数理解析研究所講究録
第1998巻 2016年 67-74

対称群とヘッケ環の次数付カルタン不変量について

(On graded Cartan invariants of symmetric groups and Hecke algebras)

東京大学大学院数理科学研究科　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*
Graduate school of Mathematical Sciences, University of Tokyo

2014年10月下旬の京都大学数理解析研究所における研究集会「組合せ論的表現論と表現論的組合せ論」での講演内容は、バーミンガム大学数学教室の Anton Evseev さんとの共同研究 [ET] に基づくものですが、本稿の文責は執筆者にあります。

1 講演内容の要約

1.1 研究背景

[KOR] において、Külshammer-Olsson-Robinson は、$\ell=p$ が素数のとき従来のそれになるように、対称群 $\mathfrak{S}_n$ の p-モジュラー表現論的不変量の ℓ-類似を一般の $\ell\geq 2$ について定義した。彼らが指標論的に定義した $\mathfrak{S}_n$ の ℓ-カルタン行列は、量子標数 $\mathsf{qchar}_q\mathbb{F}=\ell$ の A 型岩堀・ヘッケ環 $\mathcal{H}_n(\mathbb{F};q)$ のカルタン行列と $\mathbb{Z}$ 上単模同値になる [Don, §2.2]。ここで可換環 R について、行列 $X,Y\in\mathsf{Mat}_m(R)$ が R 上単模同値である（$X\equiv_R Y$ と略記する）とは、$PXQ=Y$ なる可逆行列 $P,Q\in\mathrm{GL}_m(R)$ が存在することを言う。

定義 1.1. 体上有限次元代数 A のカルタン行列 C_A は、以下で定義される。

$$C_A=([\mathsf{PC}(D):D'])_{D,D'\in\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))}\in\mathsf{Mat}_{|\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))|}(\mathbb{Z}).$$

ここで $\mathsf{Mod}(A)$ は有限次元左 A 加群の圏であり、$\mathsf{PC}(D)$ は D の射影被覆を表す。

定義 1.2. $\ell\geq 2$ について、以下、1 の原始 ℓ 乗根 η_ℓ を含む体 k_ℓ を固定する。$C_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)}$ の単因子の多重集合 $\mathsf{Smith}_{\mathbb{Z}}(C_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)})$ を対称群 $\mathfrak{S}_n$ の ℓ-（一般化）カルタン不変量と呼ぶ。

モジュラー表現論においてよく知られているように（Brauer-Nesbitt)、有限群 G と素数 p について、G の（通常の）p-カルタン不変量 $\mathsf{Smith}_{\mathbb{Z}}(C_{\overline{\mathbb{F}_p}G})$ は、G の p-正則共役類の p-不足群を用いて記述される（一方、$C_{\overline{\mathbb{F}_p}G}$ そのものを求めることは現在でも困難な問題である）。これに触発された推論 [KOR, pp.545-546] によって、彼らは $\mathsf{Smith}_{\mathbb{Z}}(C_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)})$ を次のように予想し（KOR 予想）[KOR, Conjecture 6.4]、補強材料として Brundan-Kleshchev [BK, Corollary 1] による行列式との整合性を確認した。最近、KOR 予想は Hill による帰着を証明することで、Evseev によって証明された [Evs, Theorem 1.1]。

定義 1.3. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_a)\in\mathsf{Par}$ について、$|\lambda|=\sum_{k=1}^{a}\lambda_k$、$m_k(\lambda)=|\{j\mid\lambda_j=k\}|$、$\ell(\lambda)=a$ とおく。$\mathsf{CRP}_\ell(n)=\{\lambda\mid|\lambda|=n$ かつ $\forall k\geq 1,m_{k\ell}(\lambda)=0\}$ とする。

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported in part by JSPS Kakenhi Grant 26800005.

定理 1.4 (KOR 予想 =Evseev の定理). 任意の $\ell \geq 2$, $n \geq 0$ について、以下の単模同値が存在する。

$$C_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)} \equiv_{\mathbb{Z}} \mathsf{diag}(\{r_\ell(\lambda) \mid \lambda \in \mathsf{CRP}_\ell(n)\}).$$

ここで分割 $\lambda \in \mathsf{Par}$ について、$r_\ell(\lambda) = \prod_{k \in \mathbb{N} \setminus \ell\mathbb{Z}} \ell_k^{\lfloor \frac{m_k(\lambda)}{\ell} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{m_k(\lambda)}{\ell} \rfloor !_{\pi(\ell_k)}$。ただし $\ell_k = \ell / (\ell, k)$ であり、素数全体 Primes の部分集合 Π と自然数 $m \geq 1$ について、自然数 $m_\Pi, m_{\Pi'}$ を $m = m_\Pi m_{\Pi'}$ かつ $\pi(m_\Pi) \subseteq \Pi, \pi(m_{\Pi'}) \cap \Pi = \emptyset$ と定める（$\pi(t) := \{p \in \mathsf{Primes} \mid t \in p\mathbb{Z}\}$）。

2007 年に、Khovanov-Lauda と Rouquier によって独立に、対称化可能な GCM A について、その量子群の半分 $U_v^-(A)$ を圏論化する $\mathbb{Z}$ 次数付代数の族 $R_n(A)$ が導入された（KLR 代数）。Brundan-Kleshchev と Rouquier は、$R_n(A_{\ell-1}^{(1)})$ のある斉次イデアルによる商と $\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)$（あるいは、素数 $\ell = p$ について $\mathbb{F}_\ell \mathfrak{S}_n$）が同型であることを証明した（BKR 同型）。 BKR 同型を通じて KLR 代数から輸入される次数は、Lascoux-Leclerc-Thibon-有木理論から存在が示唆されていたものであり、$\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)$（そして $\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n$）の表現論は精密化される（例えば、以下で $\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim \xrightarrow{\sim} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))$ かつ $C_A^v|_{v=1} = C_A$ となる）。

1.2 主定理と今後の課題

定義 1.5. 体上有限次元 $\mathbb{Z}$ 次数付代数 A の次数付カルタン行列 C_A^v は、以下で定義される。

$$C_A^v = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [\mathsf{PC}(D) : D'\langle -k \rangle] v^k\right)_{D, D' \in \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim} \in \mathsf{Mat}_{|\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim|}(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]).$$

ここで $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ は有限次元 $\mathbb{Z}$ 次数付左 A 加群の圏であり、$M\langle k \rangle$ は $(M\langle k \rangle)_n = M_{k+n}$ で定義され（シフト）、同値関係 $\sim$ は、$M \sim N \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, M\langle k \rangle \cong N$ を意味する。

定義 1.6. 自然数 $n \geq 0$ について、$M_n = (M_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu} \in \mathsf{Mat}_{\mathsf{Par}(n)}(\mathbb{Z})$ を以下で定める。

$$M_{\lambda,\mu} = |\{f : [1, \cdots, \ell(\mu)] \to [1, \cdots, \ell(\lambda)] \mid 1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda), \textstyle\sum_{j \in f^{-1}(i)} \mu_j = \lambda_i\}|. \tag{1}$$

以下の役割において、M_n は「$\mathfrak{S}_n$ の指標表」に置き換えてもよいのだが、M_n は予備知識なく述べられる、という利点がある（M_n は「$\mathfrak{S}_n$ の Young 加群たちの指標表」である）。

定理 1.7 ([ET, Theorem 3.10]). 任意の $\ell \geq 2$, $n \geq 0$ について、以下の $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上の単模同値が存在する。

$$C_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)}^v \equiv_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \bigoplus_{(\rho,d)} \bigoplus_{s=0}^{d} \left(M_s \, \mathsf{diag}(\{\prod_{i \geq 1} [\ell]_i^{m_i(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Par}_\ell(s)\} M_s^{-1}\right)^{\oplus |\mathsf{Par}_{\ell-2}(d-s)|}.$$

ここで、(ρ, d) は $|\rho| + \ell d = n$ なる ℓ-コア ρ と自然数 $d \geq 0$ を動く。また $\mathsf{Par}_a(b)$ は b の a 多重分割の集合であり、$[\alpha]_\beta = (v^{\alpha\beta} - v^{-\alpha\beta})/(v^\beta - v^{-\beta}) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ は量子整数である。

予想 1.8 ([ET, Conjecture 1.9]). 任意の $\ell \geq 2$, $n \geq 0$ について、以下の $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上の単模同値が存在する。

$$M_n \, \mathsf{diag}(\{\textstyle\prod_{i \geq 1} [\ell]_i^{m_i(\lambda)}\}_\lambda) M_n^{-1} \equiv_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathsf{diag}(\{\textstyle\prod_{k \in \mathbb{N} \setminus \ell\mathbb{Z}} \prod_{t=1}^{m_k(\lambda)} [\ell_k t_{\pi(\ell_k)}]_{(\ell,k) t_{\pi(\ell_k)'}}\}_\lambda).$$

定理から、予想が正しいとすると、以下が証明できる [ET, Corollary 3.17]。

$$C^{v}_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)} \equiv_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathsf{diag}(\{r^v_\ell(\lambda) \mid \lambda \in \mathsf{CRP}_\ell(n)\}). \tag{2}$$

ここで $\ell \geq 2, n \geq 0$ であり、分割 $\lambda \in \mathsf{Par}$ について $r^v_\ell(\lambda) = \prod_{k\in\mathbb{N}\setminus\ell\mathbb{Z}} \prod_{t=1}^{\lfloor m_k(\lambda)/\ell \rfloor} [\ell_k t_{\pi(\ell_k)}]_{(\ell,k)t_{\pi(\ell_k)}'}$ である（$r^v_\ell(\lambda)|_{v=1} = r_\ell(\lambda)$ となっている）。我々は、(2) が KOR 予想の正しい次数付版であると予想おり（ℓ が素数冪のときは、 [Tsu, Conjecture 6.18] で提案された）、以下の整合性を証明した。

定理 1.9 ([ET, Theorem 1.10]). 予想は以下の *(a)* または *(b)* の場合には正しい。

(a) $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ を $\mathbb{Q}[v, v^{-1}]$ に局所化した時、

(b) v に *0* でない有理数 a/b を代入した時。

(a) は安東・鈴木・山田の予想 [ASY, Conjecture 8.2] を肯定的に解決する。(b) は $v = 1$ の場合が KOR 予想 =Evseev の定理になるような、Evseev の定理の一般化になっている。

$\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ は 2 次元の環であるため、既存の技法（例えば、Brauer の指標の特徴付け定理を用いた帰着）は働かない。予想が正しければ、その証明は最近注目を集め始めた次数付表現論の進展の物差しになることを期待している。また、予想そのものが純粋に線型代数の言葉で書かれているため、他分野の方々にも興味をもっていただけることを期待する。

2 Evseev による KOR 予想の証明のあらすじ

以上のように、我々の定理は 2 つあるが、以下ではこのうち定理 1.9(b) の証明のあらすじを述べる。予想 1.8 において、$v = 1$ を代入したものは、次の命題になる。

命題 2.1 ([Hil, Conjecture 10.5]=[Evs, Theorem 3.15]). $p \geq 2$ を素数、$r \geq 1$ とする。

$$\log_p I_{p,r}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\setminus p^r\mathbb{Z}} ((r - \nu_p(n))m_n(\lambda) + \sum_{t\geq 1} \lfloor m_n(\lambda)/p^t \rfloor) \tag{3}$$

によって p の冪 $I_{p,r}(\lambda)$ を定義すると、任意の $n \geq 0$ について以下が成立する。

$$M_n\, \mathsf{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Par}(n)\}) M_n^{-1} \equiv_{\mathbb{Z}} \mathsf{diag}(\{I_{p,r}(\lambda) \mid \lambda \in \mathsf{Par}(n)\}).$$

この命題（以下、Hill 予想）は、 [Hil] 中で予想として提出されたもので（Hill 自身は $r \leq p$ という仮定でそれを証明している [Hil, §10]）、KOR 予想と同値であることが知られていた [Hil, BH]。Hill 予想は [Evs] によって証明され、我々の定理 1.9(b) の証明も [Evs] で導入されたアイデア・技巧に依っている。そこで、本稿では $v = 1$ の場合の証明のあらすじを述べる。これは、 [Evs, §x] を順に説明するを意味する（ここで $x = 4, 5$)。

以下 $p \geq 2$ を素数とし、$\mathbb{N}_{p'} := \mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus p\mathbb{Z}$ とし、$\overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$ を $\mathbb{Z}_{(p)}$ の $\mathbb{C}$ における整閉包とする。

また準備として、定義 1.6 中の $M_{\lambda,\mu}$ たちは、無限変数対称多項式環 Λ 中で

$$h_\lambda = \sum_{\mu\in\mathsf{Par}(n)} \frac{1}{z_\mu} M_{\lambda,\mu} p_\mu, \quad p_\lambda = \sum_{\mu\in\mathsf{Par}(n)} M_{\mu,\lambda} m_\mu \tag{4}$$

となっていることを注意しておく（記法等は [Ful, §6] を参照)。

2.1 [Evs, §4] の解説

2.1.1 Brauer の一般指標の特徴付け定理の適用（その 1）

2 つの集合 A, B で $A \subseteq B$ なるものについて、特性関数を $\mathsf{Char}(A \subseteq B)$ と書く。

以下、有限群 G を固定し、$g \in G$ について、$\mathsf{Conj}_G(g) = \{x^{-1}gx \mid x \in G\}$ と書くことにする。G 上の類関数としては、$\mathbb{C}$ に値を取るものを考え、G の通常既約指標の全体を $\mathsf{Irr}(G)$ と書く。

定義 2.2. G 上類関数 χ が、環 $R \subseteq \mathbb{C}$ について、*R-generalized character* である（$\chi \in R[\mathsf{Irr}(G)]$ と記す）とは、$\chi \in \sum_{\phi \in \mathsf{Irr}(G)} R\phi$ となることを言う。

定義 2.3. 有限群 E が *p-elementary* とは、E が巡回群と p 群の直積に同型なことを言う。

次は Brauer による有名な特徴付けである。

定理 2.4 ([Isa, Theorem 8.4]). G 上の類関数 χ と環 $R \subseteq \mathbb{C}$ について、$\chi \in R[\mathsf{Irr}(G)]$ であることと、任意の素数 q と任意の *q-elementary* 部分群 E について $\mathsf{Res}_E^G \chi \in R[\mathsf{Irr}(E)]$ であることは同値。

定義 2.5. G 上の類関数 χ と、G の p' 元 x と[1]、環 $R \subseteq \overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$ について、命題 $S_{G,p}(\chi, x, R)$ を次のように設定する：

$$\begin{aligned} S_{G,p}(\chi, x, R) : &\text{任意の } p\text{-部分群 } P \subseteq C_G(x) \text{ について、} \\ &\mathsf{Res}_P^x \chi := (P \to \mathbb{C}, y \mapsto \chi(yx)) \in R[\mathsf{Irr}(P)] \text{ が成立する。} \end{aligned}$$

系 2.6. G 上類関数 χ と環 $R \subseteq \overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$ について、命題 $S_{G,p}(\chi, x, R)$ が任意の p' 元 $x \in G$ について成り立つならば、χ は $\overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$-*generalized character* である。

証明. 任意の $E = Q \times P \subseteq G$ について（ここで P は p 群で、Q は $|Q| \notin p\mathbb{Z}$ なる群）、$\mathsf{Res}_E^G \chi = \sum_{q \in (Q/\equiv_Q)} \mathsf{Char}(\mathsf{Conj}_Q(q) \subseteq Q) \otimes \mathsf{Res}_P^q \chi$ となることは簡単に確かめられる（ここで $x \equiv_Q y :\Leftrightarrow \mathsf{Conj}_Q(x) = \mathsf{Conj}_Q(y)$）。$\mathsf{Char}(\mathsf{Conj}_Q(q) \subseteq Q) \in \mathbb{Z}[\sqrt[|Q|]{1}, \frac{1}{|Q|}][\mathsf{Irr}(Q)] \subseteq \overline{\mathbb{Z}_{(p)}}[\mathsf{Irr}(Q)]$ は易しい。 □

2.1.2 Hill 予想のさらなる帰着

単位的可換環 R と、2 つの $m \times m$ 行列 $X, Y \in \mathsf{Mat}_m(R)$ について、X と Y が R 上行同値であるとは、ある可逆行列 $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ が存在して $X = PY$ となることを言う。

定義 2.7. $d \geq 0$ と $\nu \in \mathsf{CRP}_p(d)$ について、$\mathsf{Par}_p(d, \nu) \subseteq \mathsf{Par}(d)$ を以下で定義する。

$$\mathsf{Par}_p(d, \nu) = \{\lambda \in \mathsf{Par}(d) \mid \forall j \in \mathbb{N}_{p'}, \sum_{n \geq 0} m_{jp^n}(\lambda) p^n = m_j(\nu)\}.$$

定義 2.8. $d \geq 0$ について、$N_d = M_d|_{\mathsf{Pow}_p(d) \times \mathsf{Pow}_p(d)}$ とし、$L_d = \bigoplus_{\nu \in \mathsf{CRP}_p(d)} \bigotimes_{j \in \mathbf{N}_{p'}} N_{m_j(\nu)}$ とする。ここで以下の *2* つの組み合わせによって、$L_d \in \mathsf{Mat}_{\mathsf{Par}(d)}(\mathbb{Z})$ と思うことにする。

- $\mathsf{Par}(d) = \bigsqcup_{\nu \in \mathsf{CRP}_p(d)} \mathsf{Par}_p(d, \nu)$,
- $\mathsf{Par}_p(d, \nu) \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in \mathbf{N}_{p'}} \mathsf{Pow}_p(m_j(\nu)), \lambda \mapsto (\lambda^{(j)})_{j \in \mathbf{N}_{p'}}$ （ただし $m_{p^n}(\lambda^{(j)}) = m_{jp^n}(\lambda)$）.

定理 2.9 ([Evs, Lemma 4.8]). 任意の $d \geq 0$ について、M_d と L_d は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上行同値である。

---

[1] $x = x_{p'}$ となる元のこと。ここで $x_{p'}$ は「$\mathrm{ord}_G(x_{p'}) \notin p\mathbb{Z}, \mathrm{ord}_G(x/x_{p'}) \in p^{\mathbf{N}}$」で特徴付けられる $\langle x \rangle$ の唯 1 つの元。

証明. M_d は上三角行列なので $\det M_d$ は簡単に計算でき、特に $\det M_d = \det L_d$ が分かる。これと $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$ より、ある $P \in \mathsf{Mat}_{\mathsf{Par}(d)}(\overline{\mathbb{Z}_{(p)}})$ が存在して $L_d = PM_d$ となることを示せばよい。[Ful, Corollary of Lemma 3] より M_d と $(\chi(C_\mu))_{\mathsf{Irr}(\mathfrak{S}_d)\times\mathsf{Par}(d)}$ は $\mathbb{Z}$ 上行同値である。各 $\gamma \in \mathsf{Par}(d)$ について、L の γ 行を $\mathfrak{S}_d$ 上の類関数と思って ξ_γ と書いたとき、任意の $\eta \in \mathsf{CRP}_p(d)$ と $g_\eta \in C_\eta$ について、命題 $S_{\mathfrak{S}_d,p}(\xi_\gamma, g_\eta, \mathbb{Z})$ が成り立つことを言えるので [2]、系 2.6 より $\xi_\gamma \in \overline{\mathbb{Z}_{(p)}}[\mathsf{Irr}(\mathfrak{S}_d)]$ が言える。 [Ful, Corollary of Lemma 3] より M_d と $(\chi(C_\mu))_{\mathsf{Irr}(\mathfrak{S}_d)\times\mathsf{Par}(d)}$ は $\mathbb{Z}$ 上行同値である。 □

前述の全単射 $\mathsf{Par}_p(d,\nu) \xrightarrow{\sim} \prod_{j\in\mathbb{N}_{p'}} \mathsf{Pow}_p(m_j(\nu))$ において $\lambda \mapsto (\lambda^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_{p'}}$ となっているとき、$\ell(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}_{p'}} \ell(\lambda^{(j)})$ は明らかである。よって $L_d \operatorname{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Par}(d)\})L_d^{-1} (\equiv_{\mathbb{Z}_{(p)}} M_d \operatorname{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Par}(d)\})M_d^{-1})$ は、次と同一視される。

$$\bigoplus_{\nu\in\mathsf{CRP}_p(d)} \bigotimes_{j\in\mathbb{N}_{p'}} (N_{m_j(\nu)} \operatorname{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(m_j(\nu))\})N_{m_j(\nu)}^{-1}).$$

$\log_p I_{p,r}(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}_{p'}} \log_p I_{p,r}(\lambda^{(j)})$ も確かめられる [3] ので、任意の $w \geq 0$ について

$$N_w \operatorname{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(w)\})N_w^{-1} \equiv_{\mathbb{Z}_{(p)}} \{I_{p,r}(\lambda) \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(w)\} \tag{5}$$

が言えたとすると、Hill 予想は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上で示されたことになる。(3) の左辺は整数成分行列でかつ行列式が p の冪だから、Hill 予想を言うには、以下が言えればよいことが結論された。

定理 2.10 ([Evs, Theorem 4.9]). 素数 $p \geq 2$ と、$r \geq 1, w \geq 0$ について、*(5)* が成立する。

2.2 [Evs, §5] の解説（定理 2.10 の証明）

2.2.1 Brauer の一般指標の特徴付け定理の適用（その 2）

定義 2.11 ([Evs, §4]). R を単位的可換環、I を有限集合とする。$A \in \mathsf{Mat}_I(R)$ について、$i \in I$ での行ベクトルを $A_i = (A_{ij})_{j\in I} \in R^I$ と書く。集合の分割 $I = \bigsqcup_\lambda I_\lambda$ について、A が *split* するとは、任意の λ について $\pi_{I_\lambda}(\sum_{i\in I} RA_i) \subseteq \sum_{i\in I} RA_i$ となることを言う。ここで $\pi_{I_\lambda} : R^I \to R^{I_\lambda} \subseteq R^I = R^{I_\lambda} \bigoplus R^{I\setminus I_\lambda}$ は、R^{I_λ} への、$R^{I\setminus I_\lambda}$ に沿った射影子である。

次は明らかである。

補題 2.12 ([Evs, Lemma 4.5]). 定義 *2.11* の設定で、さらに I の適当な全順序について A が上三角（あるいは下三角）になっていると仮定すると、A と $\bigoplus_\lambda A|_{I_\lambda\times I_\lambda}$ は R 上行同値である。

以下は、Brauer の一般指標の特徴付け定理の応用としてよく知られている。

補題 2.13 ([Isa, Lemma 8.19]). 有限群 G の p' 元 $x \in G$ について、その *p'-section* を $\mathsf{Sec}_{p'}(x) = \{y \in G \mid y_{p'} \equiv_G x\}$ とすると、特性関数 $\mathsf{Char}(\mathsf{Sec}_{p'}(x) \subseteq G)$ は $\overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$*-generalized character* である。

系 2.14. 有限群 G の p' 元 $x \in G$ と既約指標 $\chi \in \mathsf{Irr}(G)$ について、$\chi|_{\mathsf{Sec}_{p'}(x)} := \chi \cdot \mathsf{Char}(\mathsf{Sec}_{p'}(x) \subseteq G)$ は $\overline{\mathbb{Z}_{(p)}}$*-generalized character* である。

---

[2] 要点は $\mathsf{Res}_P^{g_\eta} \xi_\gamma$ が $\chi_{\mathsf{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda'}}^{\mathfrak{S}_{d'}} \mathbb{Q}}$ たちを用いて明示的に書けることにあるが、詳細は略。

[3] $\log I_{p,r} = \sum_{n\geq 1}$（適当な $m_n(\lambda)$ と $\nu_p(n)$ のみに依る関数）の形をしているからである。

定義 2.15. $d \geq 0$ について、$\mathsf{Par}(d) = \bigsqcup_{\nu \in \mathsf{CRP}_p(d)} \mathsf{Par}_p(d,\nu)$ に沿って、

$$\widehat{M}_d = \bigoplus_{\nu \in \mathsf{CRP}_p(d)} M_d|_{\mathsf{Par}_p(d,\nu) \times \mathsf{Par}_p(d,\nu)}$$

とする（M_d の定義は定義 *1.6* を参照)。

系 2.16. 任意の $d \geq 0$ について、M_d は $\widehat{M}_d$ と $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上行同値である。

証明. $\nu \in \mathsf{CRP}_p(d)$ と $g_\nu \in C_\nu$ について、$\mathsf{Sec}_{p'}(g_\nu) = \bigsqcup_{\mu \in \mathsf{Par}_p(d,\nu)} C_\mu$ であることと、M_d と $(\chi(C_\mu))_{\mathsf{Irr}(\mathfrak{S}_d) \times \mathsf{Par}(d)}$ は $\mathbb{Z}$ 上行同値であることを思い出そう。 □

系 2.17 ([Evs, Lemma 5.1]). 任意の $d \geq 0$ について、N_d は $({}^{tr}N_d)^{-1}\,\mathsf{diag}(\{z_\lambda \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(d)\})$ と $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上行同値である。

証明. $\{h_\lambda \mid \lambda \in \mathsf{Par}(d)\}$ と $\{m_\lambda \mid \lambda \in \mathsf{Par}(d)\}$ は、共に $\varprojlim_{m \geq 0} \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]_d^{\mathfrak{S}_m}$ の $\mathbb{Z}$ 基底であることを思い出す [Ful, §6,Proposition 1] と、(4) より $M_d \equiv_{\mathbb{Z}} ({}^{tr}M_d)^{-1}\,\mathsf{diag}(\{z_\lambda \mid \lambda \in \mathsf{Par}(d)\})$ が分かる。$\mathsf{Pow}_p(d) = \mathsf{Par}_p(d, (1^d))$ に注意すると、系 2.16 から従う。 □

2.2.2 射影 $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ を用いたさらなる細分

定義 2.18. $\lambda \in \mathsf{Pow}_p$ について、$\lambda^{<r}, \lambda^{\geq r}, \overline{\lambda} \in \mathsf{Pow}_p$ を、それぞれ

$$m_{p^i}(\lambda^{<r}) = \begin{cases} m_{p^i}(\lambda) & (i < r) \\ 0 & (i \geq r), \end{cases} \quad m_{p^i}(\lambda^{\geq r}) = m_{p^{r+i}}(\lambda), \quad m_{p^i}(\overline{\lambda}) = \begin{cases} m_{p^i}(\lambda) & (i < r) \\ \sum_{j \geq r} p^{j-r} m_{p^j}(\lambda) & (i = r) \\ 0 & (i > r), \end{cases}$$

と定め、対角行列 $b_w, z_w, \widetilde{y}_w, x_w^{<r}, x_{\overline{w}}^{\geq r}, y_w^{<r}, y_{\overline{w}}^{\geq r} \in \mathsf{Mat}_{\mathsf{Pow}_p(w)}(\mathbb{Z})$ を以下で定める。

$$\begin{aligned} &b_w = \mathsf{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)}\}_\lambda), \quad z_w = \mathsf{diag}(\{z_\lambda\}_\lambda), \quad \widetilde{y}_w = \mathsf{diag}(\{\textstyle\prod_{i \geq r} p^{r m_{p^i}(\lambda)}\}_\lambda), \\ &x_w^{<r} = \mathsf{diag}(\{x_{\lambda^{<r}}\}_\lambda), \quad x_{\overline{w}}^{\geq r} = \mathsf{diag}(\{x_{\lambda^{\geq r}}\}_\lambda), \quad y_w^{<r} = \mathsf{diag}(\{y_{\lambda^{<r}}\}_\lambda), \quad y_{\overline{w}}^{\geq r} = \mathsf{diag}(\{y_{\lambda^{\geq r}}\}_\lambda). \end{aligned}$$

ここで λ はすべての $\lambda \in \mathsf{Pow}_p(w)$ を走る。また $\mu \in \mathsf{Par}$ について、$z_\mu = \prod_{i \geq 1} m_i(\mu)! \cdot i^{m_i(\mu)}$ であったが、これを $x_\mu = \prod_{i \geq 1} m_i(\mu)!$ と $y_\mu = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)}$ を導入することで $z_\mu = x_\mu y_\mu$ と分けた。$z_w = x_w^{<r} x_{\overline{w}}^{\geq r} y_w^{<r} y_{\overline{w}}^{\geq r} \widetilde{y}_w$ となっていることに注意しよう。

定義 2.19. $C_w \in \mathsf{Mat}_{\mathsf{Pow}_p(w)}(\mathbb{Z})$ を以下で定める。

$$(C_w)_{\lambda,\mu} = \begin{cases} (N_{|\lambda^{\geq r}|})_{\lambda^{\geq r}, \mu^{\geq r}} & (\overline{\lambda} = \overline{\mu}) \\ 0 & (\overline{\lambda} \neq \overline{\mu}). \end{cases}$$

定義 2.20. $\mathcal{K} \subseteq \mathsf{Pow}_p$ を $\mathcal{K} = \{\lambda \in \mathsf{Pow}_p \mid \overline{\lambda} = \lambda\}$ と定める。また $\kappa \in \mathcal{K}_w := \mathsf{Pow}_p(w) \cap \mathcal{K}$ について、$\mathsf{Pow}_p(w,\kappa) = \{\lambda \in \mathsf{Pow}_p(w) \mid \overline{\lambda} = \kappa\}$ と定める。

$\mathsf{Pow}_p(w) = \bigsqcup_{\kappa \in \mathcal{K}_w} \mathsf{Pow}_p(w,\kappa)$ でかつ、$\mathsf{Pow}_p(w,\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Pow}_p(m_{p^r}(\kappa)), \lambda \mapsto \lambda^{\geq r}$ であることに注意すると、系 2.17 よりある $S_w \in \mathrm{GL}_{\mathsf{Pow}_p(w)}(\mathbb{Z}_{(p)})$ が存在して、$({}^{tr}C_w)^{-1} x_{\overline{w}}^{\geq r} y_{\overline{w}}^{\geq r} = S_w C_w$ となる。

さて (5) を証明するには、系 2.17 より、$Y'_w := N_w \operatorname{diag}(\{p^{r\ell(\lambda)} \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(w)\}) z_w^{-1\mathrm{tr}} N_w$ について $Y'_w \equiv_{\mathbb{Z}_{(p)}} \{I_{p,r}(\lambda) \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(w)\}$ を言えばよい。$A_w = N_w C_w^{-1}$ とすると、

$$\begin{aligned} Y'_w &= A_w C_w b_w (x_w^{<r} x_w^{\geq r} y_w^{<r} y_w^{\geq r} \widetilde{y}_w)^{-1\mathrm{tr}} C_w{}^{\mathrm{tr}} A_w \\ &= A_w C_w b_w \widetilde{y}_w^{-1} (x_w^{<r})^{-1} (y_w^{<r})^{-1} ({}^{\mathrm{tr}}C_w{}^{-1} x_w^{\geq r} y_w^{\geq r})^{-1\mathrm{tr}} A_w \\ &= A_w (b_w \widetilde{y}_w^{-1}) (x_w^{<r})^{-1} (y_w^{<r})^{-1} S_w^{-1\mathrm{tr}} A_w \end{aligned}$$

となる。ここで $b_w \widetilde{y}_w^{-1}, x_w^{<r}, y_w^{<r}$ は、どれも $\mathsf{Pow}_p(w,\kappa) \times \mathsf{Pow}_p(w,\kappa)$ に制限するとスカラー行列なので（$\kappa \in \mathcal{K}_w$）、C_w と可換である。今、$U_w = (x_w^{<r})^{-1} A_w$ とすると、$x_w^{<r}$ と S_w は可換なので、

$$Y'_w = x_w^{<r} U_w (b_w \widetilde{y}_w^{-1}) (x_w^{<r})^{-1} (y_w^{<r})^{-1} (S_w^{-1\mathrm{tr}} U_w S_w) x_w^{<r} S_w^{-1}$$

となる。よって $V_w := S_w^{-1\mathrm{tr}} U_w S_w$ とし、

$$Y''_w := x_w^{<r} U_w (b_w \widetilde{y}_w^{-1}) (x_w^{<r})^{-1} (y_w^{<r})^{-1} V_w x_w^{<r} \equiv_{\mathbb{Z}_{(p)}} \{I_{p,r}(\lambda) \mid \lambda \in \mathsf{Pow}_p(w)\} \tag{6}$$

が成り立つことを示せばよい。

2.2.3 LU 分解を用いたトリック

ここでもしも U_w と V_w が単位行列であれば、任意の $\lambda \in \mathsf{Pow}_p$ について

$$\begin{aligned} &\nu_p(x_{\lambda^{<r}} p^{r\ell(\lambda)} (\textstyle\prod_{i \geq r} p^{rm_{p^i}(\lambda)})^{-1} x_{\lambda^{<r}}^{-1} y_{\lambda^{<r}}^{-1} x_{\lambda^{<r}}) \\ &= \nu_p(p^{r\ell(\lambda)} (\textstyle\prod_{i \geq r} p^{rm_{p^i}(\lambda)})^{-1} x_{\lambda^{<r}} y_{\lambda^{<r}}^{-1}) = \log_p I_{p,r}(\lambda) \end{aligned}$$

なので、(6) が言える。不思議なことに、U_w と V_w がそうでなくても、Y'' の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の単因子が変わらないことを証明できる。そのためには以下の一般的な線型代数の補題を適用する。その証明では LU 分解が役割を果たす、とだけここでは述べるに留める。

補題 2.21 ([Evs, Lemma 5.6]). R を離散付値環、K をその商体、$\nu : K^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ をその付値環が R になる離散付値とする。有限集合 I と、行列 $P, Q \in \mathrm{GL}_I(K)$ と対角行列 $s = \operatorname{diag}(\{s_i\}_{i\in I}), t = \operatorname{diag}(\{t_i\}_{i\in I}), u = \operatorname{diag}(\{u_i\}_{i\in I}) \in \mathrm{GL}_I(K)$ で、$stu, sPtQu \in GL_I(R)$ なるものについて [4]、適当な $(\alpha_i)_{i\in I}, (\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{Q}^I$ が存在して、以下の *2* 条件が満たされるとき、$stu \equiv_R sPtQu$ が成立する。

(i) $\nu(t_i) = \alpha_i - \beta_i$, $\nu(P_{ij} - \delta_{ij}) > \alpha_i - \alpha_j$, $\nu(Q_{ij} - \delta_{ij}) > \beta_i - \beta_j$,

(ii) $\rho_i \geq \rho_j$ ならば、$\alpha_i - \alpha_j \geq \nu(s_j) - \nu(s_i)$ かつ $\beta_j - \beta_i \geq \nu(u_j) - \nu(u_i)$,

ここで $\rho_i = \nu(s_i) + \nu(t_i) + \nu(u_i)$ とし、$\nu(0) = \infty$ と約束する [5]。

定義 2.22. $\lambda \in \mathsf{Pow}_p$ について、$e_\lambda = \nu_p(x_{\lambda^{<r}}), f_\lambda = \nu_p(p^{r\ell(\lambda)} (\prod_{i \geq r} p^{rm_{p^i}(\lambda)})^{-1} y_{\lambda^{<r}}^{-1})$ とし、$k_\lambda = f_\lambda - e_\lambda$ とする（$f_\lambda + e_\lambda = \log_p I_{p,r}(\lambda)$ に注意）。

(6) の設定で、$I = \mathsf{Pow}_p(w), s = x_w^{<r}, t = (b_w \widetilde{y}_w^{-1})(x_w^{<r})^{-1}(y_w^{<r})^{-1}, u = x_w^{<r}, P = U_w, Q = V_w$ とし、$\alpha_\lambda = k_\lambda/2, \beta_\lambda = -k_\lambda/2$ として、補題 2.21 を適用する。α_λ と β_λ の選択が、補題 2.21 の仮定を満たしていることは、以下から示すことができる。

---

[4] この条件は [Evs, Lemma 5.6] では仮定されていないが、思考の節約のために仮定する。

[5] もちろん $a \in \mathbb{Q}$ について、$a + \infty = \infty + a = \infty$ かつ $\infty > a$ と約束する。

命題 2.23 ([Evs, Lemma 5.4]). 任意の $w \geq 0$ と、任意の $\lambda, \mu \in \mathrm{Pow}_p(w)$ について、次が成り立つ。

(i) $(U_w)_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}_{(p)}$,

(ii) $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ ならば $(U_w)_{\lambda,\mu} = \delta_{\lambda,\mu}$,

(iii) $\overline{\lambda} \neq \overline{\mu}$ ならば $\nu_p((U_w)_{\lambda,\mu}) > k_\lambda - k_\mu$.

この命題は、集合 $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ の定義（(1) 式）の意味を考えながら初等的になされるが、詳細は [Evs] を参照されたい。以上が Evseev による、KOR 予想の証明の概略である。

3 最後に

講演の機会を与えてくださった沼田泰英さんに感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

[ASY] M. Ando, T. Suzuki and H-F. Yamada, *Combinatorics for graded Cartan matrices of the Iwahori-Hecke algebra of type A*, Ann.Comb. **17** (2013), 427–442.

[BH] C. Bessenrodt and D. Hill, Cartan invariants of symmetric groups and Iwahori-Hecke algebras, J. Lond. Math. Soc. **81** (2010), 113–128.

[BK] J. Brundan and A. Kleshchev, *Cartan determinants and Shapovalov forms*, Math.Ann. **324** (2002), 431–449.

[Don] S. Donkin, *Representations of Hecke algebras and characters of symmetric groups*, Studies in memory of Issai Schur, 49–67, Progr.Math., **210**, Birkhaüser Boston, Boston, MA, 2003.

[ET] A. Evseev and S. Tsuchioka, *On graded Cartan invariants of symmetric groups and Hecke algebras*, arXiv:1503.00921v1.

[Evs] A. Evseev, *Generalised Cartan invariants of symmetric groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 2823–2851.

[Ful] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Hil] D. Hill, *Elementary divisors of the Shapovalov form on the basic representation of Kac-Moody algebras*, J.Algebra **319** (2008), 5208–5246.

[Isa] M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, New York-London, 1976.

[KOR] B. Külshammer, J. Olsson and G. Robinson, *Generalized blocks for symmetric groups*, Invent.Math. **151** (2003), 513–552.

[Tsu] S. Tsuchioka, *Graded Cartan determinants of the symmetric groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 2019–2040.