

# Immanant の不等式の予想の精密化と $n \rightarrow \infty$ のときのその挙動

広島大学大学院理学研究科 田端 亮 \*

Ryo Tabata

Department of Mathematics,  
Graduate School of Sciences  
Hiroshima University

## §1. はじめに

Immanant とは, determinant を対称群の表現の視点から一般化した正方行列上の関数であり, ヤング図形と 1 対 1 に対応する. Immanant の古典的な問題として, 半正値エルミート行列上の不等式があり, その中で最も知られたものが Schur の定理と Lieb の permanental dominance 予想である.

本稿では, それらの不等式に対するある精密化と, それに関する予想を紹介する. そして, そこに現れる特殊な行列に着目し, immanant の不等式の極限挙動について考察を行う. その挙動を, ヤング図形の極限形状によって記述し, 新たな予想を紹介する.

## §2. Immanants の不等式

Generalized matrix function とは  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の部分群  $G$  とその表現の指標  $\chi$  によって定まる  $n \times n$  正方行列上の関数であり,  $A = (a_{ij})$  に対して次で定まる.

$$d_{\chi}^G(A) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

また,  $G = \mathfrak{S}_n$ ,  $\chi$  が  $\mathfrak{S}_n$  の既約指標であるとき, generalized matrix function を immanant という. 対称群の既約指標は, ヤング図形  $\lambda$  と 1 対 1 に対応することから, immanant もまたヤング図形  $\lambda$  でラベル付けすることができるので,  $d_\lambda$  と書くことにする.

Generalized matrix function および immanant は, determinant や permanent の一般化である. ここで, permanent とは, determinant の符号変化を取り除いたものである.

例 1.  $\lambda = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  のとき,  $\chi_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$  (交代指標) であり,

$$d_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}(A) = \det A.$$

例 2.  $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  のとき,  $\chi_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}(\sigma) = 1$  (自明指標) であり,

$$d_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}(A) = \text{per } A.$$

以下,  $A$  を半正値エルミート行列として考える ( $A \geq 0$  と書く). また, normalized generalized matrix function  $\bar{d}_\chi^G$  を,  $\bar{d}_\chi^G = d_\chi^G / \chi(\text{id})$  と定義する. Normalized generalized matrix functions に関する不等式について, 次のような定理と予想が知られている.

定理 1 (Schur [5]).  $G$  を  $\mathfrak{S}_n$  の部分群,  $\chi$  をその指標とする. 任意の  $A \geq 0$  に対して, 次が成り立つ.

$$\det A \leq \bar{d}_\chi^G(A).$$

予想 1 (Lieb [2], Permanental Dominance 予想).  $G$  を  $\mathfrak{S}_n$  の部分群,  $\chi$  をその指標とする. 任意の半正値エルミート行列  $A$  に対して, 次が成り立つ.

$$\bar{d}_\chi^G(A) \leq \text{per } A.$$

それぞれ, generalized matrix functions の中で, determinant が最小であるという定理と, permanent が最大であろうという予想である. 現在までに permanental dominance 予想は,  $n \leq 3$  で正しいことが知られている.

これら 2 つの不等式に関連して, 次の関数を考える.

定義 1.  $\det A < \text{per } A$  を満たす  $A \geq 0$  に対して,

$$T_\chi^G(A) = \frac{\bar{d}_\chi^G(A) - \det A}{\text{per } A - \det A}$$

と定義する.

Schur の不等式, Lieb の予想は, それぞれ  $T_\chi^G(A) \geq 0$ ,  $T_\chi^G(A) \leq 1$  と言い換えられる. また,  $\det A = \text{per } A$  となるための必要十分条件は,  $A$  が全てゼロの行および列を持つか, 対角行列であることであり, その場合, 全ての generalized matrix function の値が一致するので, Lieb の予想は成り立つことに注意をする. 各  $G$  と  $\chi$  の組に対し, この  $T_\chi^G$  のとりうる値を決定することで, Schur の不等式と Lieb の予想の精密化を考える.

半正値エルミート行列  $A$  はグラム行列で表すことができる, すなわち,  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  を用いて,  $A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$  と書き表すことができる. これにより,  $A \geq 0$  をベクトルの配置  $\{v_1, \dots, v_n\}$  とみなす.  $T_\chi^G$  は, 各ベクトルの非零の定数倍に関して不変であるので, 必要ならば単位ベクトルの配置として構わない. このとき, 対応する行列  $A \geq 0$  の対角成分が全て 1 となる.

ここからは  $G = \mathfrak{S}_n$ ,  $\chi$  が  $\mathfrak{S}_n$  の既約指標であるとき (immanant のとき) を考えていく. そのときの,  $T_\chi^G$  を単に  $T_\lambda$  と書く.

Pate, Silva は独立に, immanant に対して次のような結果を与えている.

**定理 2** (Pate[3], Silva[6]).  $A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$  とする.  $d_\lambda(A) = 0$  であることと,  $v_1, \dots, v_n$  をヤング図形の  $\lambda$  の各箱に 1 つずつ書き入れ, 各列のベクトルが一次独立にすることができないことは同値である.

**例 3.**

$$d_{\square} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

この定理により,  $\lambda \neq \square$  に対して,  $T_\lambda$  の最小値 0 を達成する行列の例を見つけることができる. 例えば,  $n$  本のベクトルが全て同じであるような配置に対応する行列

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ を選べばよい.}$$

したがって,  $T_\lambda$  については最大値だけが問題となるが, これに関して次のような予想を立てている.

**予想 2.**  $n \geq 3$  とする.

(1)  $\lambda \neq \square$  とする. 次の行列は,  $T_\lambda$  の最大値を与える.

$$Y_n = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列は,  $T_{\square}$  の最大値を与える.

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ -1 & -1 & 2 & & \\ \hline & & & 1 & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

この予想は,  $n = 3, 4$  で正しいことが確かめられている. また,  $Y_n$  という行列は, 正  $n-1$  単体の各頂点へのベクトル配置に対応する半正値エルミート行列である.

### §3. Immanants の極限挙動

この章では, 前章でほとんどの  $T_\lambda$  の最大値を与えると予想される  $Y_n$  という行列について考えていくことにする.  $Y_n$  の determinant は 0 であることは分かるが, permanent に関して Frenzen-Fischer [1] が次のような結果を与えている.

定理 3 (Frenzen-Fischer [1]).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{per } Y_n = \frac{e}{2}.$$

このことから,  $Y_n$  の他の immanent の極限を調べてみたくなる. 前章で定義した  $T_\lambda(Y_n)$  を記述することによって, permanent dominance 予想の挙動を考えていくことにしよう.

$n$  を大きくすると, ヤング図形の箱の数が増えていくが, よく知られたヤング図形の極限形状をもつ, ランダムヤング図形の最も基本的な Plancherel 測度について考えてみる. Plancherel 測度とは, 群の正則表現によって得られる確率測度である.  $R$  を  $\mathfrak{S}_n$  の正則表

現の指標とすると,

$$\begin{aligned}
 E[\bar{d}_\lambda(Y_n)] &= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \bar{d}_\lambda(Y_n) \\
 &= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim \lambda)}{n!} d_\lambda(Y_n) \\
 &= \frac{1}{n!} d_R(Y_n) \\
 &= \bar{d}_R(Y_n) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる. これにより次が言える.

定理 4 ([7]). *Plancherel* 測度によるランダムヤング図形  $\lambda$  に対し,  $T_\lambda(Y_n)$  の期待値  $E[T_\lambda(Y_n)]$  について次が成り立つ.

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} E[T_\lambda(Y_n)] = \frac{2}{e}.$$

他にもいくつか「大きなヤング図形」について考えていく. 長方形ヤング図形  $\lambda = (k^n)$  については, 次のような結果が得られる.

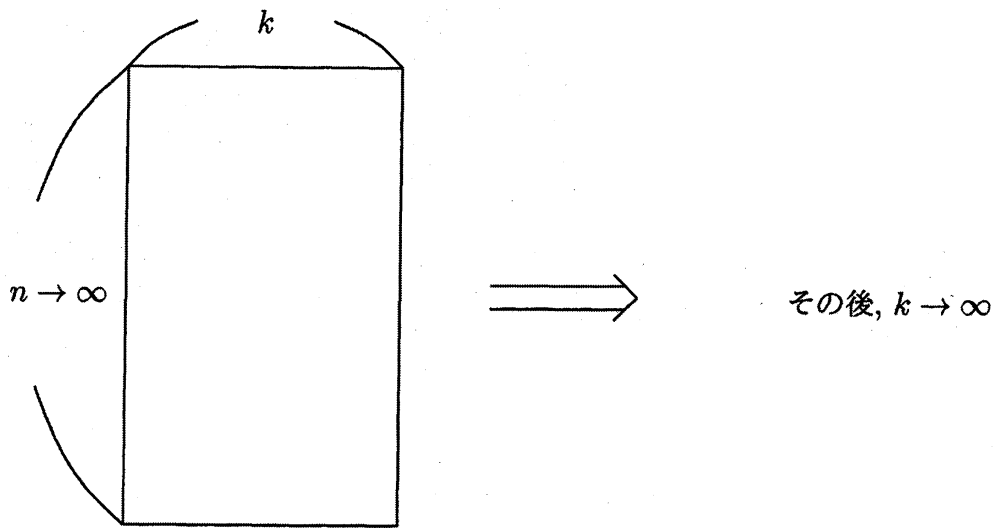
定理 5.  $k$  を正整数とする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k^n)}(Y_{kn}) = 2 \left( \frac{k}{k+1} \right)^k.$$

ここでは行の数  $n$  を大きくすることで, 縦に大きく伸びた長方形を考えている (図 1). その後で列の数  $k$  を大きくし, 横にも伸ばすと,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k^n)}(Y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{2}{e}$$

となることが分かる.

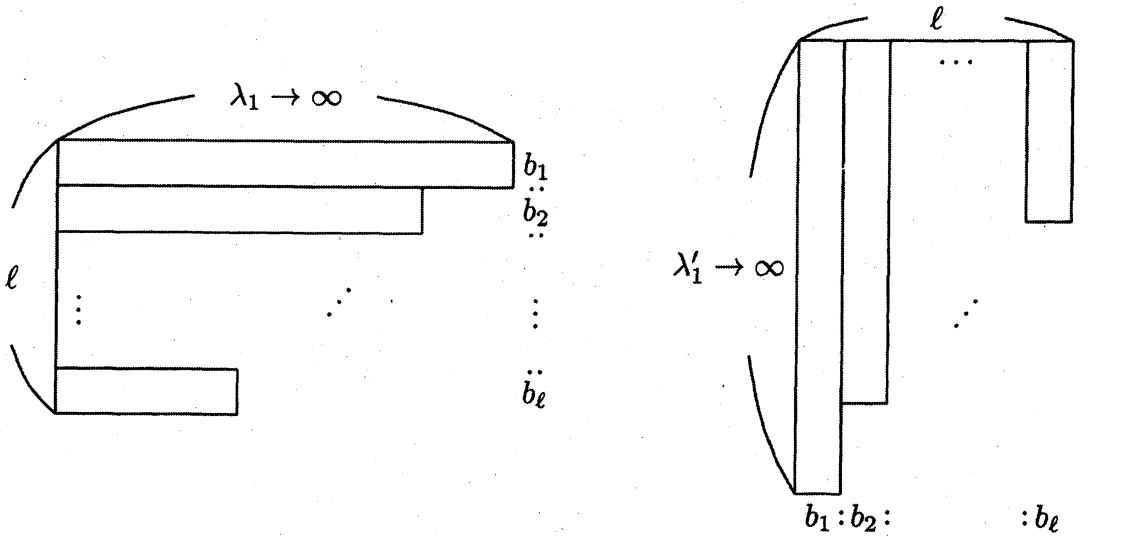


$n \rightarrow \infty$  のときの長方形ヤング図形 ( $k^n$ )

図 1

順序を変え、長方形を横、縦の順に伸ばしたときにも、類似の結果が期待される。

もう少し一般の状況を考えよう。行 (もしくは列) の数を有限とし、 $n$  を大きくすると、ヤング図形は横 (もしくは縦) に伸びていくことになる。そのとき、 $i$  行目 (もしくは  $i$  列目) の箱の数が  $n$  のオーダーで増えていくという状況、すなわち、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $\lambda_i/n \rightarrow b_i$  (もしくは  $\lambda'_i/n \rightarrow b_i$ ) となる場合を考える (図 2)。



$n \rightarrow \infty$  のときのヤング図形  $\lambda^{(n)}$

$n \rightarrow \infty$  のときの  
 $\lambda^{(n)}$  の双対ヤング図形  $\mu^{(n)}$

図 2

**定理 6.**  $\ell$  を正整数とし, ヤング図形の列  $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots$ ,  $|\lambda^{(n)}| = n$  を考える. また,  $\mu^{(n)}$  を  $\lambda^{(n)}$  の双対ヤング図形とする.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}/n = b_i$ ,  $b_1 > b_2 > \dots > b_\ell$  であるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = 2 \prod_{i=1}^{\ell} \left( \frac{1}{1+b_i} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu^{(n)}}(Y_n) = 2 \prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i).$$

ここで,  $\prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i)$  が,  $0, b_1, b_1+b_2, \dots, b_1+\dots+b_\ell = 1$  という区間分割での, 微分方程式  $\frac{dy}{dx} = -y, y(0) = 1$  の折れ線近似であることに気付くと,  $b_1 \rightarrow 0$  という操作は, その区間の幅を小さくしていくこととなり, その値は  $y(1) = 1/e$  に近づく. これにより,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu^{(n)}}(Y_n) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i) = \frac{2}{e}.$$

が得られる. 同様にして,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^{\ell} \left( \frac{1}{1+b_i} \right) = \frac{2}{e}$$

を得る.

#### §4. 極限挙動に関する予想

前章で, いくつかの「大きなヤング図形」を考えたときに, いずれも  $e/2$  という値となることは興味深い. このことから, 次の予想を立てた.

**予想 3.** ヤング図形の列  $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots$ ,  $|\lambda^{(n)}| = n$  を考える.  $\mu^{(n)}$  を  $\lambda^{(n)}$  の双対ヤング図形とする.  $\lambda_1^{(n)}/n \rightarrow 0$  かつ  $\mu_1^{(n)}/n \rightarrow 0$  ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = \frac{2}{e}.$$

また, 予想 3 の逆は一般に成り立たない. 例えば, 次のフック形のヤング図形  $(k, n-k)$  に対する結果から分かる.

**定理 7 ([7]).**  $k = k(n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} k/n = c$  とする ( $0 \leq c \leq 1$ ). このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k, n-k)}(Y_n) = \frac{2c}{c+1}.$$

## 参考文献

- [1] C. L. Frenzen, I. Fischer, On a Conjecture of Pierce for Permanents of Singular Correlation Matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 14(1):74-81 (1993).
- [2] E. H. Lieb, Proofs of Some Conjectures on Permanents, *J. Math. and Mech.* 16:127-134 (1966).
- [3] T. H. Pate, Immanants and Decomposable Tensors that Symmetrize to Zero, *Linear and Multilinear Algebra* 28(3):175-184 (1990).
- [4] T. H. Pate, Row appending maps,  $\Psi$  functions, and immanant inequalities for Hermitian positive semi-definite matrices, *Proc. London Math. Soc.*(3) 76(2):307-358 (1998).
- [5] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen, *Math. Z.* 1:184-207 (1918).
- [6] Dias da Silva, On the  $\mu$ -colorings of a matroid, *Linear and Multilinear Algebra* 27(1):25-32 (1990).
- [7] R. Tabata, Hook Immanants of Correlation Matrices and Remarks on the Permenal Dominance Conjecture, Preprint.