数理解析研究所講究録
第 1996 巻 2016 年 99-106

Generalized gyrovector spaces and hyperbolic geometry of the positive definite cone

新潟大学工学部　阿部敏一
Toshikazu Abe
Faculty of Engineering,
Niigata University

1 abstract

Generalized gyrovector space （以下，GGV）は実ノルム空間の一般化である．実ノルム空間でない GGV の例として，単位的 C^*-環の正値可逆元全体のなす正凸錘がある．本稿では，特に正凸錘の場合を例にとり、GGV の構造について書す．なお，本稿は羽鳥理先生との共著である [1] の要約となっている．

2 Gyrogroups

GGV について述べるための準備として（ジャイロ可換）ジャイロ群の定義から始める．（ジャイロ可換）ジャイロ群は A. A. Ungar によって定義された（可換）群の一般化である．（ジャイロ可換）ジャイロ群は一般に（可換とは限らず）結合法則を満たすとも限らない．群ではない，すなわち結合法則を満たさないジャイロ群の具体例としては，特殊相対論の速度全体，ポアンカレ円盤が代表的である．詳しくは [3] を参照されたい．

二項演算 $+: S\times S\to S;\ (a,b)\mapsto a+b$ が定義された空でない集合 $(S,+)$ を magma という．Magma $(S,+)$ からそれ自身への全単射 $\varphi: S\to S$ で二項演算 $+$ を保存するもの，すなわち $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ が成立するものを magma $(S,+)$ の自己同型写像という．ここで、magma $(S,+)$ の自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}(S,+)$ で表すことにする．

Definition 1 (gyrogroup). Magma $(G,\oplus)$ がジャイロ群であるとは，以下の公理 (G1) から (G5) を満たす場合をいう．

(G1) $\exists \boldsymbol{e}\in G$ s.t. $\forall \boldsymbol{a}\in G,\ \boldsymbol{e}\oplus \boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}$.

(G2) $\forall \boldsymbol{a}\in G,\ \exists\ominus \boldsymbol{a}$ s.t. $\ominus\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}$.

(G3) $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in G,\ \exists!\,\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}\in G$ s.t. $\boldsymbol{a}\oplus(\boldsymbol{b}\oplus\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\oplus\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$.

(G4) $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G,\ \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\in\mathrm{Aut}(G,\oplus)$.

(G5) $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G,\ \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]=\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

また，ジャイロ群 $(G, \oplus)$ がジャイロ可換であるとは，次の公理 (G6) を満たすことをいう．

(G6) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G,\ \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a})$.

以下にジャイロ可換ジャイロ群の例を簡単に並べる。

Example 2. Magma $(X, \cdot)$ が「（可換）群」であることと「任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X$ に対して $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ が X 上の恒等写像であるような（ジャイロ可換）ジャイロ群」であることは同値である。

Example 3. c を真空中での光の速さ，$\mathbb{R}^3_c$ を 3 次元ユークリッド空間内の原点中心で半径 c の開球とする．$\mathbb{R}^3_c$ 上の二項演算 $\oplus_E$ を

$$\boldsymbol{u} \oplus_E \boldsymbol{v} = \frac{1}{1 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle / c^2} \left\{ \boldsymbol{u} + \frac{1}{\gamma_u} \boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u} \right\}$$

で定める．但し，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積，γ_u は $\boldsymbol{u}$ のローレンツ因子 $\gamma_u = (1 - \|\boldsymbol{u}\|^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ とする．$(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ はジャイロ可換ジャイロ群である．これをアインシュタインジャイロ群 (Einstein gyrogroup) とよぶ.

Example 4. $\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位開円盤とする．$\mathbb{D}$ 上の二項演算 $\oplus_M$ を

$$a \oplus_M b = \frac{a + b}{1 + \bar{a} b}$$

によって定める．$(\mathbb{D}, \oplus_M)$ はジャイロ可換ジャイロ群である．これをメビウスジャイロ群 (Möbius gyrogroup) とよぶ.

ジャイロ群について調べる上で，次のようにジャイロ群の演算から定義される新たな二項演算を考えると便利である．二つの演算 $\oplus$ と $\boxplus$ は群の場合には一致することがわかる．結合法則が成立する場合には区別する必要のなかったものである．

Definition 5. ジャイロ群 $(G, \oplus)$ に対して，新たな二項演算 $\boxplus$ を

$$a \boxplus b = a \oplus \mathrm{gyr}[a, \ominus b] b$$

で定義する．この二項演算 $\boxplus$ を $(G, \oplus)$ の coaddition という。

単位的 C^*-環の正値可逆元全体の成す正凸錘 $\mathscr{A}_+^{-1}$ もまたジャイロ可換ジャイロ群の例のひとつである．

Example 6. 単位的 C^*-環 $\mathscr{A}$ の正凸錘 $\mathscr{A}_+^{-1}$ は

$$a \oplus b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}$$

によって与えられる演算 $\oplus$ でジャイロ可換ジャイロ群を成す．ジャイロ群としての単位元は C^*-環の積の単位元，ジャイロ群としての逆元は C^*-環の積の逆元であることが確認できる．自己同型写像 $\mathrm{gyr}[a, b]$ は，X を

$$X = (a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$$

によって定まる $\mathscr{A}$ のユニタリー元として,

$$\mathrm{gyr}[a,b]c = XcX^* \quad (\forall c \in \mathscr{A}_+^{-1})$$

で与えられる．Coaddition $\boxplus$ は

$$a \boxplus b = \{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\}^2$$

となる．

3 Gyrovector space

Ungar はまたジャイロベクトル空間も定義した．ジャイロベクトル空間は「和」として必ずしも「可換群」を要求しないような実内積空間の一般化である．但し,「和」として「ジャイロ可換ジャイロ群」を要求している．前章 Example 3, Example 4 で提示された特殊相対論の速度全体，ポアンカレ円盤も自然にジャイロベクトル空間としての構造を持つことが知られている．詳しくは [3] を参照されたい．しかし，Example 6 で提示された単位的 C^*-環の正凸錘はジャイロ可換ジャイロ群ではあるが，自然な意味でジャイロベクトル空間にはならない．

4 GGV

[1] で我々は GGV (generalized gyrovector space) を定義した．これは，ジャイロベクトル空間が内積空間を"ジャイロ化"したものであるのに対して，ノルム空間を"ジャイロ化"したものである．GGV はノルム空間とジャイロベクトル空間の両方の一般化となるように定義される．

Definition 7 (Generalized gyrovector spaces). $(G, \oplus)$ をジャイロ可換ジャイロ群とし，写像 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ が定義されているとする．$(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間とし，$\phi : G \to \mathbb{V}$ とする．$(G, \oplus, \otimes, \phi)$ が generalized gyrovector space (簡単に，GGV) であるとは以下の公理 (GGV0) から (GGV8) を満たすことをいう．

(GGV0) $\|\phi(\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\boldsymbol{a})\| = \|\phi(\boldsymbol{a})\|$.

(GGV1) $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(GGV2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$.

(GGV3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$.

(GGV4) $(\phi(|r| \otimes \boldsymbol{a}))/\|\phi(r \otimes \boldsymbol{a})\| = \phi(\boldsymbol{a})/\|\phi(\boldsymbol{a})\| \quad (r \neq 0, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e})$.

(GGV5) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$.

(GGV6) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = id_G$.

(GGVV) ある演算 $\oplus'$ と $\otimes'$ によって $(\pm\|\phi(G)\|, \oplus', \otimes')$ は一次元実線形空間となり，以下の (GGV7) と (GGV8) を満たす．但し，$\pm\|\phi(G)\| = \{\pm\|\phi(\boldsymbol{a})\|; \boldsymbol{a} \in G\}$.

(GGV7) $\|\phi(r \otimes \boldsymbol{a})\| = |r| \otimes' \|\phi(\boldsymbol{a})\|$.

(GGV8) $\|\phi(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b})\| \leq \|\phi(\boldsymbol{a})\| \oplus' \|\phi(\boldsymbol{b})\|$.

単位的 C^*-環の正凸錘は以下のように GGV である．

Example 8. A を単位的 C^*-環とし，そのノルムを $\|\cdot\|$ とする．A の正凸錘 A_+^{-1} に対して，演算 $\oplus$ と $\otimes$ を

$$a \oplus b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}} \qquad (a, b \in \mathscr{A}_+^{-1}),$$

$$r \otimes a = a^r \qquad (a \in \mathscr{A}_+^{-1}, r \in \mathbb{R})$$

によって定める．写像 $\phi = \log : \mathscr{A}_+^{-1} \to (\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ を考えることで，正凸錘 $(\mathscr{A}_+^{-1}, \oplus, \otimes, \log)$ は GGV としての構造をもつ．ここで公理 (GGVV) において表れる一次元線形空間空間 $(\pm\|\log(\mathscr{A}_+^{-1})\|, \oplus', \otimes')$ は通常の実数値直線 $(\mathbb{R}, +, \times)$ である．すなわち，$\oplus' = +$, $\otimes' = \cdot$.

5 Some structures on GGV's

GGV はノルム空間を"ジャイロ化"の意味で一般化したものである．したがって，ノルム空間に対しての一部の議論を，同様に GGV に対して行えることが期待される．本章ではノルム空間で定義される概念を，同様に GGV に対して定義する．また具体的に，単位的 C^*-環の正凸錘のなす GGV の例を見る．

次に定義される gyrometric は GGV における距離構造である．ノルム空間の場合には，ノルムから導かれる距離と一致する．一般の GGV では三角不等式を満たすとは限らず，したがって距離になるとは限らない．しかし，ジャイロ三角不等式と呼ばれる不等式

$$\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) \oplus' \varrho(b, c)$$

を満たし，本質的には距離とみなすことが出来ることがわかる．実際，与えられた GGV に対して上手く単調関数 f を選び $f \circ \varrho$ が距離になるように出来る．

Definition 9. GGV $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ に対して，

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\phi(\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b})\| \qquad (\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G)$$

によって定義される ϱ を $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ の gyrometric という．

次の定義はノルム空間における直線，線分，中点の概念に相当するものをＧＧＶ上で定義したものである．ノルム空間の場合を考えれば，gyroline は直線，gyrosegment は線分，gyromidpoint は中点と一致する．

Definition 10. GGV $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ に対して，

$$L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](t) := \boldsymbol{a} \oplus t \otimes (\ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \qquad (\forall \boldsymbol{a} \in G, t \in \mathbb{R})$$

とする．像 $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\mathbb{R})$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を結ぶ gyroline，像 $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]([0,1])$ を gyrosegment $\boldsymbol{ab}$，点 $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\frac{1}{2})$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の gyromidpoint という．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の gyromidpoint を $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ で表すことにする．すなわち，

$$\boldsymbol{p}(a, b) = L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\frac{1}{2}).$$

ここで，gyromidpoint $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は coaddition $\boxplus$ を用いて

$$\boldsymbol{p}(a, b) = \frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b)$$

と書くことが出来る．

次の例で単位的 C^*-環の正凸錘について見る．

Example 11. A を単位的 C^*-環とし，そのノルムを $\|\cdot\|$ とする．A の正凸錘 A_+^{-1} に対して，演算 $\oplus$ と $\otimes$ を

$$a \oplus b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}} \qquad (a, b \in \mathscr{A}_+^{-1}),$$
$$r \otimes a = a^r \qquad (a \in \mathscr{A}_+^{-1}, r \in \mathbb{R})$$

によって定めると $(A_+^{-1}, \oplus, \otimes, \log)$ は GGV である．単位元は $\mathscr{A}$ の積の単位元，逆元は $\mathscr{A}$ の積の逆元，

$$\mathrm{gyr}[a, b]c = XcX^* \quad (\forall c \in \mathscr{A}_+^{-1}),$$

但し X は a, b によって定まる A のユニタリー元

$$X = (a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}.$$

Coaddition は

$$a \boxplus b = \{a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}\}^2$$

である．Gyrometric ϱ は $\|\cdot\|$ を A の C^*-環ノルムとして

$$\varrho(a, b) = \|\log(a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})\|$$

となり，これは Thompson metric に他ならない．

$$L[a, b](s) = a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-s} a^{\frac{1}{2}}$$

であり，gyrosegment ab は a と b を結ぶ測地線と一致する．特に $s = \dfrac{1}{2}$ の場合，

$$\boldsymbol{p}(a, b) = a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$$

となり，a と b の gyromidpoint は A_+^{-1} 上の a と b の geometric mean と一致することがわかる．

Example 11 の内容を通常のノルム空間と比較出来るように表にまとめる．

GGV G	Normed space $\mathbb{V}$	Positive cone $\mathscr{A}_+^{-1}$
$a \oplus b$	$a+b$	$a^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}}$
$a \boxplus b$	$a+b$	$\{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\}^2$
$\phi : G \to \mathbb{V}$	$id_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$	$\log : \mathscr{A}_+^{-1} \to (\mathscr{A}, \|\cdot\|)$
$r \otimes a$	ra	a^r
$\varrho(a,b) = \|\phi(a \ominus b)\|$	$\|a-b\|$, usual metric	$\|\log(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})\|$, Thompson metric
$\boldsymbol{p}(a,b) = \frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b)$	$\frac{a+b}{2}$, arithmetic mean	$a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$, geometric mean
$L[a,b](s)$	a+s(-a+b), segment	$a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-s}a^{\frac{1}{2}}$, geodesic

6 A Mazur-Ulam theorem for GGV's

前章で「ノルム空間に対しての一部の議論を，同様に GGV に対して行えることが期待される.」と述べたが，具体的な結果を一つあげることができた.

Mazur-Ulam の定理は実ノルム空間についての定理であるが，具体的には次のようなものである．実ノルム空間から（別の）ノルム空間への全射が距離を保存する（等距離写像）ならば，その写像は自動的にアファインである．この定理は写像に対して代数的な仮定を一切おかず，距離についての条件から代数構造に関する結果を導いているものである．この定理の対象をノルム空間から GGV へ一般化した.

オリジナルの Mazur-Ulam の定理に対して，Väisälä が簡潔な証明を与えている [4]．本定理（GGV について）の証明は本質的にはこの Väisälä の証明そのままである．Väisälä の証明で用いられている"ノルム空間の性質"と"同様の性質"を GGV が持っていることを確認することが証明の大部分である．ここでは証明は述べないので [1] を参照されたい.

Theorem 12. *GGV* G_1 から （別の） *GGV* G_2 への全射 $T : G_1 \to G_2$ が *gyrometric* を保存する，すなわち

$$\varrho_1(a,b) = \varrho_2(Ta,Tb) \qquad (\forall a,b \in G_1),$$

ならば T は *gyromidpoint* を保存する，すなわち

$$T(\boldsymbol{p}(a,b)) = \boldsymbol{p}(Ta,Tb) \qquad (\forall a,b \in G_1).$$

但し ϱ_i は *GGV* G_i の *gyrometric* とする（$i=1,2$）.

Corollary 13. $(G_1, \oplus_1, \otimes_1, \phi_1)$ と $(G_2, \oplus_2, \otimes_2, \phi_2)$ を *GGV* とする．$T : G_1 \to G_2$ は *gyrometric* を保存する，すなわち

$$\varrho_2(T\boldsymbol{a}, T\boldsymbol{b}) = \varrho_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \qquad (\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in G_1)$$

であるような全射とする.（但し ϱ_i は G_i の *gyrometric* （$i=1,2$）。）このとき，以下の性質を満たすような写像 T_0 が存在して，$T(\cdot) = T(e) \oplus_2 T_0(\cdot)$ とかける．任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in G_1$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$T_0(\boldsymbol{a} \oplus_1 \boldsymbol{b}) = T_0(\boldsymbol{a}) \oplus_2 T_0(\boldsymbol{b});$$

$$T_0(\alpha \otimes_1 \boldsymbol{a}) = \alpha \otimes_2 T_0(\boldsymbol{a});$$

$$\varrho_2(T_0\boldsymbol{a}, T_0\boldsymbol{b}) = \varrho_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

が成立する．

Theorem 12 を単位的 C^*-環の正凸錘に適用することでただちに次の結果が得られる．

Proposition 14. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ を単位的 C^*-環，$\mathscr{A}_+^{-1}$，$\mathscr{B}_+^{-1}$ をそれぞれその正凸錘とする．$T: \mathscr{A}_+^{-1} \to \mathscr{B}_+^{-1}$ を全射とする．T が *Thompson metric* についての等距離写像であれば T は *geometric mean* を保存する．

単位的 C^*-環の正凸錘に Corollary 13 を適用することでより詳しく T の情報が得られる．

Proposition 15. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ を単位的 C^*-環，$\mathscr{A}_+^{-1}$，$\mathscr{B}_+^{-1}$ をそれぞれその正凸錘とする．$T: \mathscr{A}_+^{-1} \to \mathscr{B}_+^{-1}$ を *Thompson metric* についての全射等距離写像とする．このとき，e_1 を $\mathscr{A}_+^{-1}$ の単位元（$\mathscr{A}$ の積の単位元）とし，$T_0(\cdot) = T(e_1)^{-\frac{1}{2}}T(\cdot)T(e_1)^{-\frac{1}{2}}$ とすると，任意の $a, b \in \mathscr{A}_+^{-1}$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$T_0(a^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}}) = T(a)^{\frac{1}{2}}T(b)T(a)^{\frac{1}{2}};$$

$$T_0(a^r) = T_0(a)^r;$$

$$\|\log T(a)^{\frac{1}{2}}T(b)^{-1}T(a)^{\frac{1}{2}}\| = \|\log a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}}\|$$

が成立する． ここで，$T(\cdot) = T(e_1)^{\frac{1}{2}}T_0(\cdot)T(e_1)^{\frac{1}{2}}$ である．

以上の結果を用いることで Thompson metric についての全射等距離写像の形について以下のように完全に決定することが出来る．この結果は Hatori と Molnár によって既に知られていた結果である [2] が上記の結果を用いることで証明をより簡単に出来る．

Theorem 16. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ を単位的 C^*-環，$\mathscr{A}_+^{-1}$，$\mathscr{B}_+^{-1}$ をそれぞれその正凸錘とし，$e_{\mathscr{A}}$，$e_{\mathscr{B}}$ をそれぞれ正凸錘の単位元（C^*-環の積の単位元）とする．$T: \mathscr{A}_+^{-1} \to \mathscr{B}_+^{-1}$ が *Thompson metric* についての全射等距離写像ならば，T は *Jordan *-isomorphism* $J: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ と $\mathscr{B}$ の *central projection* $p \in \mathscr{B}$ を用いて

$$T(a) = T(e_{\mathscr{A}})^{\frac{1}{2}}(pJ(a) + (e_{\mathscr{B}} - p)J(a^{-1}))T(e_{\mathscr{A}})^{\frac{1}{2}} \qquad a \in \mathscr{A}_+^{-1}.$$

の形で表すことができる．

参考文献

[1] T. Abe and O. Hatori, *Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen, **87** (2015), 393–413

[2] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positiv elements in C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl., **409** (2014), 158–167

[3] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific, (2008)

[4] J. Väisälä, *A Proof of the Mazur-Ulam Theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 633–635