数理解析研究所講究録
第 1997 巻 2016 年 32-39



# 非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の解の挙動について

(On the behavior of solutions to a chemotaxis system with nonlinear sensitivity functions)

仙葉 隆 (九州工業大学)
Takasi Senba (Kyushu Institute of Technology)

## 1 序

本稿は２０１５年に数理解析研究集会における講演記録であり、藤江健太郎氏（東京理科大学）との共同研究の内容を基礎としている。

我々は、以下の方程式系の解の時間大域的存在について考察した。

$$(KS)\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla\chi(v)), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u. \end{cases}$$

ここで、$\tau$ は非負の正定数とする。$\tau$ が正のとき方程式系は放物型-放物型方程式系となり、$\tau = 0$ のとき方程式系は放物型-楕円型方程式系となる。また、$\chi(v)$ $(v > 0)$ は滑らかな関数であり $\chi'(v) > 0$ $(v > 0)$ を満たすものを考える。

$\tau > 0$ の場合の方程式系 (KS) は、単細胞生物の集中現象に関連して導出された [5]。$\tau = 0$ の場合の方程式系 (KS) は、相互作用する粒子系の挙動に関連して導出された。また、$\tau = 0$ は、$\tau > 0$ の場合の単純化としても理解できる [6, 7]。特に生物現象との関連で方程式系 (KS) を考えるとき、未知関数 $u$、$v$ はそれぞれ生物の個体密度、生物が分泌する化学物質の濃度と関連している。背景となる生物現象は、非常に多くの微生物がいる状況において自らが分泌する化学物質の濃度と濃度勾配を感知し化学物質の濃度が高い方向に移動する性質（正の走化性）が要因となり起こる現象である。そのとき関数 $\chi(v)$ は、化学物質の濃度・濃度勾配と生物の反応の強さの関係を表す。この方程式は $\chi(v) =$ 正定数 $\times\, v$ (線形知覚関数) の場合に多くの研究成果がある。我々は $\chi$ が非線形の場合に焦点を絞り研究を行っており、本稿ではそのような観点での研究で得られた成果を紹介したい。

本稿で我々が扱う方程式系を整理する。

先に述べた生物現象を踏まえて未知関数 $u$、$v$ は場所 $x$ と時刻 $t$ の関数であり、地表やシャーレの中で観測されるものであるから $x$ は二次元

平面またはその中の領域 $\Omega$ 上の点であり、生物や化学物質はシャーレの内と外の間で移動しないとする。以上を踏まえて我々は以下の初期値・境界値問題を考える。

$$
\text{(PP-PE)}\begin{cases}
u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla\chi(v)) & \text{in } \Omega\times(0,T),\\
\tau v_t = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega\times(0,T),\\
\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T),\\
u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega,\\
v(\cdot,0) = v_0\ [\tau>0] & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ここで、$v$ の初期条件 $v_0$ は $\tau>0$ の場合の方程式系 (PP) に必要であるが、$\tau=0$ の場合の方程式系 (PE) には必要ない。また、前述のように領域 $\Omega$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ二次元平面上の有界領域とする。さらに、初期条件 $u_0$、$v_0$ は $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな非負関数であり、$u_0 \not\equiv 0$ とする。

## 2　基本的な性質と知られている結果

本節では、方程式系 (PE)、(PP) の解の基本的な性質と先行研究について紹介する。ただし本稿で扱われている方程式系については多くの研究成果があり、多次元領域における研究、拡張された方程式系の研究を含めると全てを紹介することは困難であるので、本稿で紹介したい我々の研究成果に関連が深い成果のみに限定して紹介する。

**Proposition 2.1** 方程式系 *(PE)* または *(PP)* は唯一つの時間局所的古典解 $(u,v)$ を持ち以下を満たす。

$$u(x,t)>0,\quad u(x,t)>0\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T_m).$$

ここで、$T_m\in(0,\infty]$ は、古典解の最大存在時刻とする。

さらに、古典解 $(u,v)$ は以下を満たす。

$$\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx \quad (0\le t<T_m).$$

さらに、知覚関数が線形の場合は以下が成り立つ。

**Proposition 2.2** $\chi(v)=\chi_0 v$、$\chi_0>0$ とする。さらに

$$F(u,v)=\int_\Omega (u\log u - \chi_0 uv)dx + \frac{\chi_0}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2+v^2)dx$$

とするとき、*(PE)*、*(PP)* の古典解は以下を満 たす。

$$\frac{d}{dt}F(u,v)+\tau\int_\Omega (v_t)^2dx+\int_\Omega u|\nabla(\log u-\chi_0 v)|^2dx=0.$$

上記 $F$ をリアプノフ関数と呼ぶ。特に、 $\tau=0$ のときは (PE) の第2式を用いると

$$F(u,v)=\int_\Omega\left(u\log u-\frac{\chi_0}{2}uv\right)dx.$$

となる。

知覚関数が線形の場合は、上記のようにリアプノフ関数が存在する。しかし、その他の知覚関数の場合はリアプノフ関数の存在は知られていない。

リアプノフ関数の存在は、解の挙動を調べる際に大きな助けになる。例えば以下のような事が知られている。

**Proposition 2.3** $\chi(v)=\chi_0 v$、$\chi_0>0$ であり、領域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ が滑らかな境界を持つ有界領域のとき以下が成り立つ。

$$\mathcal{F}_\lambda\equiv\inf\left\{F(u,v)\ :\ (u,v)\ \text{は定常解。}\int_\Omega u(x)dx=\lambda\right\}>-\infty.$$

上記の事実と Proposition 2.2 より以下のことがわかる。

**Theorem 2.4 ([4])** $\chi(v)=\chi_0 v$、$\chi_0>0$ であり、領域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ が滑らかな境界を持つ有界領域のとき、$\lambda>4\pi/\chi_0$ に対して以下を満たす滑らかな関数 $(u_0,v_0)$ がある。

$$\begin{aligned}&u_0(x)\geq 0,\quad v_0(x)\geq 0\quad (x\in\overline{\Omega}),\\&F(u_0,v_0)<\mathcal{F}_\lambda,\quad \lambda=\int_\Omega u_0(x)dx.\end{aligned}$$

$\tau=0$ のときは $-\Delta v_0+v_0=u_0$ を満たすように取れる。

このとき、初期条件 $(u_0,v_0)$ に対応する解は有限時刻、または無限時刻で爆発する。

ここで、解 $(u,v)$ が時刻 $T\in(0,\infty]$ で爆発するとは以下の (i)、(ii) を満たす事を言う。

(i) 解 $(u,v)$ は $\Omega\times[0,T)$ で古典解となっている。

(ii) $\limsup_{t\to T}\|u(\cdot,t)\|_\infty = \limsup_{t\to T}\|v(\cdot,t)\|_\infty = \infty.$

さらに、$T < \infty$ のとき有限時刻爆発といい、$T = \infty$ のとき無限時刻爆発という。

ここで、$p \in [1,\infty]$ に対して $\|\cdot\|_p$ は標準的な $L^p(\Omega)$ ノルムを表す。

**Proposition 2.5** $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を滑らかな境界を持つ有界領域とし、$\chi(\cdot)$ を $(0,\infty)$ 上の滑らかな関数とする。そのとき、$T > 0$ に対して

$$\sup_{0\le t<T}\int_\Omega u(x,t)\log u(x,t)dx < \infty$$

であるならば適切な $T' > T$ に対して $\Omega \times (0,T')$ 上 *(PE)*、*(PP)* のただ一つの古典解が存在する。

さらに $\chi(v) = \chi_0 v$、$\chi_0 > 0$ のとき、Trudinger-Moser の不等式より

$$\int_\Omega u(x,t)dx < \frac{4\pi}{\chi_0}$$

ならば以下を満たす定数 $C_1 > 0$、$C_2 > 0$ がある。

$$C_1\int_\Omega u\log u dx \le F(u(\cdot,t),v(\cdot,t)) + C_2.$$

このことと Proposition 2.2 と Proposition 2.5 より以下が成り立つ。

**Theorem 2.6 ([9])** $\chi(v) = \chi_0 v$、$\chi_0 > 0$ であり、領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ が滑らかな境界を持つ有界領域のとき、

$$\int_\Omega u_0(x)dx < \frac{4\pi}{\chi_0}$$

であるならば *(PE-PP)* はただ一つ時間大域的古典解がある。

以上の例のように知覚関数が線形の場合は、(PP)、(PE) にリアプノフ関数が存在し、それを用いて解の時間大域的存在や爆発解の存在を示すことができる。

知覚関数が非線形の場合は、リアプノフ関数の存在は知られていない。しかしながら以下のようにいくつかの結果がある。

**Theorem 2.7 ([8])** $\tau = 0$、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < R\}$ $(0 < R < \infty)$、$u_0$ は球対称な滑らかな関数とする。
*(i)* $\chi(v) = v^a$ $(0 < a < 1)$ または $b \log v$ $(b > 0)$ であるとき、*(PE)* の時間大域的解が存在する。
*(ii)* $\chi(v) = v^d$ $(d > 1)$ のとき、適当な（球対称な）初期値 $u_0$ に対する *(PE)* の古典解は有限時刻で爆発する。

**Theorem 2.8 ([1])** $\tau > 0$、$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を滑らかな境界を持つ有界領域とする。$\chi(v) = b \log u$ $(0 < b < 1)$ であるとき、*(PP)* の時間大域的解が存在する。

# 3 我々の結果と証明のアイデア

前節記述した非線形知覚関数の場合の先行研究では、リアプノフ関数が無いため、解の球対称性や $\chi(v)$ を $b \log v$ の形に限定するなどの仮定を置くことで解の時間大域的存在を示している。

我々は、上記の事を踏まえて考察を行い以下の結果を得た。

**Theorem 3.1 ([2, 3])** $\chi$ は $(0, \infty)$ 上の滑らかな関数で $\lim_{v \to \infty} \chi'(v) = 0$ を満たすとする。さらに以下の *(i)* または *(ii)* を仮定する。

*(i)* $\tau = 0$、$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ の滑らかな境界を持つ有界領域とする。
*(ii)* $\tau$ は十分小さな正定数、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < R\}$ $(0 < R < \infty)$、$u_0$ と $v_0$ は球対称で滑らかな関数とする。

そのとき、*(PE-PP)* は唯一つの時間大域的古典解を持つ。

定理の証明の概略を以下で述べる。証明のアイデアを明らかにするために $\tau = 0$ の場合について説明する。

$Q \in \overline{\Omega}$ と $R > 0$ に対して $\phi$ を以下を満たす滑らかな関数とする。

$$\phi(x) = 0 \ (x \in \overline{\Omega} \setminus B(Q, R)), \ = 1 \ (x \in B(Q, R/2)),$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \ (x \in \partial\Omega)$$

ただし、$B(Q, R) = \{x \in \Omega \ : \ |x - Q| < R\}$ とする。

(PE) の第 1 式に $\log u \cdot \phi$ をかけて $\Omega$ 上で積分し、ソボレフの不等式から得られる以下の不等式

$$\int_\Omega u^2 \phi dx \le D \int_{B(Q,R)} u dx \int_\Omega |\nabla \sqrt{u}|^2 \phi dx + \frac{C}{|B(Q,R)|^2} \|u_0\|_1 \qquad (1)$$

とソボレフの不等式と (PE) の第 2 式から得られる以下の不等式

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v|^4 \phi dx &\le D\|(-\Delta v + v)\phi^{1/4}\|_{4/3}^4 + C \\
&= D\|u\phi^{1/4}\|_{4/3}^4 + C = D\left(\int_\Omega u^{4/3}\phi^{1/3} dx\right)^3 + C \\
&\le D\left(\int_{B(Q,R)} u dx\right)^2 \left(\int_\Omega u^2 \phi dx\right) + C \qquad (2)
\end{aligned}$$

を用いることで以下の不等式を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u \log u \phi dx + \int_\Omega |\nabla \sqrt{u}|^2 \phi dx \\
&\le D(\|\chi'(v(\cdot,t))\|_{B(Q,R),\infty}^2 + |B(Q,R)|^{1/3})(\int_{B(Q,R)} u dx + 1)^2 (\int_\Omega u^2 \phi dx) + C.
\end{aligned} \qquad (3)$$

ここで、$p \in [1,\infty]$ に対して、$\|\cdot\|_{B(Q,R),p}$ は標準的な $L^p(B(Q,R))$ ノルムを表す。さらに、$D$ は $Q \in \overline{\Omega}$ と $0 < R \le 1$ に依存しない定数として取れる。

**Lemma 3.2**

$$v(x,t) \ge v_* \quad ((x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T_m))$$

が成り立つ。ここで、$v_*$ は、$\|u_0\|_1$ と $\Omega$ にのみ依存する正定数である。

従って、以下を満たす定数 $\delta > 0$ が $Q \in \overline{\Omega}$、$0 < R \le 1$ によらずに取れる。

$$\left(\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{B(Q,R)} u(x,t) dx < \delta \text{ ならば} \\
\displaystyle\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t) \log u(x,t) \phi(x) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \sqrt{u(x,t)}|^2 \phi(x) dx \le C.
\end{array}\right.$$

が成り立つ。このことと (1)、Proposition 2.2 より

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u \log u \phi dx + \frac{D}{2\|u_0\|_1}\int_\Omega u^2 \phi dx \le C.$$

が成り立つ。

一方、(3) と Proposition 2.1 より以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u\log u\phi dx + \frac{D}{\|u_0\|_1}\int_\Omega u^2\phi dx \\
&\le D(\|\chi'(v(\cdot,t))\|^2_{B(Q,R),\infty} + |B(Q,R)|^{1/3})(\|u_0\|_1+1)^2(\int_\Omega u^2\phi dx) + C.
\end{aligned}
$$

第2式を積分形で表すと

$$
v(x,t) = \int_\Omega G(x,y)u(y,t)dy
$$

となり積分核 $G(x,y)$ は $|x-y| \ll 1$ のとき $C\log 1/|x-y| (C>0)$ の特異性を持つから $0<R\ll 1$ のとき

$$
\int_{B(Q,R)} u(x,t)dx \ge \delta
$$

ならば $v(x,t) \gg 1$ $(x\in B(Q,R))$、$|B(Q,R)| = \pi R^2 \ll 1$ より

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\log u(x,t)\phi(x)dx + \frac{D}{2\|u_0\|_1}\int_\Omega u(x,t)^2\phi(x)dx \le C.
$$

従って、$0<R\ll 1$ とっておけば、各 $t$ に対して

$$
\int_{B(Q,R)} u(x,t)dx \ge \delta, \quad \int_{B(Q,R)} u(x,t)dx < \delta
$$

どちらの場合も

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\log u(x,t)\phi(x)dx + \frac{D}{2\|u_0\|_1}\int_\Omega u(x,t)^2\phi(x)dx \le C.
$$

を得る。従って $\int_\Omega u\log u\phi dx$ の有界性を得る。この評価は $Q\in\overline{\Omega}$ によらないから $\int_\Omega u\log u dx$ の有界性を得る。このことと Proposition 2.5 より解が時間大域的に存在することがわかる。

# 参考文献


[1] P. Biler, *Global solutions to some parabolic-elliptic systems of chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 9 (1999), 347–359.

[2] K. Fujie, and T. Senba, *Global existence and boundedness in a parabolic-elliptic Keller-Segel system with general sensitivity*, Dis. Cont. Dyn. Systems B, Vol. 21 (2016), 81-102.

[3] K. Fujie, and T. Senba, *Global existence and boundedness of radial solutions to a two dimensional fully parabolic chemotaxis system with general sensitivity*, preprint.

[4] D. Horstmann, *From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. I*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., Vol. 105 (2003), 103-165.

[5] E.F. Keller, and L.A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol., Vol. 26 (1970), 399-415.

[6] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 5 (1995), 581-601.

[7] T. Nagai, *Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, J. Inequal. Appl., Vol. 6 (2001), 37-55.

[8] T. Nagai, and T. Senba, *Global existence and blow-up of radial solutions to a parabolic-elliptic system of chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 8 (1998), 145–156.

[9] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkc. Ekvacioj, Vol. 40 (1997), 411–433.