数理解析研究所講究録
第 1996 巻 2016 年 66-82

Conditions for separability of matrices in $\mathbb{M}_2 \otimes \mathbb{M}_n$

北海道大学（名誉教授） 安藤 毅
Tsuyoshi Ando
Hokkaido University (Emeritus)
Email: ando@es.hokudai.ac.jp

1. Introduction. $\mathbb{M}_k$ は $k\times k$ 複素行列の空間とする. ($\mathbb{M}_{n,m}$ は $n\times m$ 行列の全体である.) これは Trace を使った自然な内積 $\langle S|T\rangle := \mathrm{Tr}(S^*T)$ で Hilbert 空間になる. 対応する (Hilbert-Schmit) norm を $\|\cdot\|_2$ で表す. (普通の operator norm は $\|\cdot\|$ で表わそう.)

$\mathbb{M}_k$ の positive semi-definite matrix の なす cone を $\mathbb{M}_k^+$ で表すが, A が positive semi-definite なることを, 通例により, $A\geq 0$ で表す. また A, C が selfadjoint で $A-C\geq 0$ のとき $A\geq C$ と書く.

テンソル積 $\mathbb{M}_m\otimes\mathbb{M}_n$ は, 幾つかの自然な方法で, 他の行列の空間と同一視される.

$A=[\alpha_{j,k}]\in\mathbb{M}_m$, $B=[\beta_{p,q}]\in\mathbb{M}_n$ に対して

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{M}_m\otimes\mathbb{M}_n & \sim & \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n) & \sim & \mathbb{M}_{mn} \\ A\otimes B & \sim & [\alpha_{j,k}B]_{j,k} & \sim & [\alpha_{j,k}\beta_{p,q}]_{j,p;k,q}. \end{array}$$

ここで $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ は $n\times n$ 行列を entry にもつ $m\times m$ block-matrix の空間である.

重要なのは, この同一視の下で

$$A\in\mathbb{M}_m^+,\ B\in\mathbb{M}_n^+ \quad\Longrightarrow\quad A\otimes B\in\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)^+\sim\mathbb{M}_{mn}^+$$

なる事実である. この事実の下に, $\mathbb{M}_m\otimes\mathbb{M}_n\sim\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ に 3 つの cone を導入しよう.

$$\mathfrak{P}_0 := \mathbb{M}_{mn}^+, \qquad \mathfrak{P}_+ := \mathrm{Conv}(\mathbb{M}_m^+\otimes\mathbb{M}_n^+), \qquad \mathfrak{P}_- := \text{dual cone of } \mathfrak{P}_+.$$

すなわち

$$\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_+ \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{S}=\sum_p A_p\otimes C_p \quad \exists\, A_p\in\mathbb{M}_m^+,\ C_p\in\mathbb{M}_n^+ \tag{1}$$

であり

$$\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_- \quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad \mathbf{S}=\mathbf{S}^*,\ \langle\mathbf{T}|\mathbf{S}\rangle\geq 0 \quad \forall\,\mathbf{T}\in\mathfrak{P}_+. \tag{2}$$

明らかに

$$\mathfrak{P}_+ \subset \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_-$$

である. $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ が有限次元であることから $\mathfrak{P}_+$ は closed になり, その結果 $\mathfrak{P}_-$ の dual cone になっている. $\mathfrak{P}_0$ は selfdual である.

$\mathbf{S} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ が $\mathfrak{P}_+$ に属するとき $\mathbf{S}$ は **separable** であると言う. ([2] 参照)

この講演は，もっとも簡単な $m = 2$ の場合に限定して，

$$0 \le \mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n)$$

が separable になるための，A, B, C の間の幾つかの条件を求めることを目標としており，解説的な性格で，知られている事も多い.

2. Cones $\mathfrak{P}_0$ と $\mathfrak{P}_-$. 以下では $\mathbb{C}^n$ の元 x は **column** n-vector で表す. したがって x^* は **row** n-vector であり，product xy^* や y^*x は matrix product と考えて

$$xy^* \in \mathbb{M}_n \quad \text{で} \quad y^*x = \langle y|x\rangle$$

と理解する. $\|x\|$ は vector x の通常の norm である.

$\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^n) \sim \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$ の vector が **product vector** であるとは

$$\boldsymbol{\xi} \otimes x := \begin{bmatrix} \xi_1 x \\ \xi_2 x \end{bmatrix} \quad \exists\, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \exists\, x \in \mathbb{C}^n \tag{3}$$

の形のときのことである.

$\mathbb{M}_2^+$ の元は $\sum_j \boldsymbol{\xi}_j \boldsymbol{\xi}_j^*$ $\exists\, \boldsymbol{\xi}_j \in \mathbb{C}^2$ の形であり，また $\mathbb{M}_n^+$ の元は $\sum_k x_k x_k^*$ $\exists\, x_k \in \mathbb{C}^n$ の形であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \text{ separable} \iff \mathbf{S} &= \sum_k (\boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^*) \otimes (x_k x_k^*) \\ &= \sum_k (\boldsymbol{\xi}_k \otimes x_k)(\boldsymbol{\xi}_k \otimes x_k)^* \quad \exists\, \boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{C}^2,\ \exists\, x_k \in \mathbb{C}^n \end{aligned} \tag{4}$$

が判る.

Cone $\mathfrak{P}_-$ の dual の形の定義 (2) と (4) から

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_- &\iff \left\langle \begin{bmatrix} \alpha x \\ \beta x \end{bmatrix} \middle| \mathbf{S} \begin{bmatrix} \alpha x \\ \beta x \end{bmatrix} \right\rangle \ge 0 \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x,\ y \in \mathbb{C}^n \\ &\iff A, C \ge 0,\ \langle x|Ax\rangle \cdot \langle x|Cx\rangle \ \ge\ |\langle x|Bx\rangle|^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \end{aligned} \tag{5}$$

となっている.

また Cone $\mathfrak{P}_0$ の元は $\sum_k x_k x_k^*\ \exists\, x_k \in \mathbb{C}^n$ の形であるから，$\mathfrak{P}_0$ の self-duality より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_0 &\iff \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \mathbf{S} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \ge 0 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n \\ &\iff A, C \ge 0, \quad \langle x|Ax\rangle \cdot \langle y|Cy\rangle \ \ge\ |\langle x|By\rangle|^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n \end{aligned} \tag{6}$$

が判る．しかし $\mathfrak{P}_-$ の一般元の表示が知られていないので，$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_+$ を (5) や (6) に対応した形で求めることは出来ない．これが separability の判定が困難な原因のひとつである．

3. 幾つかの operations. $\mathbb{M}_2 \ni X \longmapsto X^T$ (**transpose**) なる linear map を考えよう．この linear map は

$$X \otimes Y \quad \longmapsto \quad X^T \otimes Y \quad \forall\, X \in \mathbb{M}_2,\ Y \in \mathbb{M}_n$$

を通じて $\mathbb{M}_2 \otimes \mathbb{M}_n$ の linear map に一意的に拡張されるが，それは $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n)$ での表示を使えば

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}$$

すなわち (1,2)-entry と (2,1)-entry を交換したものになっている．この linear map を **partial transpose map** といい $(\cdot)^\tau$ で書くと，$\mathbf{S}$ が selfadjoint のとき

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}^\tau = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$$

となっている．$X \geq 0 \Longrightarrow X^T \geq 0$ なので，この linear map は cone $\mathfrak{P}_+$ を invariant にするので，separability のための一つの重要な必要条件を与える：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{separable} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}^\tau = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0. \tag{7}$$

このことを $\mathbf{S}$ は **(PPT)** (positive partial transpose) を持つという．([2], [3], [4] 参照)

$[0,\infty)$ 上の実函数 $f(t) \geq 0$ から，$\mathbf{S} \geq 0$ に対して $f(\mathbf{S})$ が functional calculus を通じて定義されるが，cone $\mathcal{P}_0$ が non-linear map $\mathbf{S} \longmapsto f(\mathbf{S})$ に関して invariant なことは明らかである．しかし separability cone $\mathfrak{P}_+$ はこの functional calculus に適合しない．

$[0,\infty)$ 上の身近な関数

$$f(t) = t^\lambda\ (\lambda > 0), \quad = \frac{t}{t+\lambda} \quad (\lambda > 0), \quad = \log(\lambda t + 1)$$

の中では，$f(t) = t$ の場合を除いて，cone $\mathfrak{P}_+$ を invariant にしないと思われる．

完全な証明ではないが，次ぎのような方針で行けばよいと思われる．$\mathbb{M}_4 \equiv \mathbb{M}_2 \otimes \mathbb{M}_2$ で考えよう．

$$\mathbf{S} := 3 \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}^*$$

とすると，これは $\mathbf{S}$ のスペクトル表示になっている．すはわち $\mathbf{S}$ の positive eigenvalue は 3 と 1 で，対応する unit eigenvector は

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \end{bmatrix} \quad と \quad \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

である．次ぎはすぐ検証できる

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{P} + 2\mathbf{Q}$$

ここで

$$\mathbf{P} := \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^* \right) \otimes \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^* \right)$$

および

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* \right) \otimes \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* \right)$$

であるから，$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ は separable であり，したがって $\mathbf{S}$ は separable である．

関数 $f(t)$ が与えられて，$\alpha := f(3)$ および $\beta := f(1)$ とすると，functional calculus の性質から

$$f(\mathbf{S}) = \frac{\alpha}{12}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので

$$\gamma := \frac{3\alpha - 3\beta}{\alpha + 3\beta} \quad および \quad \delta := \frac{9\alpha + 3\beta}{\alpha + 3\beta}$$

として

$$f(\mathbf{S}) = \frac{\alpha + 3\beta}{12}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

となる．もし $f(\mathbf{S})$ が separable であれば partial transpose も ≥ 0 になる．すなわち

$$\frac{12}{\alpha + 3\beta} f(\mathbf{S})^\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \gamma & \gamma \\ 1 & \gamma & 1 & \gamma \\ 1 & \gamma & \gamma & \delta \end{bmatrix} \geq 0$$

でなければならない．したがって，その左上部の 3×3 の principal submatrix の determinant ≥ 0 でなければならない．すなわち

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \gamma\\ 1 & \gamma & 1\end{bmatrix}\right) = -(\gamma-1)^2 \geq 0$$

となるが，これは $\gamma = 1$ のときのみ可能である．すなわち $f(3) = \alpha = 3\beta = 3f(1)$ のときのみとなる． □

S が separable のとき，(4) の表示

$$\mathbf{S} = \sum_k (\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_k^*)\otimes(x_k x_k^*) = \sum_k (\boldsymbol{\xi}_k\otimes x_k)(\boldsymbol{\xi}_k\otimes x_k)^* \quad \exists\, \boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{C}^2,\ x_k \in \mathbb{C}^n.$$

で特に

$$\langle \boldsymbol{\xi}_j \otimes x_j | \boldsymbol{\xi}_k \otimes x_k\rangle = 0 \quad \forall\, j \neq k \tag{8}$$

のように選ぶことができるとき，**S** は **totally separable** であると言おう．

S が totally separable なことは，**S** ≥ 0 で，そのどの positive eigenvalue に対する eigenspace にも product vectors からなる **(CONS)** (= complete orthonormal system) が存在することである．

ここで 0 が **S** の eigenvalue のとき，すなわち ker(**S**) $\neq \{0\}$ のとき，ker(**S**) にも product vectors からなる **(CONS)** がある事は後で示す．

4. Separability. 先ず明らかなことは

$$0 \leq X, Y \in \mathbb{M}_n \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix}X & 0\\ 0 & Y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\otimes X + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\otimes Y \quad \text{separable.} \tag{9}$$

次ぎに (4) の表示を考えれば

$$\begin{aligned}&\mathbf{T} \in \mathbb{M}_2 \otimes \mathbb{M}_m \ \text{ separable } \Longrightarrow \\ &(X\otimes \mathbf{Z})\cdot \mathbf{T}\cdot (X\otimes\mathbf{Z})^* \in \mathbb{M}_2\otimes\mathbb{M}_n \quad \text{separable} \quad \forall\, X \in \mathbb{M}_2,\ \mathbf{Z}\in\mathbb{M}_{n,m}\end{aligned} \tag{10}$$

な事が判る．特に

$$\begin{bmatrix}A & B\\ B^* & C\end{bmatrix} \ \text{ separable } \Longrightarrow \begin{bmatrix}XAX^* & XBX^*\\ XB^*X^* & XCX^*\end{bmatrix} \ \text{ separable } \ \forall\, X \in \mathbb{M}_n. \tag{11}$$

Theorem 4.1.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}A & B\\ B^* & C\end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_- \text{ で } A, B, B^*, C \text{ が commuting } \Longrightarrow \mathbf{S} \ \text{ totally separable.}$$

(Proof.) 可換な normal matrices に対する同時 sepectral 表示より orthonormal vector $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$ があり

$$A = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j x_j^*, \quad B = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j x_j^*, \quad B^* = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} x_j x_j^*, \quad C = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j x_j^*$$

となる．したがって

$$\mathbf{S}=\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix}\alpha_j & \lambda_j\\ \overline{\lambda_j} & \beta_j\end{bmatrix}\otimes x_jx_j^*$$

となる．ここで $\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_-$ より $\begin{bmatrix}\alpha_j & \lambda_j\\ \overline{\lambda_j} & \beta_j\end{bmatrix}\geq 0$ となる事が判る．この 2×2 行列に対する spectral 表示より

$$\begin{bmatrix}\alpha_j & \lambda_j\\ \overline{\lambda_j} & \beta_j\end{bmatrix}=\boldsymbol{\xi}_j\boldsymbol{\xi}_j^*+\boldsymbol{\zeta}_j\boldsymbol{\zeta}_j^*,\quad \langle\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\zeta}_j\rangle=0\quad \exists\,\boldsymbol{\xi}_j,\ \boldsymbol{\eta}_j\in\mathbb{C}^2$$

と書かれ．したがって

$$\mathbf{S}=\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\xi}_j\boldsymbol{\xi}_j^*)\otimes x_jx_j^*+\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\zeta}_j\boldsymbol{\zeta}_j^*)\otimes x_jx_j^*$$

となり，orthogonality condition (8) も満たされる． □

Theorem 4.2. $\mathbf{S}$ separable $\Longrightarrow$

$$\mathbf{S}\ =\ (I_2\otimes\mathbf{Z})\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{N}^*\\ \mathbf{N} & \mathbf{N}\mathbf{N}^*\end{bmatrix}\cdot(I_2\otimes\mathbf{Z})^*+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & Y\end{bmatrix}$$

$$\exists\ \text{normal}\ \mathbf{N}\in\mathbb{M}_m,\ \mathbf{Z}\in\mathbb{M}_{n,m},\ 0\leq Y\in\mathbb{M}_n.$$

(Proof.) $\mathbf{S}$ にたいする (4) の表示の $\boldsymbol{\xi}_j=\begin{bmatrix}\xi_{j,1}\\ \xi_{j,2}\end{bmatrix}$ で，$\xi_{j,1}\neq 0$ と $\xi_{j,1}=0$ のものに別け，前者に対しては x_j の代わりに $\xi_{j,1}x_j$ を考えることにより

$$\mathbf{S}=\sum_{j=1}^{m}\begin{bmatrix}x_j\\ \xi_jx_j\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_j\\ \xi_jx_j\end{bmatrix}^*+\sum_{k}\begin{bmatrix}0\\ y_k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ y_k\end{bmatrix}^*$$

の形になる．まず $0\leq Y:=\sum_k y_ky_k^*\in\mathbb{M}_n$ とする．つぎに

$$\mathbf{Z}:=[x_1,\ldots,x_m]\ \in\ \mathbb{M}_{n,m}$$

そして $\mathbb{M}_m$ の normal matrix $\mathbf{N}$ を

$$\mathbf{N}:=\mathrm{diag}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$$

で定義すると

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{ZN}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{ZN}\end{bmatrix}^*+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & Y\end{bmatrix}$$

となるが，これは

$$\mathbf{S}=(I_2\otimes\mathbf{Z})\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{N}^*\\ \mathbf{N} & \mathbf{N}\mathbf{N}^*\end{bmatrix}\cdot(I_2\otimes\mathbf{Z})^*+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & Y\end{bmatrix}$$

となる. □

$\mathbf{S} \geq 0$ および $\mathbf{S}^\tau \geq 0$ の条件を使い易い形に書いておこう. その前に $A \geq 0$ の **generalized inverse** A^{-1} について述べておこう. $\mathbb{C}^n = \mathrm{ran}(A) \oplus \ker(A)$ と書かれるから, A^{-1} は $\mathrm{ran}(A)$ では A の inverse で, $\ker(A)$ では 0 として定義される. 明らかに $(A^{1/2})^{-1} = (A^{1/2})^{-1}$ となる.

次ぎの事実は, linear algebra の演習問題である.

Lemma 4.1. $0 \leq A, C \in \mathbb{M}_n$ とする.

(i) $$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \iff B = A^{1/2}WC^{1/2} \quad \exists \|W\| \leq 1$$

$$\iff \mathrm{ran}(B) \subset \mathrm{ran}(A), \quad \ker(B) \supset \ker(C) \quad \text{and} \quad B^*A^{-1}B \leq C.$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0 \quad \iff B = A^{1/2}NA^{1/2} \quad \exists^1 N \quad \text{such that}$$

$$\mathrm{ran}(N) \subset \mathrm{ran}(A), \quad \ker(N) \supset \ker(A) \quad \text{かつ} \quad A^{1/2}N^*NA^{1/2} \leq C, \; A^{1/2}NN^*A^{1/2} \leq C.$$

次ぎの結果は non-trivial である.

Theorem 4.3. (Woronowicz [6]) $1 \leq n \leq 3$ のときは,

$$0 \leq \mathbf{S} \in \mathbb{M}_2 \otimes \mathbb{M}_n, \quad (\mathbf{PPT}) \implies \text{separable}.$$

Theorem 4.4. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ かつ $\mathbf{S}^\tau = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0$ とする.

(i) $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = \mathrm{rank}(A) \implies \mathbf{S}$ separable.

(ii) $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) \leq 4$ または $\mathrm{rank}(A) \leq 3 \implies \mathbf{S}$ separable.

(Proof) (i)): Lemma 4.1 (i) を使うと

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^*A^{-1} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^*A^{-1}B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

と書くことができる. $\begin{bmatrix} I & 0 \\ B^*A^{-1} & I \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$ はともに invertible であるから,

$$\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C - B^*A^{-1}B)$$

となり, 仮定 $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = \mathrm{rank}(A)$ より,

$$\mathrm{rank}(C - B^*A^{-1}B) = 0, \quad \text{すなわち} \quad C - B^*A^{-1}B = 0$$

となる．これは Lemma 4.1(ii) の表示を使うと

$$A^{1/2}N^*NA^{1/2} = B^*A^{-1}B = C \geq A^{1/2}NN^*A^{1/2}$$

となる．N の range と kernel を考えると，これは $N^*N \geq NN^*$ となるが，trace を考えて $N^*N = NN^*$ すなわち N は normal となり

$$\mathbf{S} = (I_2 \otimes A^{1/2}) \cdot \begin{bmatrix} I & N \\ N^* & N^*N \end{bmatrix} \cdot (I_2 \otimes A^{1/2})^*$$

と書くことができ，Theorem 4.1 により separable になる． □

(Proof) (ii): rank($\mathbf{S}$) = 4 のとき．もし rank(A) = 4 なら上の (i) により $\mathbf{S}$ は separable になる．

次ぎに rank(A) ≤ 3 としよう．

$$\mathrm{ran}(A^{1/2}NA^{1/2}),\ \mathrm{ran}(A^{1/2}N^*A^{1/2}) \ \subset\ \mathrm{ran}(A)$$

で

$$\begin{bmatrix} A & A^{1/2}NA^{1/2} \\ A^{1/2}N^*A^{1/2} & A^{1/2}N^*NA^{1/2} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{そして} \quad C \geq A^{1/2}N^*NA^{1/2}, \tag{12}$$

および

$$\begin{bmatrix} A & A^{1/2}N^*A^{1/2} \\ A^{1/2}NA^{1/2} & A^{1/2}NN^*A^{1/2} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{そして} \quad C \geq A^{1/2}NN^*A^{1/2} \tag{13}$$

となっている．

以下の Lemma 4.2 を使うと，Theorem 4.3 (Woronowicz) により $\mathbf{S}$ は separable になる．

Lemma 4.2. $0 \leq C \in \mathbb{M}_n$ と subspace $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^n$ が与えられたとしよう．このとき

$$\max\{X;\ C \geq X \geq 0,\ \mathrm{ran}(X) \subset \mathcal{M}\} \quad = \quad \begin{bmatrix} C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．ここで $C = \begin{bmatrix} C_{11} & .C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ は空間 $\mathbb{C}^n$ の直交分解 $\mathbb{C}^n = \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^\perp$ に対応する C の block-matrix 表示である．

(Continuation of the proof.) $\mathcal{M} := \mathrm{ran}(A)$ にとり

$$C_0 := \max\{X;\ C \geq X \geq 0, \mathrm{ran}(X) \subset \mathrm{ran}(A)\}$$

を使って, $\mathbf{S}_0 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n)$ を

$$\mathbf{S}_0 := \begin{bmatrix} A & A^{1/2}NA^{1/2} \\ A^{1/2}N^*A^{1/2} & C_0 \end{bmatrix}$$

とすると，(12) と (13) より $\mathbf{S}_0 \geq 0$ さらに $\mathbf{S}_0^\tau \geq 0$ となる. また $\mathbf{S}_0$ の各 entry の range は $\mathrm{ran}(A)$ に含まれており，$\dim(\mathrm{ran}(A)) \leq 3$ であるから，$\mathbf{S}_0 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_3)$ と考えてよい. したがって Theorem 4.3 (Woronowicz) により $\mathbf{S}_0$ は separable になる．最後に

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C - C_0 \end{bmatrix}, \quad C - C_0 \geq 0$$

であるから，(9) より $\mathbf{S}$ も separable になる． □

Theorem 4.5. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ かつ $\mathbf{S}^\tau = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0$ とする.

A, B, B^*, C の中のどれか 3 個が commuting $\Longrightarrow$ $\mathbf{S}$ separable.

(Proof) (i): A, B, C が commuting としよう. $\mathfrak{P}_+$ が closed であるから，$A + \epsilon I$ を考えると，最初から $A > 0$ として仮定してよい. A, B, B^*, C の代わりに I, $A^{-1/2}BA^{-1/2}$, $(A^{-1/2}BA^{-1/2})^*$, $A^{-1/2}CA^{-1/2}$ を考えると，最初から $A = I$ として，

$$B, C \quad \text{commuting}, \quad \begin{bmatrix} I & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \ \text{かつ} \ \begin{bmatrix} I & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} I & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \quad \text{separable}$$

を示せばよい．この 2 つの ≥ 0 の条件は，Lemma 4.1 (i) により，$C \geq B^*B$, BB^* と同じである.

$$\mathbf{N} := \begin{bmatrix} B & (C - BB^*)^{1/2} \\ (C - B^*B)^{1/2} & -B^* \end{bmatrix}$$

とすると，B と C の commuting なことから $\mathbf{N}$ は normal となる事が判る.

$\mathbf{V} = [I, 0] \in \mathbb{M}_{n,2n}$ とすると

$$\begin{bmatrix} I & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = (I_2 \otimes \mathbf{V}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^* & \mathbf{N}^*\mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot (I_2 \otimes \mathbf{V})^*$$

となり，Theorem 4.1 により真ん中の項は separable なので，(10) により $\begin{bmatrix} I & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ も seprable になる.

(ii): A, B, B^* が commuting としよう.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & B^*A^{-1}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C - B^*A^{-1}B \end{bmatrix}$$

と書かれ，どの項も ≥ 0 となる．仮定と Theorem 4.1 より第 1 項は separable で，$C \geq B^*A^{-1}B$ より，(9) より第 2 項も separable であるので $\mathbf{S}$ は separable になる. □

Theorem 4.6. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ とする.

(i) $\mathbf{S}$ が Toeplitz 型, i.e., $A = C \implies \mathbf{S}$ separable.

(ii) $\mathbf{S}$ が Hankel 型, i.e., $B = B^* \implies \mathbf{S}$ separable.

(Proof.) どちらの場合も **(PPT)** は自然に満たされる.

(i) は $\begin{bmatrix} I & B \\ B^* & I \end{bmatrix}$ の場合に還元さるし. (ii) は $\begin{bmatrix} I & B \\ B & C \end{bmatrix}$ の場合に還元されて，それらの separability はともに Theorem 4.4 から出る. □

最後に容易に検証可能な separability のための条件を挙げよう. $\mathbf{I}$ は最も安定した separable 行列であるが，その近傍にあるものはどうかという摂動問題である.

Theorem 4.7. (Gurvitz - Barnum [1]) $\mathbf{S}$ selfadjoint, $\|\mathbf{I}-\mathbf{S}\|_2 \le 1 \implies \mathbf{S}$ separable.

rank 1 の ortho-projection は $\|\cdot\|_2 = 1$ であるから, 次の不思議な結果が出る.

Theorem 4.8. co-rank 1 の orhto-projection はすべて separable である.

5. Total separability.

$\mathbf{S}$ の total separablity の定義を思い出そう. すなわち

$$\mathbf{S} = \sum_j (\boldsymbol{\xi}_j \otimes x_j)(\boldsymbol{\xi}_j \otimes x_j)^* \quad \exists\, \boldsymbol{\xi}_j \in \mathbb{C}^2,\ x_j \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_j \otimes x_j | \boldsymbol{\xi}_k \otimes x_k \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}_j | \boldsymbol{\xi}_k \rangle \cdot \langle x_j | x_j \rangle = 0 \quad \forall\, j \ne k$$

のように選べることである.

rank 1 の ortho-projection に関しては，separability と total separability は同じことになる. separable でない rank 1 の orhto-projection もあるから，Theorem 4.8 の系として

$$\mathbf{P} \quad \text{separable ortho-projection} \quad \not\Longrightarrow \quad \mathbf{I}-\mathbf{P} \quad \text{separable}$$

が結論される. ここで当然 total separablity の場合はどうかが問題になる.

Theorem 5.1.
$\mathbf{P} \in \mathbb{M}_2 \otimes \mathbb{M}_n$ totally separable ortho-projection $\implies$ $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ totally separable.

これは orthogonalization の手続きを考えれば，次ぎの事から出ることは明らかである.

Theorem 5.2. $\boldsymbol{\zeta}_j \otimes x_j \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$ $(j = 1, 2, \ldots, N < 2n)$ **(ONS)**
$\implies \langle \boldsymbol{\zeta}_j \otimes x_j | \boldsymbol{\eta} \otimes x \rangle = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \quad \exists\, \boldsymbol{\eta} \otimes x \ne 0.$

証明のために Lemma を用意しよう.

Lemma 5.1. $P_j,\ Q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ は $\mathbb{M}_n$ の ortho-projection で

$$P_j P_k = Q_j Q_k = P_j Q_k = 0 \quad \forall\, j \ne k.$$

で

$$\sum_{j=1}^{m} P_j \neq I \quad \text{または} \quad \sum_{j=1}^{m} Q_j \neq I$$

を満たすとする．このとき $\exists\, k$, $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$ で，次の性質を持つものがある：

$$P_j x = 0 \quad \forall\, j \neq k \quad \text{かつ} \qquad Q_j x = 0 \quad \forall\, j$$

か，または

$$Q_j x = 0 \quad \forall\, j \neq k \quad \text{かつ} \qquad P_j x = 0 \quad \forall\, j.$$

(Proof.)　$P_j = Q_j$ $\forall\, j$ ならば，仮定より

$$\sum_{j=1}^{m} P_j = \sum_{j=1} Q_j \neq I$$

であるから，$(\sum_{j=1}^{m} P_j)x = (\sum_{j=1}^{m} Q_j)x = 0$ である $\|x\| = 1$ のものをとり k は任意に定めてよい．

次ぎに，例えば，もし $P_1 \neq Q_1$ であれば，仮定から

$$\mathrm{ran}(P_1),\ \mathrm{ran}(Q_1) \ \subset\ \ker(\sum_{j=2}^{m} P_j) \cap \ker(\sum_{j=2}^{m} Q_j)$$

であるから，

$$0 \neq x \in \ker(\sum_{j=2}^{m} P_j) \cap \ker(\sum_{j=2}^{m} Q_j)$$

で $P_1 x = 0$ または $Q_1 x = 0$ のものがある．　□

Theorem 5.2 の証明に入る前に，記号を用意しよう．

$\mathbb{C}^2$ の unit vector $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ に対して（unimodular な常数を除いて）一意的に unit vector $\boldsymbol{\xi}^\perp \in \mathbb{C}^2$ が以下の条件で決まる：

$$\langle \boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\xi}^\perp \rangle = 0, \quad \text{実際} \quad \boldsymbol{\xi}^\perp = \begin{bmatrix} \overline{\xi_2} \\ -\overline{\xi_1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

そして（unimodular な常数を除いての equivalence $\equiv$ の意味で）

$$(\boldsymbol{\xi}^\perp)^\perp \ \equiv\ \boldsymbol{\xi}, \quad \langle \boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\zeta} \rangle \ \equiv\ \langle \boldsymbol{\xi}^\perp | \boldsymbol{\zeta}^\perp \rangle \quad \forall\ \text{unit vector}\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^2. \tag{15}$$

重要なのは $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}$ が $\mathbb{C}^2$ の unit vector で x, y が $\mathbb{C}^n$ の unit vector のとき

$$\langle \boldsymbol{\xi} \otimes x | \boldsymbol{\zeta} \otimes y \rangle \ =\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\zeta} \equiv \boldsymbol{\xi}^\perp \quad \text{or} \quad \langle x | y \rangle = 0. \tag{16}$$

(Proof of Theoem 5.2).　$\boldsymbol{\zeta}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ を書き換え，そして並べ変えて

$$\overbrace{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_1}^{p_1}, \ \overbrace{\boldsymbol{\xi}_1^\perp, \ldots, \boldsymbol{\xi}_1^\perp}^{q_1}, \ \overbrace{\boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_2}^{p_2}, \ \overbrace{\boldsymbol{\xi}_2^\perp, \ldots, \boldsymbol{\xi}_2^\perp}^{q_2}, \ \ldots \ \overbrace{\boldsymbol{\xi}_m, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m}^{p_m}, \ \overbrace{\boldsymbol{\xi}_m^\perp, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m^\perp}^{q_m}$$

の形であるとしてよい（q_j は 0 の場合もある.）ここで

$$\boldsymbol{\xi}_j \neq \boldsymbol{\xi}_k \quad \boldsymbol{\xi}_j \neq \boldsymbol{\xi}_k^{\perp} \quad \forall\, j \neq k. \tag{17}$$

対応して product vector の **(ONS)** を

$$\boldsymbol{\xi}_1 \otimes x_{1,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_1 \otimes x_{1,p_1}, \qquad \boldsymbol{\xi}_1^{\perp} \otimes y_{1,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_1^{\perp} \otimes y_{1,q_1},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 \otimes x_{2,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_2 \otimes x_{2,p_2}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2^{\perp} \otimes y_{2,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_2^{\perp} \otimes y_{2,q_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\xi}_m \otimes x_{m,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_2 \otimes x_{m,p_m}, \qquad \boldsymbol{\xi}_m^{\perp} \otimes y_{m,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_m^{\perp} \otimes y_{m,q_m}.$$

と書こう. (17) から

$$\langle \boldsymbol{\xi}_j | \boldsymbol{\xi}_k \rangle \neq 0, \quad \langle \boldsymbol{\xi}_j^{\perp} | \boldsymbol{\xi}_k^{\perp} \rangle \neq 0 \quad \text{and} \quad \langle \boldsymbol{\xi}_j | \boldsymbol{\xi}_k^{\perp} \rangle \neq 0 \quad (j \neq k),$$

となるので, (16) から

$$\langle x_{j,s} | x_{k,t} \rangle = \delta_{j,k}\delta_{s,t}, \quad \langle y_{j,s} | y_{k,t} \rangle = \delta_{j,k}\delta_{s,t} \quad \text{and} \quad \langle x_{j,s} | y_{k,t} \rangle = 0 \quad \forall\, j \neq k,\ \forall\, s, t. \tag{18}$$

となる. ここで ortho-projections

$$P_1 := \sum_{s=1}^{p_1} x_{1,s} x_{1,s}^* \quad \text{and} \quad Q_1 := \sum_{s=1}^{q_1} y_{1,s} y_{1,s}^*$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_m := \sum_{s=1}^{p_m} x_{m,s} x_{m,s}^* \quad \text{and} \quad Q_m := \sum_{s=1}^{q_m} y_{m,s} y_{m,s}^*.$$

で定義しよう. (17) と (18) から $P_j,\ Q_j\ (j = 1, 2, \ldots, m)$ は

$$P_j P_k = Q_j Q_k = P_j Q_k = 0 \quad \forall\, j \neq k$$

を満たす.

さらに $N < 2n$ より $\sum_{j=1}^m P_j \neq I$ or $\sum_{j=1}^m Q_j \neq I$ となる.

Lemma 5.1 を使って unit vector x があり, ある k にたいして（例えば）

$$P_j x = 0 \quad \forall\, j \neq k \quad \text{and} \quad Q_j x = 0 \quad \forall\, j.$$

これから

$$\langle x_{j,t} | x \rangle = 0 \quad \forall\, j \neq k \quad \text{and} \quad \forall\, t$$

となるので, $\boldsymbol{\eta} := \boldsymbol{\xi}_k^{\perp}$ とすると (14) から

$$\langle \boldsymbol{\xi}_j \otimes x_{j,t} | \boldsymbol{\eta} \otimes x \rangle = 0 \quad \forall\, j,\ \forall\, t$$

となる. さらに $Q_j x = 0\ \forall\, j$ であるから

$$\langle y_{j,t} | x \rangle = 0 \quad \forall\, j,\ \forall\, t.$$

が判り，再び (16) から

$$\langle \boldsymbol{\xi}_j^{\perp} \otimes y_{j,t} | \boldsymbol{\eta} \otimes x \rangle = 0 \quad \forall\, j,\ \forall\, t$$

判る．結局

$$\langle \boldsymbol{\zeta}_j \otimes w_j | \boldsymbol{\eta} \otimes x \rangle \;=\; 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

となる． □

Corollary 5.1. (i) $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n)$ の ortho-projection $\mathbf{P}$ に関しては

$$\mathbf{P} \quad \text{totally separable} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}^{\perp} := \mathbf{I} - \mathbf{P} \quad \text{totally separable.}$$

(ii) $\mathbf{S}$ が totally separable なら，ran($\mathbf{S}$) も ker($\mathbf{S}$) も，product vector からなる **(CONS)** を許容する．

(iii) $0 \le \mathbf{S} \le \mathbf{I}$ のとき

$$\mathbf{S} \quad \text{totally separable} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I} - \mathbf{S} \quad \text{totally separable.}$$

Theorem 4.1 に関連して，$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ が totally separable となるのは A, B, B^*, C が commuting な場合に限るのではないかという疑問が湧く．

Theorem 5.3. $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ が totally separabke $\Longrightarrow$

B は normal, i.e., $B^*B = BB^*$ であるが，A, B, C は必ずしも commuting でない．

(Proof.) $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^*) \otimes (x_k x_k^*) \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\xi}_k = \begin{bmatrix} \xi_{k,1} \\ \xi_{k,2} \end{bmatrix}$ で

$$\langle \boldsymbol{\xi}_j | \boldsymbol{\xi}_k \rangle \cdot \langle x_j | x_k \rangle = (\overline{\xi_{j,1}} \xi_{k,1} + \overline{\xi_{j,2}} \xi_{k,2}) \cdot \langle x_j | x_k \rangle = 0 \quad \forall\, j \neq k$$

となっていると，この orthogonality 条件 と (14) の関係から

$$B = \sum_{j=1}^{N} \xi_{j,1} \overline{\xi_{j,2}} x_j x_j^* \quad \text{commute with} \quad B^* = \sum_{k=1}^{N} \overline{\xi_{k,1}} \xi_{k,2} x_k x_k^*$$

が結論される．しかし $N = 2$ の場合でも，A, B, C の commuting は結論できない． □

6. $\mathfrak{P}_-$ 再考. $\mathfrak{P}_+$ の dual として定義された $\mathfrak{P}_-$ も，本質はよく判らない．partial transpose map $\mathbf{S} \longmapsto \mathbf{S}^{\tau}$ は $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n)$ の involution で

$$\mathfrak{P}_+^{\tau} = \mathfrak{P}_+ \quad \text{および} \quad \mathfrak{P}_-^{\tau} = \mathfrak{P}_-$$

である．この map は $\mathfrak{P}_0$ を invariant にしないが

$$\mathfrak{P}_+ \subset \mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{P}_0^\tau \quad \text{および} \quad \mathfrak{P}_- \supset \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0^\tau$$

となっている．Theorem 4.3 (Woronowicz) は

$$\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{P}_0^\tau = \mathfrak{P}_+ \quad (n \leq 3)$$

を述べているが，これの dual な関係は

$$\mathfrak{P}_- = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0^\tau \quad (n \leq 3)$$

である．すなわち $n \leq 3$ のとき

$$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_- \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^\tau \quad \exists\, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathfrak{P}_0 \tag{19}$$

を述べている．

以下では，$n \geq 3$ の場合でも，$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$ が Hankel 型や Toeplitz 型である場合は (19) の関係がずっと改善できることを示そう．

Theorem 6.1. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_-$ に対して以下の条件は同値である．

(i) Hankel 型, i.e., $B = B^*$,

(ii) $B = \frac{1}{2}\{A^{1/2}WC^{1/2} + C^{1/2}W^*A^{1/2}\}$ $\exists$ unitary W,

(iii) $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left\{\mathbf{T} + \mathbf{T}^\tau\right\}$ $\exists\, \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$.

Theorem 6.2. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_-$ に対して以下の条件は同値である．

(i) Toeplitz 型, i.e., $A = C$,

(ii) $B = 2D^{1/2}W(A-D)^{1/2}$ $A \geq \exists\, D \geq 0$, unitary W.

(iii) $\mathbf{S} = \mathbf{T} + (\mathbf{JTJ})^\tau$ $\exists\, \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$. ここで $\mathbf{J} := \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I$.

これ等の証明には，行列値多項式の分解に関する次ぎの Fejer-Riesz の結果（[5] 参照）が有用である．

Theorem 6.3. (Fejer-Riesz) $F(t)$ は $\mathbb{M}_n$-値の関数とする．

(i) $F(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ が $\mathbb{M}_n$-値の多項式のとき

$$F(t) \geq 0 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad F(t) = G(t)^*G(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \exists \text{多項式}\ G(t).$$

(ii) $F(e^{it})$ $(t \in \mathbb{R})$ が $\mathbb{M}_n$-値の trigonometric 多項式のとき

$F(e^{it}) \ \geq \ 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$

$$F(e^{it}t) = G(e^{it})^*G(e^{it}) \ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \exists\, \mathbb{M}_n - \text{値 analytic trigonometirc 多項式 } G(e^{it}).$$

ここで $G(e^{it})$ が analytic とは $G(e^{it}) = \sum_{k\geq 0} e^{ikt}X_k \ \exists\, X_k \in \mathbb{M}_n$ の形のときである.

以下の議論では

$$A = X^*X \ \ \exists\, X \in \mathbb{M}_n \quad \Longrightarrow \quad X = WA^{1/2} \ \ \exists \text{ unitary } W \tag{20}$$

というよく知られた事実を使おう.

(Proof of Theorem 6.1.) (i) $\Longrightarrow$ (ii): $B = B^*$ のとき, (5) の $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$ の条件は

$$F(t) := A + 2tB + t^2C \ \geq \ 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

の事となる. Theorem 6.3(Fejer-Riesz)(i) により

$$F(t) = (X_0 + tX_1)^*(X_0 + tX_1) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \exists\, X_0, X_1 \in \mathbb{M}_n$$

と分解できるが, これは

$$A = X_0^*X_0, \quad C = X_1^*X_1 \quad \text{そして} \quad B = \mathrm{Re}(X_0^*X_1)$$

となる. これから (19) により

$$B = \mathrm{Re}(A^{1/2}WC^{1/2}) \ \ \exists \text{ unitary } W.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii):

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} A & A^{1/2}WC^{1/2} \\ C^{1/2}W^*A^{1/2} & C \end{bmatrix}$$

とすると, $\mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$ で $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left\{\mathbf{T} + \mathbf{T}^\tau\right\}$ となっている.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) は明らかであろう. □

(Proof of Theorem 6.2.) (i) $\Longrightarrow$ (ii): $A = C$ のときは (5) の $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$ の条件は

$$\langle x|Ax\rangle^2 \ \geq \ |\langle x|Bx\rangle|^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

となるが, これは

$$F(e^{it}) := 2A + e^{it}B + e^{-it}B^* \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

の事と理解できる. Theorem 6.3 (Fejer-Riesz)(ii) により

$$F(e^{it}) = (X_0 + e^{it}X_1)^*(X_0 + e^{it}X_1) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \exists\, X_1, X_2 \in \mathbb{M}_n$$

と分解できる．これは

$$2A = 2C = X_0^*X_0 + X_1^*X_1 \quad \text{そして} \quad B = X_0^*X_1$$

のことである．

$$D = \frac{1}{2}X_0^*X_0$$

とすると，(18) により

$$\frac{1}{2}X_1^*X_1 = A - D \quad \text{で} \quad B = 2D^{1/2}W(A-D)^{1/2} \ \exists \text{ unitary } W.$$

となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} D & D^{1/2}W(A-D)^{1/2} \\ (A-D)^{1/2}W^*D^{1/2} & A-D \end{bmatrix}$$

とすると，$\mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$ であり，

$$\mathbf{T} + (\mathbf{JTJ})^{\tau} = \begin{bmatrix} D + (A-D) & 2D^{1/2}W(A-D)^{1/2} \\ 2(A-D)^{1/2}W^*D & (A-D)+D \end{bmatrix} = \mathbf{S}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) は明らかであろう． □

$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$ の条件だけでは，Toeplitz 型からも Hankel 型からも，$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$ は導出されない．

$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_-$ で，$A = I$ のときは，$\mathbf{S}$ が Teoplitz 型であるのは

$$\max\{|\langle x|Bx\rangle|;\ \|x\| \le 1\} \ \le \ 1$$

のとき，すなわち B の **numerical radius** ≤ 1 のことを言っている．また $A = I$ で $\mathbf{S}$ が Hankel 型であるのは

$$B = \mathrm{Re}(X) \quad \text{で} \quad C = X^*X \quad \exists\, X \in \mathbb{M}_n$$

のことを示している．

最後に考えるのは $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_-$ で Toeplitz 型でありさらに Hankel 型の場合，すなわち

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathfrak{P}_-$$

の場合である．このときは

$$A \ge B \ge -A$$

となるので，

$$B = A^{1/2}WA^{1/2} \quad I \ \ge \exists\, W \ \ge -I$$

となり，結局 $\mathbf{S} \ge 0$ で，最後に $\mathbf{S}$ が separable である事が結論される．

参考文献

[1] L. Gurvitz and H. Barnum, *Largest separable ball around the maximially mixed bipartite quantum10 system,* arXiv. quant-ph. 021150v2, 10 Dec. 2002.

[2] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *Separability of mixed states; necessary and sufficient conditions,* Physics Letters, A223(1996), 1-8.

[3] S.-J. Kye, *Facial structures for various notions of positivity and applications to the theory of entanglement,* Rev. Math. Phys. 25(2013), no. 2, 133002.

[4] A. Peres, *Separability criterion for density matrices,* Phys. Rev. Lett., 77(1996), 1413-1415.

[5] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Hardy classes and operator theory,* Oxford Univ. Press, New York, 1977.

[6] S.L. Woronowicz, *Positive maps of low dimensional matrix algebras,* Rep. Math. Phys. 10(1976), 165-183.