 t に変換したものを $q(t) = v(s(t))$ とすると，$q(t)$ はエネルギー h をもつ解になる．$\mathcal{J}_h$ は測地線の汎関数とみることができるが，$V = h$ のところではリーマン計量が退化するので注意が必要である．この変文構造により，力学の問題をリーマン幾何や測地流の観点から調べる研究もなされてきた ([6, 7, 8])．

$\mathcal{J}_h$ は扱いにくいので，これと同等な変分構造をもつ汎関数

$$\mathcal{I}_h = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{du}{d\tau} \right|^2 d\tau \int_0^1 h - V(u) d\tau$$

を用いることが多い．$\mathcal{I}_h$ の臨界点 $u(\tau)$ について

$$T = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{du}{d\tau} \right|^2 d\tau}{\int_0^1 h - V(u) d\tau}}$$

とおくと，$q(t) = u(t/T)$ がエネルギー h をもつ解になる．

古典型ハミルトン系の解は，以上のどの汎関数でみても臨界点として特徴付けられるが，変分構造 (例えばモース指数) は異なる．

2 背景

ハミルトン系の周期解の存在を調べるこれまでの研究はいくつかの流れがある．

■周期固定のもとでの周期解の存在 古典型ハミルトン系を考える．ポテンシャル $V(q) (q \in \mathbb{R}^N)$ が原点を特異点を持ち，その周辺でだいたい $-\frac{1}{|q|^\alpha}$ のように振る舞う*1 場合を考える．このようなポテンシャルを Keper 型という．元来の Kepler 問題は $V(q) = -\frac{1}{|q|}$ である．

任意の $T > 0$ に対して，位相的な制限のもとで $\mathcal{A}_T$ の最小化あるいは峠の定理を用いることで，T-周期解の存在が示されている．特に，Tanaka[14], Coti-Zelati[2] により，$N \geq 2$,

*1 この定義は正確には後で定理の中で述べるが，論文によって若干異なる．

$\alpha > 1$ の場合, 衝突を持たないことが示されている. 衝突の評価は, Scaling と Morse 指数の評価に基づく.

$-\frac{1}{|q|^\alpha}$ に対して, $\alpha = 1$ は最も単純な周期解の Morse 指数が変わるところなので, 仮定が $\alpha > 1$ となるのは自然である.

■エネルギー固定のもとでの周期解の存在 ハミルトニアン $H : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ に対し, そのエネルギー曲面を

$$S_h = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(q,p) = h\}$$

とおく. S_h に周期解の存在は Seifert[10] あたりから研究されてきた. Seifert は S_h がコンパクトならば自由度 n と同じ個数の周期解存在するであろうと予想し, それは Giannoni[3] により肯定的に解決された.

Seifert 予想は解決されるまでに約半世紀かかり, その間 S_h 上の周期解の存在に関して多様な研究がなされてきた. 古典型とは限らないハミルトニアンに対して, S_h がコンパクトで凸*2の場合 [16], コンパクトで星型の場合 [9], コンパクトで接触型の場合 [15, 5], S^3 に同相な場合 [4] などに, 周期解の存在が示されている. Rabinowitz[9] や Viterbo[15] は変分法を用いており, $\mathcal{H}_T$ に対してモース指数無限大の臨界点を求めることにより周期解を得ている.

その後, 古典型でポテンシャルが原点にケプラー型の特異点を持つ場合

$$V(q) \sim -\frac{1}{|q|^\alpha}$$

について, Ambrosetti, Coti-Zelati[1], Tanaka[13] らにより研究され, 最終的には $\alpha > 1 (N \geq 4), \alpha > \frac{4}{3} (N = 3)$ の場合に, 衝突を持たない周期解の存在が示されている. 存在証明は $\alpha < 2$ の場合は $\mathcal{I}_h$, $\alpha > 2$ の場合は $\mathcal{H}_T$ に対して峠の定理を応用することによりなされ, 衝突の評価は Scaling と Morse 指数の評価に基づく.

$-\frac{1}{|q|^\alpha}$ の場合を考えると, $\alpha = \frac{4}{3}$ は変分構造が変わるところではないので, 改善できると考えられる. 次節で述べる定理は, $1 < \alpha < 2 (N \geq 2)$ の場合に拡張したものである.

■n 体問題の周期解 n 体問題では, 3 体問題の 8 の字解の存在証明がなされて以来, 対称性を課したもとで $\mathcal{A}_T$ を最小化することにより多くの周期解の存在が示されている. そこでも衝突を除くことが問題となるが, そのために「大域的評価」, 「局所的評価」, 「平均化」が用いられてきた*3. 4 体の超 8 の字解の存在証明 [11] では, Scaling*4が導入された.

3 周期解の存在

定義 1 古典型ハミルトン系でポテンシャルを $V \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ とする. $q(t)$ が (1), (2) の generalized T-periodic solution であるとは, 以下を満たすことである:

---

*2 S_h で囲まれる領域が凸ということ. 星型も同じ.

*3 これらは, 2 体だけでなく 3 体以上の衝突にも使える.

*4 2 体衝突にしか使えないが, 衝突に漸近するときの詳細な性質が分かる.

1. $q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ で T-周期的である.
2. $D = \{t \in \mathbb{R} \mid q(t) = 0\}$ の測度は 0
3. $q \in C^2(\mathbb{R}\backslash D, \mathbb{R}^N)$ で, $t \in \mathbb{R}\backslash D$ においては (1) と (2) を満たす.

定理 1 ([12]) $N \geq 2$ で, $V \in C^2(\mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \mathbb{R})$ をポテンシャルとするハミルトン系を考える. $a_1 < a_2, 0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ について,

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{|q|^\alpha} \leq -V(q) \leq \frac{a_2}{|q|^\alpha}, \\ &-\alpha_1 V(q) \leq \nabla V(q) \cdot q \leq -\alpha_2 V(q) \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つとする. このとき, 任意の $h < 0$ に対し, ある $T > 0$ が存在して, (1) と (2) の genelarized T-periodic solution が存在する. 衝突の回数は次のように評価できる:

$$\#\{t \in [0, T) \mid q(t) = 0\} \leq f(\frac{a_1}{a_2}, \alpha, \alpha_1, \alpha_2).$$

ここで,

$$f(b, \alpha, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\pi b^{\frac{1}{\alpha}} \alpha^{\frac{3}{2}} (2-\alpha)^{\frac{2}{\alpha}} (2+\alpha_2)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}} \alpha_1 (2+\alpha)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} (2-\alpha_2)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)}$$

で, B はベータ関数である.

注意 1 $V(q) = -\frac{a}{|q|^\alpha}$ ならば,

$$-\alpha V(q) = \nabla V(q) \cdot q$$

が成り立つので, 定理の仮定にある不等式 (3) はこの等号を緩めたものである.

系 1 定理 1 と同じ仮定のもとで, 任意の $\alpha \in (1, 2)$ に対して, 十分小さな $\delta > 0$ をとると, $a_1 \leq a_2 < (1+\delta)a_1, 0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \delta$ について得られた解は衝突を持たない. つまり, 古典解である.

系 2 定理 1 と同じ仮定のもとで, 任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して, 十分小さな $\delta > 0$ をとると, $a_1 \leq a_2 < (1+\delta)a_1, 0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \delta$ について得られた解は 1 周期にたかだか 1 回の衝突しか持たない.

これらの系が定理から得られることは, $f(1, \alpha, \alpha, \alpha)$ の振る舞いをみればわかる (図 1). 定理の証明については [12] を参照されたい.

4 Kepler 問題の全ての周期解を壊す摂動

$V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha} + W(q)(q \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ の $W(q)$ を摂動項と見ると, $\alpha \neq 1$ で $W(q)$ が十分小さければ, Poincaré-Birkhoff の不動点定理からも周期解の存在が言える. しかし, $\alpha = 1$ だけはツイスト条件が成り立たず摂動論でも示せないので, この観点からも $\alpha = 1$ は分岐点

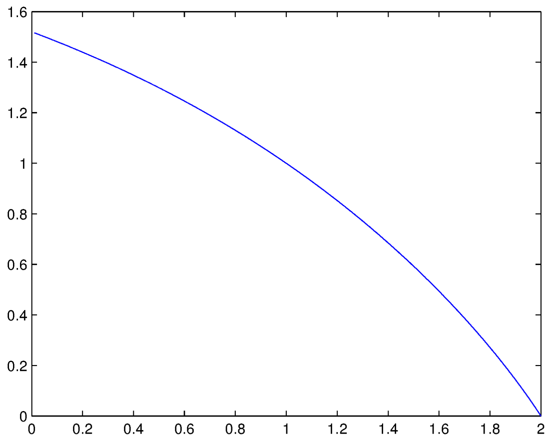

図 1　$f(1,\alpha,\alpha,\alpha)$ のグラフ

である．ここでは，実際に $\alpha=1$ の場合に周期解が全く存在しなくなるような摂動が可能であることを示す．

ハミルトニアン

$$H_\varepsilon(q_1,q_2,p_1,p_2)=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)-\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}+\frac{\varepsilon q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}$$

を考える．

正準変換

$$q_1=\frac{1}{2}(\xi_1^2-\xi_2^2), \qquad q_2=\xi_1\xi_2$$

により定まる点変換を考える．運動量の変換は

$$p_1=\frac{\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}, \qquad p_2=\frac{\xi_2\eta_1+\xi_1\eta_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}$$

で定めると，$(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)$ は正準座標になる．

ハミルトニアンは

$$H_\varepsilon=\frac{1}{2(\xi_1^2+\xi_2^2)}(\eta_1^2+\eta_2^2)-\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}+\frac{\varepsilon(\xi_1^2-\xi_2^2)}{2(\xi_1^2+\xi_2^2)}$$

となる．

$$\Gamma_\varepsilon=(\xi_1^2+\xi_2^2)H_\varepsilon=\frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2)-1+\frac{\varepsilon}{2}(\xi_1^2-\xi_2^2)$$

とおく．

正準方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \eta_1} = \frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \eta_1} \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \eta_2} = \frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \eta_2} \\
\frac{d\eta_1}{dt} &= -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{d\xi_1} + \frac{2\xi_1\Gamma_\varepsilon}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{d\xi_2} + \frac{2\xi_2\Gamma_\varepsilon}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，時間を

$$\frac{dt}{d\tau} = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

により τ に変換すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{d\tau} &= \frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \eta_1} \\
\frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \eta_2} \\
\frac{d\eta_1}{d\tau} &= -\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{d\xi_1} + \frac{2\xi_1\Gamma_\varepsilon}{\xi_1^2+\xi_2^2} \\
\frac{d\eta_2}{d\tau} &= -\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{d\xi_2} + \frac{2\xi_2\Gamma_\varepsilon}{\xi_1^2+\xi_2^2}
\end{aligned}
$$

となる．各解に沿って $H_\varepsilon = (\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}\Gamma_\varepsilon$ は一定だからその値が $h \in \mathbb{R}$ であるとすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{d\tau} &= \frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \eta_1} \\
\frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \eta_2} \\
\frac{d\eta_1}{d\tau} &= -\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{d\xi_1} + 2\xi_1 h \\
\frac{d\eta_2}{d\tau} &= -\frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{d\xi_2} + 2\xi_2 h
\end{aligned}
$$

となり，これは

$$\Xi_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon - h(\xi_1^2+\xi_2^2)$$

をハミルトニアンとするハミルトン系で，$\Xi_\varepsilon = 0$ となる解に関する方程式である．

具体的な式の形は，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{d\tau} &= \eta_1 \\
\frac{d\xi_2}{d\tau} &= \eta_2 \\
\frac{d\eta_1}{d\tau} &= (2h-\varepsilon)\xi_1 \\
\frac{d\eta_2}{d\tau} &= (2h+\varepsilon)\xi_2
\end{aligned}
$$

となる．線形だから解けて解は

$$\xi_1 = c_1 \sin(\sqrt{-2h+\varepsilon}\tau + \theta_1), \qquad \xi_2 = c_2 \sin(\sqrt{-2h-\varepsilon}\tau + \theta_2)$$
$$\eta_1 = \sqrt{-2h+\varepsilon}c_1 \cos(\sqrt{-2h+\varepsilon}\tau + \theta_1), \quad \eta_2 = \sqrt{-2h+\varepsilon}c_2 \cos(\sqrt{-2h-\varepsilon}\tau + \theta_2)$$

となる．

$$\Xi_\varepsilon = \frac{1}{2}(-2h+\varepsilon)(c_1^2 + c_2^2) - 1$$

だから

$$c_1^2 + c_2^2 = \frac{2}{-2h+\varepsilon}$$

ととる必要がある．

さて，$\sqrt{-2h+\varepsilon}/\sqrt{-2h-\varepsilon}$ が無理数のとき，解が周期解であるためには，$c_1 = 0$ あるいは $c_2 = 0$ でなければならない．すると，$\xi_1 = 0$ あるいは $\xi_2 = 0$ となる．いずれの場合も $(\xi_1(\tau))^2 + (\xi_2(\tau))^2 = 0$ となる τ が存在するので，解は衝突する．これで，$\sqrt{-2h+\varepsilon}/\sqrt{-2h-\varepsilon} \notin \mathbb{Q}$ の場合の摂動系には周期解は存在しないことが示された．

最後に注意として，このことは Poincaré-Birkhoff の不動点定理が成立しないことは主張しているが，これで系 1 が $\alpha = 1$ の場合に成立しないことが言えたわけではない．この摂動系は不等式 (3) を満たさないからである．$\alpha = 1$ の (3) を満たす摂動で

参考文献

[1] A. Ambrosetti, V. Coti-Zelati, Closed orbits of fixed energy for singular Hamiltonian systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* **112** (1990) 339–362.

[2] V. Coti Zelati, Periodic solutions for a class of planar, singular dynamical systems, *J. Math. Pures Appl.* **68** (1989), 109–119.

[3] F. Giannoni, Multiple brake orbits in a potential well and a Seifert conjecture, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* **47** (2001) 3073–3084

[4] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectisations with application to the Weinstein conjecture in dimension three. *Invent. Math.* **114**(1993) 515–563

[5] H. Hofer, E. Zehnder, Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo. *Invent. Math.* **90** (1987), 1–9.

[6] T. J. Hunt, R. S. MacKay, Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor, *Nonlinearity* **16** (2003) 1499–1510

[7] J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem. *Amer. Math. Monthly* **90** (1983) 353–365

[8] R. Montgomery, Fitting hyperbolic pants to a three-body problem, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **25** (2005) 921–947

[9] P. H. Rabinowitz, Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978) 157–184

[10] H. Seifert, Periodische Bewegungen mechanischer Systeme, *Math. Z.***51** (1948) 197–216

[11] M. Shibayama, Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **214** (2014), 77–98

[12] M. Shibayama, Periodic solutions of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, preprint

[13] K. Tanaka, A prescribed energy problem for a singular Hamiltonian system with a weak force. *J. Funct. Anal.* **113** (1993) 351–390

[14] K. Tanaka, Noncollision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10** (1993) 215–238

[15] C. Viterbo, A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$, *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire* **4** (1987) 337–356

[16] A. Weinstein, Periodic orbits for convex Hamiltonian systems, *Ann. of Math. (2)* **108** (1978) 507–518