

# 一般化 Hopf 分岐の標準形の計算公式とその応用

## Formula for the normal form of the generalized Hopf bifurcation

村上公一  
徳島大学 数理科学

Kouichi Murakami  
Department of Mathematical Sciences, Tokushima University

### 1 はじめに

2次元 Lotka-Volterra 方程式に極限周期軌道が存在しないことは、良く知られている。もし周期軌道が存在するならば、内部平衡点は無限個の周期軌道に囲まれた渦心点となる。すなわち、保存系を除き、一般には極限集合は平衡点のみからなる。しかし、3次元 Lotka-Volterra 方程式になると、極限周期軌道に加え、周期倍分岐によるカオス的挙動も見られ、複雑なアトラクターが存在しうる。

3次元 Lotka-Volterra 方程式であっても、競争系に限定すれば、解軌道の可能性は限られる。Hirsch [1] は、競争系には順序保存性があり、解は不変超曲面（環境単体）に漸近することを示した（図 1 参照）。環境単体上では、ポアンカレ・ベンディクソンの定理が成立するので、極限集合は平衡点、周期軌道、ヘテロクリニック軌道に限られる。Zeeman [2, 3] は、環境単体上の平衡点の配置により、3次元 Lotka-Volterra 競争系の解軌道を 33 種類に分類し、そのうち 6 種類に Hopf 分岐の可能性があることを示した（図 2 参照）。Hofbauer と So [4] は、Zeeman の第 27 類に対して、極限周期軌道が 2 個存在する例を与えた。さらに彼らは、内部平衡点が環境単体上で渦心点である場合を除き、極限周期軌道は 3 個以上存在しないであろうと予想した。

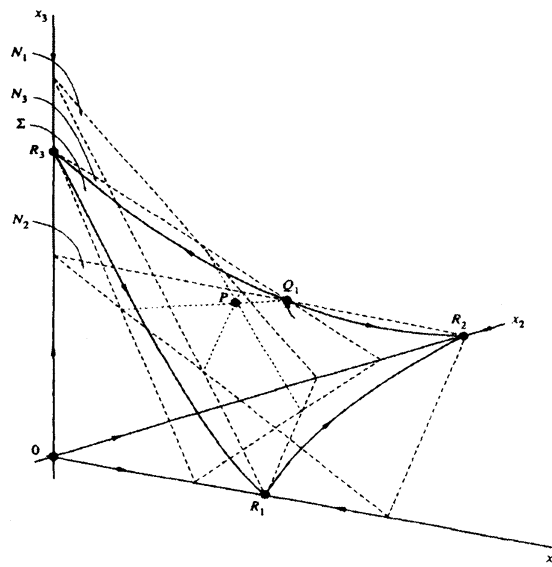


図 1: 3次元 Lotka-Volterra 競争系の環境単体の例 ([2] より引用)

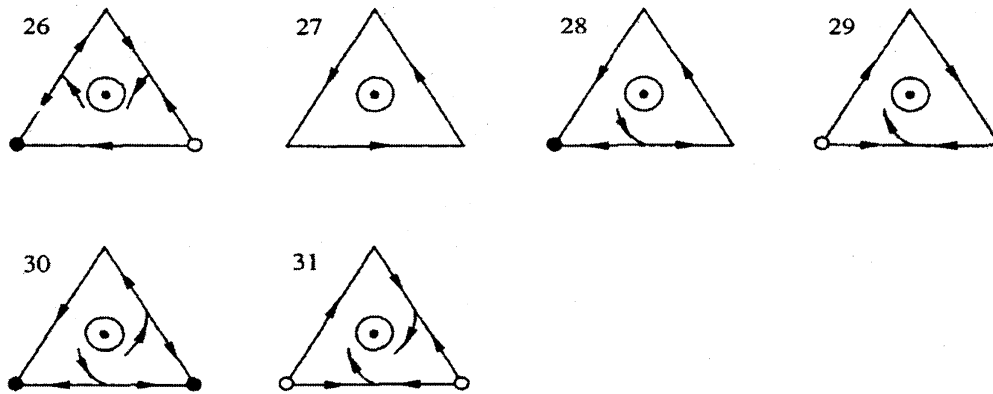


図 2: Hopf 分岐の可能性のある環境単体上の平衡点の配置 ([2] より引用)

本研究では、一般化 Hopf 分岐による複数の極限周期軌道の存在を調べるため、標準形の計算公式を導出する。そして、数式処理システムによる分岐解析プログラムを作成し、極限周期軌道が複数個存在する 3 次元 Lotka-Volterra 競争系の具体例を構成する。

## 2 準備

パラメタ  $\mu \in \mathbb{R}^m$  を含む微分方程式

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

を考える。ただし、 $f$  は十分なめらかとし、 $\mu = 0$  のときに平衡点  $x_0$  が存在して、ヤコビ行列  $J = D_x f(x_0, 0)$  は一組の simple な純虚数固有値  $\pm i\omega_0$  を持ち、他の固有値はすべて実部負とする。このとき、陰関数定理により、 $\mu$  が十分小さければ、 $x_0$  の近傍に唯一つの平衡点  $x_\mu$  が存在する。平衡点  $x_\mu$  を原点に平行移動し、以後は  $\mu = 0$  として

$$\dot{x} = Jx + F(x) \tag{1}$$

を考える。ただし、 $F(x) = f(x_0 + x, 0) - Jx$  とする。

ここで、(1) を 2 次元の中心多様体上に縮約した方程式は、Hopf 分岐の標準形

$$\dot{w} = i\omega_0 w + \sum_{j=1}^{\infty} c_j w^{j+1} \bar{w}^j, \quad w \in \mathbb{C}$$

に変換できる。係数  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) が求まれば、Hopf 分岐による極限周期軌道の存在を調べることができる。

いま、 $\Delta(\lambda) = \lambda I - J$  とし、固有値  $i\omega_0$  に属する  $J$  の固有ベクトルを  $p, q$  として、

$$\bar{p}\Delta(i\omega_0) = 0, \quad \Delta(i\omega_0)q = 0, \quad \bar{p}q = 1$$

を満たすとする。このとき、 $\Phi = (q, \bar{q})$  とおくと、以下が成立する。

定理 1.  $\phi_n(w)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を

$$\begin{cases} \phi_1(w) = \Phi \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} & (n = 1) \\ \phi_n(w) = \phi_{n-1}(w) + \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} h_{kl} w^k \bar{w}^l & (n \geq 2) \end{cases}$$

と定義する。ここで、 $h_{kl}$  ( $k+l=n$ ) は、 $f_{kl} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial w^k \partial \bar{w}^l} F(\phi_{n-1}(w)) \Big|_{w=0}$  に対して、

$$\Delta((k-l)i\omega_0) h_{kl} = L f_{kl} - \sum_{j=1}^{n_{kl}} r_{kl}^j h_{k-j, l-j} \quad \text{かつ} \quad h_{kl} = L h_{kl}$$

を満たすとする。ただし、 $r_{kl}^j = \frac{k!l!\{(k-j)c_j + (l-j)\bar{c}_j\}}{(k-j)!(l-j)!}$ ,  $n_{kl} = \min(k, l, \lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor - 1)$ ,

$$L = \begin{cases} I & (k-l \neq \pm 1) \\ I - q\bar{p} & (k-l = 1) \\ I - \bar{q}p & (k-l = -1) \end{cases}$$

とする。このとき、 $k-l=1$  となる  $k, l$  に対して

$$c_l = \frac{1}{k!l!} \bar{p} f_{kl}$$

となる。

### 3 具体例

3次元 Lotka-Volterra 競争系

$$\begin{cases} x' = x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z) \\ y' = y(r_2 - a_{21}x - a_{22}y - a_{23}z) \\ z' = z(r_3 - a_{31}x - a_{32}y - a_{33}z) \end{cases} \quad (2)$$

を考える。ただし、 $a_{ij} > 0$  とし、 $r_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} > 0$  とする。このとき、(2) は内部平衡点

$$E(1, 1, 1)$$

を持ち、 $E$  でのヤコビ行列は  $J = -A = -(a_{ij})$  となる。

以下では、 $\eta$  と  $\nu$  をパラメタとして

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 48 & 12 & \eta \\ 60 & 16 & \nu \\ 84 & 44 & 32 \end{pmatrix}$$

とし、

$$\begin{cases} \eta_c = \frac{2}{53} (421 + \sqrt{13471}) \doteq 20.2666 \\ \nu_c = 64 - 3\eta \end{cases}$$

とおく。

まず,  $\eta = \eta_c$  かつ  $\nu = \nu_c$  とする。このとき, ヤコビ行列  $J$  の固有値は

$$\lambda = \pm 4i\sqrt{\frac{3}{53}(47 + 2\sqrt{13471})}, -96$$

となる。  $\lambda = 4i\sqrt{\frac{3}{53}(47 + 2\sqrt{13471})}$  の固有ベクトルとして

$$q = \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{(47 + 2\sqrt{13471})/159} \\ -1 - i\sqrt{3(47 + 2\sqrt{13471})/53} \\ 4 \end{pmatrix}$$

をとり, 定理 1 により, 中心多様体 (環境単体) 上の縮約方程式の標準形を求めると

$$\begin{cases} \operatorname{Re} c_1 = 0 \\ \operatorname{Re} c_2 = \frac{256(107553332621469025921 - 914039343391898989\sqrt{13471})}{1417136768083737745785} > 0 \end{cases}$$

となるので,  $E$  は環境単体上で不安定な 2 次の弱渦状点となる。原点と  $E$  以外の平衡点は,

$$R_1\left(\frac{2011 + \sqrt{13471}}{1272}, 0, 0\right), R_2\left(0, \frac{2447 - 3\sqrt{13471}}{424}, 0\right), R_3(0, 0, 5)$$

のみより, Zeeman の第 27 類となり, ヘテロクリニック軌道が存在する。このとき,

$$P = \lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31} + \lambda_{21}\lambda_{13}\lambda_{32} = \frac{1728(6743\sqrt{13471} - 780302)}{148877} > 0$$

$$\text{ただし, } \lambda_{ij} = r_j - a_{ji}r_i/a_{ii}$$

なので, ヘテロクリニック軌道はリペラーとなって, (2) はパーマネントとなる。したがって, ポアンカレ・ベンディクソンの定理により, 環境単体上に安定な極限周期軌道が存在する。

次に,  $\eta$  に摂動を加える。ここでは

$$\begin{cases} \eta = \eta_c + \frac{1}{20} \\ \nu = \nu_c \end{cases}$$

とする。このとき, ヤコビ行列  $J$  の固有値は

$$\lambda = \pm 2i\sqrt{\frac{3}{265}(993 + 40\sqrt{13471})}, -96$$

となる。  $\lambda = 2i\sqrt{\frac{3}{265}(993 + 40\sqrt{13471})}$  の固有ベクトルとして

$$q = \begin{pmatrix} -2 + i\sqrt{(993 + 40\sqrt{13471})/795} \\ -2 - i\sqrt{3(993 + 40\sqrt{13471})/265} \\ 8 \end{pmatrix}$$

をとり、定理 1 により、中心多様体（環境単体）上の縮約方程式の標準形を求めると

$$\operatorname{Re} c_1 = \frac{4(-9492876434126957 + 76980515132440\sqrt{13471})}{198621489052030445} < 0$$

となるので、 $E$  は環境単体上で安定な 1 次の弱渦状点となる。このとき、 $\mu$  への摂動が小さいので、環境単体上の安定な極限周期軌道は保持され、その内部の  $E$  の近傍において、不安定な極限周期軌道が発生する。

さらに、 $\nu$  にも微小な摂動を加える。

$$\begin{cases} \eta = \eta_c + \frac{1}{20} \\ \nu = \nu_c + \frac{85}{1000000} \end{cases}$$

とすると、ヤコビ行列  $J$  の固有値は

$$\lambda \doteq 0.0000140003 \pm 15.9748i, -96$$

となり、 $E$  は環境単体上で不安定な渦状点となる。このとき、 $\nu$  への摂動が十分小さいので、環境単体上の 2 個の極限周期軌道は保持され、その内部の  $E$  の近傍において、安定な極限周期軌道が発生する。

以上のようにして求めたパラメタ値により、(2) に対して数値シミュレーションを行うと、解軌道図は図 3 のようになる。図において、大きい黒点は平衡点、小さい黒点は初期値を表しており、2 個の安定な極限周期軌道が確認できる。尚、極限周期軌道を見やすくするために、解軌道は間引いて表示している。2 個の安定な極限周期軌道の間空白部分には、不安定な極限周期軌道が存在していると考えられ、3 個の極限周期軌道を近似的に表示すると図 4 のようになる。

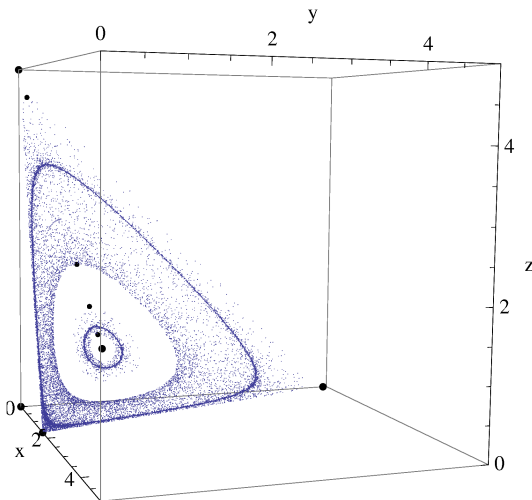


図 3: 解軌道図

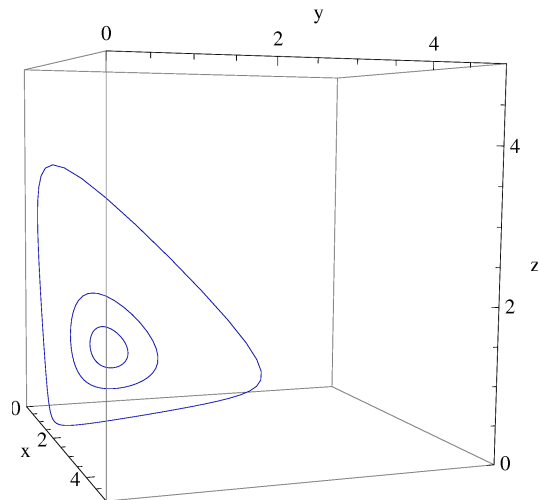


図 4: 極限周期軌道

## 4 おわりに

今回, Zeeman の第 27 類に対し, 内部平衡点が厳密に 2 次の弱渦状点となるパラメタ値を求め, 極限周期軌道が 3 個存在する具体例を構成して, 数値シミュレーションで確認した。

今後の課題として, Zeeman の第 27 類以外に, 極限周期軌道が複数個存在する 3 次元 Lotka–Volterra 競争系の具体例を構成することがあげられる。

尚, Hofbauer と So [4] は, Zeeman の第 27 類の標準形の係数が

$$\operatorname{Re} c_1 = 0, \quad \operatorname{Re} c_2 = 0$$

を満たすとき, 内部平衡点は渦心点になると予想している。すなわち, 内部平衡点は 3 次以上の弱渦状点にはならないと予想している。これに対する反例は, 今のところ見つからない。

## 参考文献

- [1] M. W. Hirsch, Systems of differential equations which are competitive or cooperative: III. Competing species. *Nonlinearity* **1** 51–71, (1988).
- [2] M. L. Zeeman, Hopf bifurcations in competitive three-dimensional Lotka–Volterra systems, *Dynamics and Stability of Systems* **8**, 189–216, (1993).
- [3] P. van den Driessche and M. L. Zeeman, Three-dimensional competitive Lotka–Volterra systems with no periodic orbits, *SIAM J. Appl. Math.* **58**, 227–234, (1998).
- [4] J. Hofbauer and J. W.-H. So, Multiple limit cycles for three-dimensional Lotka–Volterra equations, *Appl. Math. Lett.* **7**, 65–70, (1994).