

# 正則分割の組合せ論

## Combinatorics of Regular Partitions

水川 裕司\* - 山田 裕史†

Hiroshi Mizukawa and Hiro-Fumi Yamada

### 1 $r$ -正則分割と $r$ -類正則分割

整数  $n$  の分割  $\lambda$  に対して,  $m_i(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を  $\lambda$  における  $i$  の重複度とする.

**Definition 1.1** (正則分割)...

- (1)  $\lambda$  が  $r$ -正則分割とは, 全ての  $i \geq 1$  に対して  $m_i(\lambda) < r$  が成り立つことである.
- (2)  $\lambda$  が  $r$ -類正則分割とは, 全ての  $i \geq 1$  に対して  $m_{ri}(\lambda) = 0$  が成り立つことである.

$r$  が素数の時,  $r$ -正則分割は対称群の既約な  $r$ -モジュラー表現の自然な添字集合であり,  $r$ -類正則分割は  $r$ -正則類のサイクルタイプであることがこれらの名前の由来である.

**Example 1.2.**  $\lambda = (4, 2, 2, 1)$  は 3-正則分割だが, 2-正則分割ではない. 5 の分割で 3-類正則なものは,

$$(5), (41), (2^21), (21^3), (1^5)$$

の 5 つである.

---

\* 防衛大学校 総合教育学群 mzh@nda.ac.jp

† 岡山大学 理学部 yamada@math.okayama-u.ac.jp

Classification number :Primary: 05E10; Secondary:05E05.

The first author was supported by KAKENHI 24740033. The second author was supported by KAKENHI 24540020.

以下  $\lambda$  は  $n$  の分割のとき,  $\lambda \vdash n$  と表す. そして,

$$RP_{r,n} = \{\lambda \vdash n \mid r\text{-正則分割}\},$$

$$CP_{r,n} = \{\lambda \vdash n \mid r\text{-類正則分割}\}$$

と置く. このとき, 次の事実は基本的である.

**Proposition 1.3.**

$$\#RP_{r,n} = \#CP_{r,n}.$$

## 2 対称群の (通常) 指標表の行列式

### 2.1 James の教科書から

$T_n = [\chi_\rho^\lambda]_{\lambda, \rho \vdash n}$  を対称群  $S_n$  の通常指標表とする. 次は James の教科書 [3] にある問題である.

**問題 2.1** ([3]).  $|\det T_n|$  を求めよ.

ここで, 絶対値は表現や共役類の並べ方を無視するためにつけているのであって, 本質的ではない. そして, この問題の答えは,  $n$  の全ての分割たちの和因子の積で与えられる, つまり

$$|\det T_n| = \prod_{\rho \vdash n} \prod_{i \geq 1} \rho_i$$

である.  $n$  が小さいほうから幾つかみると,

$n$	1	2	3	4	5
$\det T_n$	1	2	6	96	2880

となっている. ここで例えば,  $n = 5$  なら, 5 の 7 つの分割を用いて,

$$2880 = 5 \times (4 \times 1) \times (3 \times 2) \times (3 \times 1^2) \times (2^2 \times 1) \times (2 \times 1^3) \times (1^5)$$

が確かめられる. 指標の第二直交定理から,

$$\sum_{\lambda \vdash n} \chi_\rho^\lambda \chi_\sigma^\lambda = z_\rho \delta_{\rho\sigma}$$

であるから (ここで,  $z_\rho = \prod_{i \geq 1} m_i(\rho)! \times \prod_{i \geq 1} \rho_i$ ),

$$(\det T_n)^2 = \prod_{\rho \vdash n} \prod_{i \geq 1} m_i(\rho)! \times \prod_{\rho \vdash n} \prod_{i \geq 1} \rho_i$$

が従う。つまり,

$$\prod_{\rho \vdash n} \prod_{i \geq 1} m_i(\rho)! = \prod_{\rho \vdash n} \prod_{i \geq 1} \rho_i$$

が示されれば, 問題 2.1 が解けるということである。

## 2.2 Olsson による $r$ -正則版

問題 2.1 をどう解くかは一旦放っておいて Olsson によるこの問題の一般化を考えよう。Olsson ([6]) で考えられたのは次の問題である。

**問題 2.2** ([6]).

$$T_n^{(r)} = [\chi_\rho^\lambda]_{\lambda \in RP_{r,n}, \rho \in CP_{r,n}}$$

としたときの行列式

$$|\det T_n^{(r)}|$$

を求めよ。

この問題は  $r$  を十分大きく取ることにより前節の問題を含むことに注意しよう。答えは次の様になる。

**Theorem 2.3** ([6]).

$$|\det T_n^{(r)}| = \prod_{\rho \in CP_{r,n}} \prod_{i \geq 1} \rho_i.$$

この定理の証明は Olsson によるもの [1, 6] と Bessenrodt-Olsson-Stanley[2] による Hall-Littlewood 対称関数を用いたものがあるが, ここでは後者を紹介しよう。

はじめに対称関数  $f$  に対して, その  $r$ -被約を

$$f^{(r)} = f|_{p_r=p_{2r}=p_{3r}=\dots=0}$$

と定義する。そして, Schur 関数  $s_\lambda$  と冪和対称関数  $p_\rho$  さらに Lascoux-Lelerc-Thibon[4] により導入された変形 Hall-Littlewood の  $Q$  関数でパラメータ  $t$  を 1 の原始  $r$ -乗根  $\zeta$  と

おいたもの  $Q'_\lambda$  に対して,

$$\begin{cases} s^{(r)} = (s_\lambda^{(r)})_{\lambda \in RP_{r,n}} \\ p^{(r)} = (p_\rho^{(r)})_{\lambda \in CP_{r,n}} \\ Q'^{(r)} = (Q'_\lambda^{(r)})_{\lambda \in RP_{r,n}} \end{cases}$$

と置こう. 実はこれらは全て  $\Lambda^{(r)} = Q(\zeta)[p_i \mid i \not\equiv 0 \pmod{r}]$  の  $n$  次斉次部分の基底になっている事に注意する. これらの間の変換行列

$$M(s^{(r)}, p^{(r)}) = M(s^{(r)}, Q'^{(r)})M(Q'^{(r)}, p^{(r)})$$

を考える. このとき次が成り立つ.

**Theorem 2.4** ([2]).

$$|\det M(s^{(r)}, Q'^{(r)})| = 1, \quad |\det M(Q'^{(r)}, p^{(r)})| = r^{c_{r,n}}.$$

ここで,  $c_{r,n}$  は

$$\prod_{n \geq 1} \frac{1 - q^{rn}}{1 - q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{rk}}{1 - q^{rk}} = \sum_{n \geq 0} c_{r,n} q^n$$

で与えられる.

これと次の定理より, Olsson の問題 (したがって James の問題も) 解ける.

**Theorem 2.5** ([6]).

$$\prod_{\rho \in CP_{r,n}} \prod_{i \geq 1} m_i(\rho)! = r^{c_{r,n}} \prod_{\rho \in CP_{r,n}} \prod_{i \geq 1} \rho_i.$$

### 3 類正則分割の組合せ論

では定理 2.5 はどのように示すのであろうか? ここではその一つの方法を与えよう.

ここでは  $r$ -類正則分割のみを扱うことを注意しておく. まず,

$$\begin{cases} V_{r,j,n} = \sum_{\rho \in CP_{r,n}} m_j(\rho) \\ W_{r,j,n} = \sum_{\rho \in CP_{r,n}} \#\{i \mid m_i(\rho) \geq j\} \end{cases}$$

とおく. 次の例を見てみよう.

**Example 3.1.**  $r = 3, n = 5$  のとき 3-類正則分割とその重複度の階乗の積を表にしてみると,

$$\frac{\rho \quad \parallel \quad 5 \quad 41 \quad 2^2 1 \quad 2 1^3 \quad 1^5}{\prod m_i(\rho)! \quad \parallel \quad 1 \quad 11 \quad 211 \quad 3211 \quad 54321}$$

となる. この表の上段と下段に現れる  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  の個数が  $V_{r,j,n}$  と  $W_{r,j,n}$  である. それを表にすると

$$\begin{array}{c|ccccc} j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline V_{3,j,5} & 10 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ \hline W_{3,j,5} & 8 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

となる. 同じことを  $n = 10$  でもやってみると,

$$\begin{array}{c|cccccccccc} j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline V_{3,j,10} & 60 & 27 & 0 & 9 & 6 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline W_{3,j,10} & 46 & 23 & 13 & 9 & 6 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

となる.

つぎの定理が成り立つ.

**Theorem 3.2.**  $j$  が  $r$  の倍数ではない時,

$$V_{r,j,n} = \sum_{i \geq 0} W_{r,r^i j, n}$$

が成立する. また,

$$c_{r,n} = \sum_{j \neq 0 \pmod{r}} \sum_{i \geq 1} i W_{r,r^i j, n}$$

が成立する.

この定理より, 比較的容易に前節の定理 2.5 が示される.

**Example 3.3.** 先ほど  $n = 10$  の例では確かに

$$60 = 46 + 13 + 1, \quad 27 = 23 + 4$$

などが成り立っている.

#### 4 $(r, s)$ -類正則分割の組合せ論

ここでは、 $(r, s) = 1$  なる正整数  $r, s$  を考える。

**Definition 4.1.** (1)  $\rho \vdash n$  が  $(r, s)$ -類正則分割であるとは、 $m_{rj}(\rho) = m_{sj}(\rho) = 0$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすことである。

(2)  $n$  の  $(r, s)$ -類正則分割全体を  $CP_{(r,s),n}$  と置く。

$(r, s)$ -類正則分割の母関数は次で与えられる:

$$\Phi_{(r,s)}(q) = \prod_{n \geq 1} \frac{(1 - q^{rn})(1 - q^{sn})}{(1 - q^n)(1 - q^{rsn})} = \sum_{n \geq 0} |CP_{(r,s),n}| q^n.$$

これを变形すると

$$\begin{aligned} \Phi_{(r,s)}(q) &= \prod_{n \geq 1} \frac{1 + q^n + q^{2n} + \dots + q^{(r-1)n}}{1 + q^{sn} + q^{2sn} + \dots + q^{(r-1)sn}} \\ &= \prod_{n \geq 1} \frac{1 + q^n + q^{2n} + \dots + q^{(s-1)n}}{1 + q^{rn} + q^{2rn} + \dots + q^{(s-1)rn}} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n q^n. \end{aligned}$$

となる、ここで、 $a_n$  は  $n$  の分割で  $r$ -正則かつ  $s$ -類正則なもの個数、または  $s$ -正則かつ  $r$ -類正則なもの個数を表すことがわかるだろう。

前節と同様に

$$\begin{cases} V_{(r,s),j,n} &= \sum_{\rho \in CP_{(r,s),n}} m_j(\rho) \\ W_{(r,s),j,n} &= \sum_{\rho \in CP_{(r,s),n}} \#\{i \mid m_i(\rho) \geq j\} \end{cases}$$

と置く。

**Theorem 4.2** ([5]). (1)  $j$  が  $r$  の倍数でも  $s$  の倍数でもない時、

$$V_{(r,s),j,n} = \sum_{i,k \geq 0} W_{(r,s),r^i s^k j, n}$$

が成立する。

(2)

$$\prod_{\rho \in CP_{(r,s),n}} \prod_{i \geq 1} m_i(\rho)! = r^{\tilde{c}_{r,n}} s^{\tilde{c}_{s,n}} \prod_{\rho \in CP_{(r,s),n}} \prod_{i \geq 1} \rho_i$$

ここで,

$$\Phi_{(r,s),n}(q) \left( \sum_{n \geq 0} \left( \frac{q^{rn}}{1 - q^{rn}} - \frac{q^{rsn}}{1 - q^{rsn}} \right) \right) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_{r,n} q^n$$

とする.

(3)

$$\begin{cases} \tilde{c}_{r,n} = \sum_{j \not\equiv 0 \pmod{r,s}} \sum_{i,k \geq 1} i W_{r,r^i s^k j, n}, \\ \tilde{c}_{s,n} = \sum_{j \not\equiv 0 \pmod{r,s}} \sum_{i,k \geq 1} k W_{r,r^i s^k j, n}. \end{cases}$$

が成立する.

次の例で定理の (1) をみてみよう.

**Example 4.3.**  $n = 10$  のとき,  $(2, 3)$ -類正則な分割は

$$1^{10}, 51^5, 5^2, 71^3$$

の4つである. したがって,

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_{(2,3),j,10}$	18	0	0	0	3	0	1	0	0	0
$W_{(2,3),j,10}$	6	4	3	2	2	1	1	1	1	1

を得る. この中段と下段を比べることにより,

$$18 = 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1$$

を得る.

### 参考文献

[1] C. Bessenrodt and J. B. Olsson, Submatrices of character tables and basic sets, J. Combinatorial Th. Ser. A no. 119 (2012), 1774-1788.

- [2] C. Bessenrodt, J. B. Olsson and R. Stanley, Properties of some character tables related to the symmetric groups, *J. Algebraic Combin.* 21 (2005), no. 2, 163-177.
- [3] G. James, The representation theory of the symmetric groups, *Lecture notes in mathematics* 682, Springer-Verlag 1978.
- [4] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon Fonctions de Hall-Littlewood et polynômes de Kostka-Foulkes aux racines de l'unité., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 316 (1993), no.1, 1-6.
- [5] H. Mizukawa and H.-F. Yamada, Combinatorics of regular partitions, [arXiv:1408.4866 \[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/1408.4866).
- [6] J. B. Olsson, Regular character tables of symmetric groups, *Electron. J. Combin.* 10 (2003) N3. MR1975776.