数理解析研究所講究録
第 1998 巻 2016 年 42-45

KLR 代数の基本化

名古屋大学 多元数理科学研究科 小西 正秀 *

Masahide Konishi
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要

或る制限をつけた KLR 代数及び巡回 KLR 代数を箙と関係で表す.

1 基本化とは

はじめに, "基本化" という言葉が業界では殆ど使われておらず, 講演者が標題を短くしたいが故に導入した単語でしかないことについてお詫び申し上げる. 基本化という言葉で以て何を指したかったのかは概要に書いてある通りである.

K を体とし, A を K 上の結合的で単位元を持つ代数 (以下単に代数と書く) とする. このとき, A が K 上有限次元であれば, A は左 A 加群として以下のように直既約射影加群に直和分解される.

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{m} P_i \cong \bigoplus_{i=1}^{m} Ae_i \quad (\text{各 } e_i \text{ は原始冪等元})$$

このとき, 各 P_i が互いに非同型であれば, A は基本的代数であるという. 仮に A が基本的でなくとも, 各同型類から代表元を取り, その添字で以て $e := \sum e_j$ なる元を与え, $A^b := eAe$ とすれば基本的代数となる. このとき, A^b を A の基本化と呼ぶ. 両者は森田同値となるため, 加群圏の構造も一致する.

一方で, 箙 Q から得られる道代数 KQ を考える. KQ のイデアルとして, 長さ k 以上の全ての道から生成されるものを R_k と呼ぶ. ある 2 以上の整数 n に対して $R_2 \supseteq I \supseteq R_n$ となるような KQ のイデアル I を許容イデアルと呼ぶ. このとき, KQ/I は有限次元かつ基本的代数である.

以上二つの事柄を結びつけるのが以下の事実である [ASS].

"任意の有限次元 K 代数 A に対し, $A^b \cong KQ/I$ となる箙 Q と KQ の許容イデアル I が存在する. "

特に, I のことを関係と呼び, 有限次元 K 代数 A に対し上記を満たす箙 Q と関係 I を"A の箙と関係による表示"と呼ぶ. また, ここまで有限次元性を強調したが, 例え K 代数 A が無限次元であろうとも, 上記のような直和分解を持つようなものであれば, 以上の議論は許容イデアル I の条件を $R_2 \supseteq I$ とするだけで成立する.

KLR 代数は上記の性質を持つ無限次元代数であるので, 箙と関係による表示がどうなるのかというのが大元の問いであり, 特殊な KLR 代数に対して原始冪等元の同値類を得る手順を与えたというのが昨年度の講演内容であり, それは箙の頂点を与えるまでに対応する. 今回の主結果では箙と関係による表示を得る手順を与える. 更に言うと, 昨年度の結果は KLR 代数のうち [BK] に記載されている特別な定義に関するものであったが, 今回の結果はその範囲及び [KL1], [KL2] の定義を含むが [R] の定義 (最も広い) の一部にのみ適用されるものである. また, 重み付けという観点からは何も拡張されていない.

*m10021t@math.nagoya-u.ac.jp

2 KLR代数と巡回KLR代数

KLR代数の定義として, ここでは [R] によるものを基盤とする[1]. $I=\{1,\cdots,n\}$ とし[2], 各組 $i,j\in I$ に対し, 二変数多項式 $Q_{ij}(u,v)\in K[u,v]$ を与える. (但し, $Q_{ii}(u,v)=0$ とする.)[3]

また, I の元に対する非負整数値の重み付け (即ち n 個の非負整数の組) を全て 1 とし[4], 以下の定義に於いてはその場合に生じうる関係式のみを抜粋する. $I_n:=\{\sigma(1,2,\cdots,n)\,|\,\sigma\in S_n\}$ とする.

定義 2.1. KLR代数 R_Q は次の生成元と関係式から定まる.

- 生成元:
  $\{\mathbf{e(i)}\,|\,\mathbf{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in I_n\}\cup\{y_1,\cdots,y_n\}\cup\{\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}\}$.
- 関係式:
  $$\begin{aligned}
  &\mathbf{e(i)}\mathbf{e(j)}=\delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\mathbf{e(i)},\\
  &\sum_{\mathbf{i}\in I_n}\mathbf{e(i)}=1,\\
  &y_k\mathbf{e(i)}=\mathbf{e(i)}y_k,\\
  &\psi_k\mathbf{e(i)}=\mathbf{e}(s_k\mathbf{i})\psi_k,\\
  &y_ky_l=y_ly_k,\\
  &\psi_ky_l=y_l\psi_k\ (l\neq k,k+1),\\
  &\psi_k\psi_l=\psi_l\psi_k\ (|k-l|>1),\\
  &\psi_ky_{k+1}\mathbf{e(i)}=y_k\psi_k\mathbf{e(i)},\\
  &y_{k+1}\psi_k\mathbf{e(i)}=\psi_ky_k\mathbf{e(i)},\\
  &\psi_k^2\mathbf{e(i)}=Q_{i_ki_{k+1}}(y_k,y_{k+1})\mathbf{e(i)},\\
  &\psi_k\psi_{k+1}\psi_k\mathbf{e(i)}=\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}\mathbf{e(i)}.
  \end{aligned}$$

関係式の一番目と二番目より, 各 $\mathbf{e(i)}$ は 1 を分解する互いに直交する冪等元である. 主結果においては各組 $i,j\in I$ に対し $Q_{ij}(u,v)=Q_{ji}(v,u)$, $Q_{ij}(u,v)\neq 0$, $Q_{ij}(u,v)$ は定数か u^p+v^q の形 (p,q は正の整数) であることを仮定する.

先ほどとは別に, 頂点集合 I への非負整数による重み付け $\Lambda=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を定める. I^Λ を $\{y_1^d\mathbf{e(i)}\,|\,\mathbf{i}\in I_n, d=b_{i_1}\}$ で生成される R_Γ のイデアルとする. このとき, $R_Q^\Lambda=R_Q/I^\Lambda$ を巡回KLR代数と呼ぶ. 特に R_Q^Λ は有限次元代数となる.

以降, 簡単のため [KL1] の定義を用いる. つまり, I を頂点集合に持つ連結な無向グラフ Γ を与え, 上記関係式の下から二行目の関係式の代わりに以下を用いる.

$$\psi_k^2\mathbf{e(i)}=\begin{cases}(y_k+y_{k+1})\mathbf{e(i)} & (\Gamma\text{において }i_k\text{ と }i_{k+1}\text{が隣接する})\\ \mathbf{e(i)} & (\Gamma\text{において }i_k\text{ と }i_{k+1}\text{が隣接しない})\end{cases}$$

こうして与えられたKLR代数を R_Γ, 巡回KLR代数を R_Γ^Λ と書く. 上記関係式は $Q_{ij}(u,v)$ を $u+v$(i と j が隣接する), 1(i と j が隣接しない) と置くことでも得られる.

また, R_Γ 及び R_Γ^Λ は以下のような次数付き代数の構造を持つ. $deg(\mathbf{e(i)})=0$, $deg(y_k)=2$, $deg(\psi_l\mathbf{e(i)})=1$ (i_l と i_{l+1} が隣接する), $deg(\psi_l\mathbf{e(i)})=0$ (i_l と i_{l+1} が隣接しない)

主結果において取り扱われるKLR代数は全て正の次数付き代数の構造を持っており, そのことが次節に於ける各補題の証明の要となっている.

[1] 本質に差障り無い範囲で記号等を変える
[2] [R] では無限集合も可としているがここでは有限集合とする.
[3] [KL1], [KL2], [BK] における定義はこの Q_{ij} を適当に取ることで与えられる.
[4] 最もきつい制約

3 具体的な手順

先に作戦を大雑把に書くと, 最初に R_Γ への全射を持つ箙を与え, R_Γ に於ける関係式から道代数上のイデアルを作り, 同型を作る. そこから R_Γ に於ける補題を使って森田同値を保ったまま箙を加工し, その後はイデアルが許容イデアルとなるように, 同型を保ったまま箙を加工する. 巡回 KLR 代数に関しては更にここから箙を加工することで, 箙と関係による表示を得る.

定義 3.1. 箙 G_n を次で与える.

- 頂点 : $\mathbf{i} \in I^n$.
- 矢 :
  - $y_k^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \to \mathbf{i}$ $(\mathbf{i} \in I_n,\ 1 \le k \le n)$,
  - $\psi_l^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \to s_l\mathbf{i}$ $(\mathbf{i} \in I_n,\ 1 \le l < n)$.

このとき以下の補題が成り立つ.

補題 3.2. 次の対応により, KG_n から R_Γ への全射ができる. $\mathbf{i} \mapsto \mathrm{e}(\mathbf{i})$, $y_k^{\mathbf{i}} \mapsto \mathrm{e}(\mathbf{i})y_k\mathrm{e}(\mathbf{i})$, $\psi_l^{\mathbf{i}} \mapsto \mathrm{e}(\mathbf{i})\psi_l\mathrm{e}(s_l\mathbf{i})$. 更に, 上記対応により R_Γ の関係式を書き換えることで, $KG_n/I_\Gamma \cong R_\Gamma$ where I_Γ となる KG_n のイデアル I_Γ が得られる.

次の関係式があるため I_Γ は許容イデアルではないことに注意する.

$$\psi_k^2\mathrm{e}(\mathbf{i}) = \begin{cases} (y_k + y_{k+1})\mathrm{e}(\mathbf{i}) & (\Gamma\text{において } i_k \text{と } i_{k+1}\text{が隣接する}) \\ \mathrm{e}(\mathbf{i}) & (\Gamma\text{において } i_k \text{と } i_{k+1}\text{が隣接しない}) \end{cases}$$

この二つの関係式のうち後者を生じさせないために, 以下の補題を用いて箙を加工する.

補題 3.3. $\mathrm{e}(\mathbf{i})$ は全て原始冪等元である. 故に $R_\Gamma\mathrm{e}(\mathbf{i})$ は直既約射影加群である.

補題 3.4. i_k と i_{k+1} が Γ において隣接しないことと, $R_\Gamma\mathrm{e}(\mathbf{i}) \cong R_\Gamma\mathrm{e}(s_k\mathbf{i})$ は同値である.

この補題を繰り返し用いることで, 以下が言える.

$\bar{G_n}$ を G_n の輪を外し 2-閉路を辺とした無向グラフとする. $\bar{G_n}$ における $\mathbf{i}$ と $s_k\mathbf{i}$ を繋ぐ辺を, Γ において i_k と i_{k+1} を繋ぐ辺があれば取り除く. こうして得られた無向グラフを G_Γ と書く. このとき以下は同値.
(a) 頂点 $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ が G_Γ において同じ連結成分にある.
(b) $R_\Gamma\mathrm{e}(\mathbf{i}) \cong R_\Gamma\mathrm{e}(\mathbf{j})$.

G_n に対し, G_Γ において同じ連結成分にある頂点を同一視することで新たな箙を得ることができる.

イデアルを加工するため, 各連結成分から一つの頂点 $\mathbf{i}$ を選んでおく. このとき頂点 $\mathbf{i}$ は $\mathrm{e}(\mathbf{i})$ に, 矢 $y_k^{\mathbf{i}}$ は $\mathrm{e}(\mathbf{i})y_k\mathrm{e}(\mathbf{i})$ に対応する. 異なる二頂点 $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ の間にある矢については対応するものは少し複雑になる.

矢があるということは, G_n において, $\mathbf{i}$ の連結成分内の或る頂点 $\mathbf{i}'$ から $\mathbf{i}$ の連結成分内の或る頂点 $\mathbf{j}'$ への矢が存在する. これらの頂点を用い, $\mathbf{i}$ から $\mathbf{i}'$ への最短の道と, $\mathbf{i}'$ から $\mathbf{j}'$ への矢, $\mathbf{j}'$ から $\mathbf{j}$ への最短の道を繋げた道を一つ取る.

そして $\mathbf{i}$ から $\mathbf{j}$ への矢を $\mathrm{e}(\mathbf{i})\psi_\omega\mathrm{e}(\mathbf{j})$ と対応させる. ただし, ψ_ω とは G_n に於ける上記の道に沿って ψ の積を取ったものである. このとき, $\mathbf{i}'$ から $\mathbf{j}'$ への矢に対応する ψ のみが次数 1 となることに注意する.

上述の対応により R_Γ での関係式を書き換えることで, 第一の問題点は解決される. 残る問題点は関係式 $\psi_k^2\mathrm{e}(\mathbf{i}) = (y_k + y_{k+1})\mathrm{e}(\mathbf{i})$ (Γ において i_k と i_{k+1} が隣接する) から生じるものであるが, これは $y_{k+1}\mathrm{e}(\mathbf{i}) = psi_k^2\mathrm{e}(\mathbf{i}) - y_k\mathrm{e}(\mathbf{i})$ として, 対応する矢を消し, 関係式に現れる $y_{k+1}\mathrm{e}(\mathbf{i})$ も $psi_k^2\mathrm{e}(\mathbf{i}) - y_k\mathrm{e}(\mathbf{i})$ に置き換えれば解決する.

以上の手順を以て, 箙と関係による表示が得られる.

巡回 KLR 代数に関しては, 先ず以上の手順を行った後, 新たに生じうる問題を解決すれば良い. もし Λ に於いて $b_k \leq 1$ なる部分がなければ, I^{Λ} の生成元に対応する関係を加えて書き直せば良い. $b_k = 1$ なる k がある場合は, 関連する矢を消し, 関係の書き直しを行えば良い. $b_k = 0$ なる k がある場合は, 関連する頂点を消し, 関係の書き直しを行えば良いことが以下の補題から分かる.

補題 3.5. R_{Γ}^{Λ} において $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ と以下は同値.
$\lambda_{i_1} = 0$ であるか, ある k が存在し, 任意の $s < k$ に対し i_s と i_k が Γ において隣接しない.

4 補足

前節で説明された手順は具体的ではあるが, 実際に計算する場合には, 先ず頂点の決定の時点で多大な労力を要することは昨年度書いた通りである. 今回の結果が示すことは, そこから更に KLR 代数の関係式を全て書き下す必要があり, $n = 2$ の場合でも中々に大変な作業が待っているということである.

今回は [R] の定義に様々な条件を課したが, 幾つかは次数付き代数の構造が欲しいためだけの仮定であり, 次数付きでなくとも各種補題には別証明が与えられそうなので, 外すこともできると思う. その他についての条件を外すと, 特に $Q_{ij} = 1 + u + v$ というような状況となると, 箙の加工の際に難が生じるので, そこまでの一般化は難しいように思える. しかし元々次数付きとなる場合が有用ということもあり, この仮定は妥当とも言える.

またも I の元に対する非負整数値の重み付けを固定したが, 最初の一歩という位置付けとして, 非常に小さいが意義はある. 元々の動機の一つに Γ や Λ を動かした際に R_{Γ}^{Λ} が森田同値か否かに関して, 頂点の個数程度で何か良いことは言えないかというものがあったが, そもそも Γ が木だと Λ がある程度大きいと頂点の個数は一致してしまう上, それ以上の証拠を求めると今回のように莫大な計算を要するので一筋縄では行きそうにない.

重み付けに関する一般化は抽象的な議論を用いて進むほか無いようにも思える. しかし道具が整備されているのは [BK] の場合等, 非常に限られた範囲に留まっており, 先が全く見えない状態と言っても過言ではなく, その先の応用も望めない.

個人的にはこの問題に関しては自身が納得する結果まで到達できたため, ここで打ち切ってまた別の問題に取り組む所存である.

参考文献

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*, Cambridge University Press (2006).

[2] J. Brundan, A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), no.3, 451–484.

[3] M. Khovanov, A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[4] M. Khovanov, A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II*, Trans. Amer. Math. Soc. **363**(2011), 2685-2700.

[5] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, preprint 2008, arXiv:0812.5023.