数理解析研究所講究録
第 1998 巻 2016 年 104-118

有限鏡映群の標準不変式系と多面体調和関数

北海道大学大学院理学院数学専攻　　辻栄　周平
Shuhei Tsujie
Department of Mathematics, Hokkaido University

本稿は豊田工業大学の中島規博氏と，北海道大学の寺尾宏明氏との共同研究を含む．

概要

古典的な調和関数は，ラプラシアンに関する微分方程式の解であるということと，球に関する平均値の性質を満たすということの2つの側面を持っている．群調和関数論や多面体調和関数論は，この事実の類似についての理論である．

1　イデアル調和多項式

多項式環の斉次イデアルに関する調和多項式について述べる．多項式環が距離二乗関数が生成するイデアルと古典的な調和多項式からなる空間の直和に分解できたように，群に関する調和多項式や多面体に関する調和多項式なども，斉次イデアルに関する調和多項式の言葉で記述することができる．この節の内容は散見されるが，たとえば Bergeron, Garsia [1] が詳しい．$\mathbb{K}$ を実数体 $\mathbb{R}$，または複素数体 $\mathbb{C}$ とし（この節では複素共役で閉じている $\mathbb{C}$ の部分体でよい），V を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間でエルミート内積（正定値非退化対称半双線形形式）$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ を備えているものとする：$u,u_1,u_2,v\in V$, $c\in\mathbb{K}$ に対し，

(1) $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$
(2) $\langle u_1+u_2,v\rangle=\langle u_1,v\rangle+\langle u_2,v\rangle$
(3) $\langle \bar{c}u,v\rangle=c\langle u,v\rangle$
(4) $\langle v,v\rangle\in\mathbb{R}$ かつ，$\langle v,v\rangle\geq 0$
(5) $\langle v,v\rangle=0\Rightarrow v=0$

ただし，$c\in\mathbb{K}$ に対し，$\bar{c}$ は c の複素共役を表す．V とその双対空間 V^* の間には，このエルミート内積から定まる共役線形同型 $\iota\colon V\to V^*;\iota(v):=\langle v,\cdot\rangle$ が存在する．ι は V^* 上のエルミート内積 $\langle L_1,L_2\rangle:=\langle\iota^{-1}(L_1),\iota^{-1}(L_2)\rangle$ を誘導する（左の引数に関して共役線形，右の引数に関して線形である）．$x=(x_1,\dots,x_n)$ を V^* の正規直交基底とすると，V^* 上の対称代数 $S:=S(V^*)$ は多項式環 $\mathbb{K}[x]$ と自然に同一視される．$\partial_i:=d/dx_i$ を x_i

に関する微分作用素とし，$S^* := \mathbb{K}[\partial]$ を $\partial := (\partial_1, \dots, \partial_n)$ で生成される $\mathbb{K}$ 上の代数とする．S^* は自然に V 上の対称代数 $S(V)$ に同型である．

定義 1.1. 多項式 $f \in S$ に対し，微分作用素 $f^* \in S^*$ を

$$f^* := \overline{f(\partial)},$$

すなわち，f の変数 x_i に ∂_i を代入して各係数の複素共役をとったものとして定める．

これは共役線形同型 $\iota^{-1}\colon V^* \to V$ を $S \to S^*$ に延長した $\mathbb{K}$ 代数としての共役同型であるから，実際には正規直交基底 $x = (x_1, \dots, x_n)$ の取り方に依らず，V のエルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ だけで定まっている．

定義 1.2. S 上の半双線形写像 $(\cdot, \cdot)\colon S \times S \to S$ を

$$(f, g) := f^* g \quad (f, g \in S)$$

で定める．また，S 上のエルミート内積 $(\cdot, \cdot)_0\colon S \times S \to \mathbb{K}$ を

$$(f, g)_0 := (f, g)(0) = (f^* g)(0),$$

すなわち，多項式 $f^* g$ に 0 を代入したものとして定める．

多重指数 $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し，

$$x^{\boldsymbol{a}} := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \quad \partial^{\boldsymbol{a}} := \partial_1^{a_1} \cdots \partial_n^{a_n}, \quad \boldsymbol{a}! := a_1! \cdots a_n!$$

と定めると，

$$(x^{\boldsymbol{a}}, x^{\boldsymbol{b}}) = \partial^{\boldsymbol{a}} x^{\boldsymbol{b}} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}!}{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})!} x^{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}} & (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n) \\ 0 & (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}^n), \end{cases}$$

$$(x^{\boldsymbol{a}}, x^{\boldsymbol{b}})_0 = (\partial^{\boldsymbol{a}} x^{\boldsymbol{b}})(0) = \begin{cases} \boldsymbol{a}! & (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \\ 0 & (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}) \end{cases}$$

となっている．

定義 1.3. S の部分空間 U に対し，

$$\begin{aligned} U^\perp &:= \{f \in S \mid (f, g)_0 = 0 \quad \forall g \in U\}, \\ \mathcal{L}(U) &:= \{f \in S \mid (f, g) = 0 \quad \forall g \in U\}, \\ \mathcal{R}(U) &:= \{g \in S \mid (f, g) = 0 \quad \forall f \in U\} \end{aligned}$$

と定める．

定義 1.4. S_k を k 次斉次多項式からなる S の部分空間とする．S の部分空間 U が斉次部分空間であるとは，$U = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(U \cap S_k)$ が成り立つときにいう．

命題 1.5 (Bergeron, Garsia [1]). $U, I, \mathcal{H}$ をそれぞれ S の斉次部分空間，斉次イデアル，斉次 S^* 部分加群とすると，以下が成り立つ．

(1) $U^\perp$ も S の斉次部分空間で，さらに $S = U \oplus U^\perp$, $U^{\perp\perp} = U$.
(2) $\mathcal{R}(I)$ は S の斉次 S^* 部分加群であり，さらに $\mathcal{R}(I) = I^\perp$.
(3) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は S の斉次イデアルであり，さらに $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^\perp$.

命題 1.5 より，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は S の斉次イデアルのなす束と S^* 部分加群のなす束の間の逆同型

$$\{S\text{ の斉次イデアル}\} \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{R}}{\rightleftarrows}} \{S\text{ の }S^*\text{ 部分加群}\}$$

を与えていることが分かる．さらに，S の斉次イデアル I に対し，$\mathcal{H} := \mathcal{R}(I)$ とおくと，$S = I \oplus \mathcal{H}$ となり，$\mathcal{H}$ はベクトル空間として，商環 S/I に自然に同型であることも分かる．

定義 1.6. I を S の斉次イデアルとする．$\mathcal{R}(I)$ の元を I 調和多項式という．

例 1.7. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし，I を距離二乗関数 $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ で生成される S のイデアルとする．このとき，微分作用素 $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^*$ はラプラシアン $\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ であり，したがって，I 調和多項式とは通常の調和多項式のことである．

調和性に関して，多項式の範疇を超えて扱いたい場合がある．$\tilde{S} := \mathbb{K}[[x]]$ を形式的冪級数環とする．S の部分空間 U に対して，

$$\tilde{\mathcal{R}}(U) := \{g \in \tilde{S} \mid (f, g) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

と定める．さらに，$\mathfrak{m} := S_+ = (x_1, \ldots, x_n)$ を S の無縁イデアルとし，$Z(I)$ で S のイデアル I のすべての元の複素共通零点の集合を表す．以下の定理は少し形を変えているが，Friedman, Littman [7] による．

定理 1.8 (Friedman, Littman [7]). I を S の斉次イデアルとするとき，以下は同値である．

(1) $Z(I) = \{0\}$.
(2) I は $\mathfrak{m}$ 準素イデアル．

(3) $\tilde{\mathcal{R}}(I)$ は S の有限生成斉次 S^* 部分加群.
(4) $\mathcal{R}(I)$ は S の有限生成斉次 S^* 部分加群.
(5) $\mathcal{R}(I)$ は S の有限次元斉次部分空間.

とくに，このとき $\tilde{\mathcal{R}}(I) = \mathcal{R}(I) \subseteq S$．すなわち，$\tilde{\mathcal{R}}(I)$ は多項式だけからなる.

定理 1.8 より，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は束の逆同型

$$\{S\text{ の斉次 }\mathfrak{m}\text{ 準素イデアル}\} \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{R}}{\rightleftarrows}} \{S\text{ の有限生成斉次 }S^*\text{ 部分加群}\}$$

を与えていることが分かる．我々の主な関心はこの対応にある.

問題 1.9.

(1) S の斉次 $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I に対し，$\mathcal{R}(I)$ の生成元を与えよ.
(2) S の斉次 S^* 部分加群 $\mathcal{H}$ に対し，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の生成元を与えよ.

S の有限生成 S^* 部分加群は有限個の巡回 S^* 部分加群（すなわち，単項生成 S^* 部分加群）の和で表せる．S の巡回 S^* 部分加群 $\mathcal{H}$ は以下の特徴づけをもつ：S 任意の有限生成 S^* 部分加群 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に対し，

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_1, \text{または } \mathcal{H} = \mathcal{H}_2.$$

したがって，巡回 S^* 部分加群に対応する斉次 $\mathfrak{m}$ 準素イデアルは以下で定義されるイデアルのクラスに属する.

定義 1.10. S の斉次イデアル I が斉次イデアルに関して既約であるとは，S 任意の斉次イデアル I_1, I_2 に対し，

$$I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1, \text{または } I = I_2$$

を満たすときにいう.

注意 1.11. 既約斉次イデアルは斉次イデアルに関して既約だが，逆は成り立たないかもしれない．斉次イデアルに関して既約なイデアルの性質は Sather-Wagstaff [21] にいくつかまとめてある.

$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は半順序集合の逆同型

$$\{S\text{ の斉次イデアルに関して既約な斉次 }\mathfrak{m}\text{ 準素イデアル}\} \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{R}}{\rightleftarrows}} \{S\text{ の斉次巡回 }S^*\text{ 部分加群}\}$$

を与えている.

問題 1.12.

(1) S の斉次イデアルに関して既約な $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I に対して，$\mathcal{R}(I)$ の唯一の生成元を I の生成元で記述せよ.

(2) S の斉次巡回 S^* 部分加群 $\mathcal{H}$ に対し，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の生成元を与えよ.

2 群調和多項式

G をユニタリ群 $U(V) = \{\sigma \in GL(V) \mid \langle \sigma u, \sigma v\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V\}$ の部分群とする．G は多項式環 S に自然に作用する：

$$\sigma f := f \circ \sigma^{-1} \qquad (\sigma \in G, f \in S).$$

この作用に関して，半双線形写像 $(f, g) = f^* g$ は G 不変となる．I_G を定数でない斉次 G 不変式で生成される S のイデアルとする.

定義 2.1. $\mathcal{H}_G := \mathcal{R}(I_G)$ の元を G 調和多項式という.

例 2.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G = O(V)$ とする．このとき，I_G は距離二乗関数 $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ で生成される．したがって，G 調和多項式とは通常の調和多項式のことである.

有限部分群 $G \subseteq U(V)$ に対して，G 調和多項式の空間 $\mathcal{H}_G$ は有限次元となる（たとえば，Neusel, Smith [20, Corollary 2.1.6] 参照）．一般に，$\mathcal{H}_G$ の S^* 加群としての生成元を見つけることは難しい．有限鏡映群（すなわち，鏡映で生成される有限群）に関しては Steinberg [22] による以下の結果がある：

定理 2.3 (Steinberg [22])**.** $G \subseteq U(V)$ を有限部分群とする．このとき，G が鏡映群であることと $\mathcal{H}_G$ が S^* 加群として巡回的であることは同値である．さらに，このとき $\mathcal{H}_G$ は S^* 加群として歪多項式

$$\Delta := \prod_H L_H^{e_H - 1}$$

で生成される．ただし，H は G に属する鏡映の鏡映面をすべて走り，L_H は超平面 H の定義多項式，e_H は H に属する任意の点を固定する G の部分群の位数である.

有限鏡映群 $G \subseteq U(V)$ に対する調和多項式は以下に述べるように，ある種の平均値の

性質と密接な関係がある．

定義 2.4. $G \subseteq U(V)$ を有限鏡映群とする．領域 $D \subseteq V$ 上の連続関数 f が G に関する平均値の性質を満たすとは，任意の $x \in D$ に対し，ある正の数 r_x が存在し，任意の $0 < ||v|| < r_x$ に対し，

$$f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} f(x + \sigma v)$$

が成り立つときにいう．これらの関数がなす空間を $\mathcal{H}_G(D)$ と表す．

定理 2.5 (Steinberg [22]). $G \subseteq U(V)$ を有限鏡映群，$D \subseteq V$ を領域とする．このとき，

$$\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_G(D).$$

3 標準不変式系

Flatto, Wiener[3, 4, 5] は実有限鏡映群 G に対し，$v \in V \setminus \{0\}$ に関する G 推移的な集合に関する平均値の性質について考察した．

定義 3.1. $G \subseteq U(V)$ を有限鏡映群とし，$v \in V \setminus \{0\}$ とする．領域 D 上の連続関数 f が $Gv := \{\sigma v \in V \mid \sigma \in G\}$ に関する平均値の性質を満たすとは，任意の $x \in D$ に対し，ある正の数 r_x が存在し，任意の $0 < r < r_x$ に対し，

$$f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} f(x + r\sigma v)$$

が成り立つときにいう．これらの関数がなす空間を $\mathcal{H}_{Gv}(D)$ と表す．

定理 2.5 より，一般に $\mathcal{H}_G \subseteq \mathcal{H}_{Gv}(D)$ となっている．$\mathcal{H}_{Gv}(D)$ に関して考察する際に導入された概念が有限鏡映群の標準不変式系である．標準不変式系の定義について述べるために，Chevalley の定理について思い出しておく．以下，$G \subseteq U(V)$ は有限鏡映群とする．

定理 3.2 (Chevalley [2]). 不変式環 S^G は n 個の $\mathbb{K}$ 上代数的独立な斉次多項式 $f_1, \ldots, f_n$ で生成される．

定義 3.3. $\{f_1, \ldots, f_n\}$ を G の基本不変式系という．

定義 3.4. G の基本不変式系 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ が標準不変式系であるとは,

$$(f_i, f_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

を満たすときにいう.

実有限鏡映群の標準不変式系の存在性と線形変換による推移性を除いた一意性は Flatto, Wiener により示されている. また, 標準不変式系の具体的な表示が, 既約実鏡映群の無限系列 $A_n, B_n, D_n, I_2(m)$ に対しては Iwasaki [9], H_3, H_4, F_4 に対しては, Iwasaki, Kennma, Matsumoto [15] によって与えられている.

Flatto, Wiener の平均値の性質に関する結果は以下の通りである.

定理 3.5 (Flatto [5], Flatto, Wiener [4]). G を実有限鏡映群とし, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ を G の標準不変式系とする. このとき, 領域 $D \subseteq V$, $v \in V \setminus \{0\}$ に対し,

$$\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_{Gv}(D) \Leftrightarrow f_i(v) \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

次節で述べるように定理 3.5 は多面体の骨格に対して一般化される.

複素鏡映群の標準不変式系の存在性については以下のことが成り立つ:

定理 3.6 (Nakashima, Terao, T [18]). 線形写像

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon\colon & (\mathcal{H}_G \otimes_{\mathbb{K}} V^*)^G & \to & S \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{array}$$

は単射であり, 像 $\varepsilon(\mathcal{H}_G \otimes_{\mathbb{K}} V^*)^G$ の正規直交基底は G の標準不変式系である.

I_G と $\mathcal{H}_G$ は第 1 節で述べた $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ で対応している. これらに関して, 問題 1.12 に対する 1 つの解答は以下のようになる:

(1) 任意の基本不変式系 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ に対し, J をそれらの Jacobi 行列式とすると, $\Delta \doteq J$ (たとえば, Lehner, Taylor [17] 参照). ただし, $f \doteq g$ は 0 でない定数倍を除いて等しいという意味である.

(2) 上記で述べたように, $\varepsilon(\mathcal{H}_G \otimes_{\mathbb{K}} V^*)^G$ の基底は I_G を生成する.

G の任意の基本不変式系を用いた標準不変式系については, 以下の明示公式がある.

定理 3.7 (Nakashima, T [19]). $\{h_1, \ldots, h_n\}$ を G の任意の基本不変式系とする. この

とき，

$$\left\{ (\varepsilon \circ \tilde{\phi})(dh_i) \;\middle|\; 1 \le i \le n \right\}$$

は，$\varepsilon\,(\mathcal{H}_G \otimes_{\mathbb{K}} V^*)^G$ の基底となる．とくに，基本不変式系の次数がすべて異なるときには，これは標準不変式系である．ただし，$d\colon S \to S \otimes_{\mathbb{K}} V^*$ は外微分，$\tilde{\phi}\colon S \otimes_{\mathbb{K}} V^* \to S \otimes_{\mathbb{K}} V^*$ は写像 $\phi\colon S \to S; \phi(f) \coloneqq ((f, \Delta), \Delta)$ から誘導された写像である．

複素鏡映群の無限系列 $G(m,p,n)$ については，以下のより具体的な公式がある．

定理 3.8 (T [23]). $G(m,1,n)$ の標準不変式系は

$$f_i \coloneqq \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \left(x_j^{(n-i)m} \Delta_j \right)^* \Delta \qquad (1 \le i \le n)$$

で与えられる．ただし，

$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} x_k^{m-1} \prod_{1 \le k < \ell \le n} (x_k^m - x_\ell^m),$$
$$\Delta_j = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq j}} x_k^{m-1} \prod_{\substack{1 \le k < \ell \le n \\ k, \ell \neq j}} (x_k^m - x_\ell^m) \qquad (1 \le j \le n).$$

$p > 1$ に対して，$G(m,p,n)$ の標準不変式系は

$$f_1, \ldots, f_{n-1}, (x_1 \cdots x_n)^{m/p}$$

で与えられる．

標準不変式系に関連して，以下のような問題が考えられる．

問題 3.9.

(1) 有限鏡映群 G の標準不変式系を G のルート系の言葉で与えよ．

(2) 有限部分群 $G \subseteq U(V)$ に対し，$\varepsilon\,(\mathcal{H}_G \otimes_{\mathbb{K}} V^*)^G$ は不変式環 S^G を生成するか考察せよ．

4 多面体調和多項式

この節では，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし，多面体調和関数について紹介する．この節の内容に関しては，Iwasaki [13] が詳しい．多面体調和関数について述べる前に，V の Borel 測度に関す

る平均値の性質について述べる．μ を V のコンパクト台 K をもつ非負 Borel 測度とし，$\mu(K)=1$ とする．さらに，K はどの超平面にも含まれないとする．

定義 4.1. 領域 $D \subseteq V$ 上の連続関数 f が μ 調和的であるとは，以下の平均値の性質を満たすときにいう：任意の $x \in D$ に対し，ある正の数 r_x が存在し，任意の $0<r<r_x$ に対し，

$$f(x)=\int_K f(x+rv)d\mu(v).$$

D 上の μ 調和関数がなす空間を $\mathcal{H}_\mu(D)$ と表す．

Friedman, Littman [7] は以下の定理を示した：

定理 4.2 (Friedman, Littman [7])**.**

(1) μ 調和関数は解析的である．

(2) $f \in \mathcal{H}_\mu(D) \Leftrightarrow f \in C^\infty(D)$ かつ $f_i^* f = 0 \quad (i=1,2,3,\dots)$.
ただし，$f_i \in S$ は，

$$f_i(x) := \int_K \langle v, x\rangle^i d\mu(v)$$

で定義される斉次多項式である．

(3) $I_\mu \subseteq S$ を $f_i\,(i=1,2,\dots)$ で生成される S の斉次イデアルとする．定理 1.8 より，

$$Z(I)=\{0\} \Leftrightarrow \mathcal{H}_\mu(D)=\mathcal{R}(I_\mu) \text{ かつ } \mathcal{H}_\mu(D) \text{ は有限次元.}$$

とくに，このとき $\mathcal{H}_\mu(D)$ は S の斉次 S^* 部分加群で，μ 調和関数は多項式に限る．

$P \subseteq V$ を n 次元多面体とする．ただし，ここで n 次元多面体とは n 次元凸多面体（すなわち，いくつかの半空間の共通部分で有界なもの）の有限個の合併を意味するものとする．$k \in \{0,1,\dots,n\}$ に対し，$P(k)$ で P の k 次元骨格（すなわち，P の k 次元面の和集合）を表す．μ_k を V の k 次元 Euclid 測度とし，$|P(k)| := \mu_k(P(k))$ で $P(k)$ の k 次元体積を表す．

定義 4.3. 領域 $D \subseteq V$ 上の連続関数 f が $P(k)$ 調和的であるとは，以下の平均値の性質を満たすときにいう：任意の $x \in D$ に対し，ある正の数 r_x が存在し，任意の $0<r<r_x$ に対し，

$$f(x)=\frac{1}{|P(k)|}\int_{P(k)} f(x+rv)d\mu(v).$$

D 上の $P(k)$ 調和関数がなす空間を $\mathcal{H}_{P(k)}(D)$ と表す．

Iwasaki [10] は Borel 測度 $\mu(E) := \mu_k(P(k) \cap E)/|P(k)|$ に対して定理 4.2 を適用し，$P(k)$ 調和関数に関して研究を行った．定理 4.2 より，$P(k)$ 調和関数は解析的であり，ある微分方程式を満たすことはただちに従う．よって，定理 4.2 における $P(k)$ に対する多項式 f_i を調べることが肝になる．Iwasaki は多項式 f_i に相当する多項式を P の組合せ的性質を用いて記述したのだが，これについて述べるには少々準備を要する．

P の i 次元面 F_i が張る i 次元アファイン空間を H_{F_i} と表す．$\pi_{F_i}: V \to H_{F_i}$ を直交射影とし，$p_{F_i} := \pi_{F_i}(0)$ とする．F_i が P の $i+1$ 次元面 F_{i+1} の境界に含まれるときに $F_i \prec F_{i+1}$ と表す．さらにこのとき，$H_{F_{i+1}}$ において F_{i+1} の内部から外部へ向かう F_i の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_{F_iF_{i+1}}$ と表す．$p_{F_i} - p_{F_{i+1}}$ は $\boldsymbol{n}_{F_iF_{i+1}}$ に平行なので，$F_i \prec F_{i+1}$ の隣接指数 $[F_i \colon F_{i+1}]$ を

$$p_{F_i} - p_{F_{i+1}} = [F_i \colon F_{i+1}]\boldsymbol{n}_{F_iF_{i+1}}$$

で定めることができる．各 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対し，P の k 次元旗の集合を

$$\mathrm{Flag}_k(P) := \left\{F = (F_0, F_1, \dots, F_k) \;\middle|\; \text{各 } F_i \text{ は } P \text{ の } k \text{ 次元面で} F_0 \prec F_1 \prec \cdots \prec F_k\right\}$$

と定める．さらに，$F \in \mathrm{Flag}_k(P)$ に対し，

$$[F] := [F_0 \colon F_1][F_1 \colon F_2] \cdots [F_{k-1} \colon F_k]$$

と定める．ただし，$k = 0$ のときは $[F] := 1$ とする．j 変数 i 次完全斉次対称式を

$$h_i^{(j)}(x_1, \dots, x_j) := \sum_{i_1 + \cdots + i_j = i} x_1^{i_1} \cdots x_j^{i_j}$$

とおく．

定理 4.4 (Iwasaki [10])．

(1) $P(k)$ 調和関数は解析的である．

(2) $f \in \mathcal{H}_{P(k)}(D) \Leftrightarrow f \in C^\infty$ かつ $(\tau_i^{(k)})^* f = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$．
ただし，$\tau_i^{(k)} \in S$ は，

$$\tau_i^{(k)} := \sum_{F \in \mathrm{Flag}_k(P)} [F] h_i^{k+1}\left(\langle p_{F_0}, x\rangle, \langle p_{F_1}, x\rangle, \dots, \langle p_{F_k}, x\rangle\right)$$

で定義される斉次多項式である．

(3) $I_{P(k)} \subseteq S$ を $\tau_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \dots)$ で生成される S の斉次イデアルとする．このとき，$Z(I_{P(k)}) = \{0\}$．したがって，$\mathcal{H}_{P(k)}(D) = \mathcal{R}(I_{P(k)})$ は多項式のみからなる有限次元斉次部分空間である．さらに，$\mathcal{H}_{P(k)}(D)$ は領域 $D \subseteq V$ の取り方に依らない．

定義 4.5. $\mathcal{H}_{P(k)}(D)$ は領域 $D \subseteq V$ の取り方に依らないので，これを $\mathcal{H}_{P(k)}$ と表す．

定理 4.4 で定めた斉次イデアル $I_{P(k)}$ と $P(k)$ 調和多項式からなる空間 $\mathcal{H}_{P(k)}$ は第 1 節で述べた $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ で対応している．これが問題 1.9 に関心を寄せる理由である．

問題 4.6. $I_{P(k)}$ と $\mathcal{H}_{P(k)}$ の最小生成元を求めよ．

多面体調和多項式論は有限鏡映群の調和多項式論と密接に関係している．

$$G(P) := \{\sigma \in O(V) \mid \sigma P = P\}$$

を P の対称変換群とする．$I_{P(k)}$ の生成元 $\tau_i^{(k)}$ は $G(P)$ 不変なので，

$$I_{G(P)} \supseteq I_{P(k)}, \qquad \mathcal{H}_{G(P)} \subseteq \mathcal{H}_{P(k)}$$

となることが分かる．Iwasaki [12] は $G(P)$ が鏡映群である場合に定理 3.5 の一般化である以下の定理を得た：

定理 4.7 (Iwasaki [12])**.** $P \subseteq V$ を n 次元多面体とし，その対称変換群 $G(P)$ は有限鏡映群であるとする．$\{f_1, \dots, f_n\}$ を $G(P)$ の標準不変式系とし，それらの次数はすべて異なるとする．このとき，各 $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して，

(1) $f_i \in \mathcal{H}_{P(k)} \Leftrightarrow \displaystyle\int_{P(k)} f_i d\mu_k = 0.$

(2) $\mathcal{H}_{G(P)} = \mathcal{H}_{P(k)} \Leftrightarrow \displaystyle\int_{P(k)} f_i d\mu_k \neq 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$

定理 4.8 (Iwasaki [10, 11, 14] Iwasaki, Kenma, Matsumoto [15])**.** $P \subseteq V$ を原点中心の正凸多面体とし，$G(P)$ を P の対称変換群とする（これは有限実鏡映群である）．このとき，$\mathcal{H}_{P(k)}$ は k に依らずすべて $\mathcal{H}_{G(P)}$ に等しい．したがって，S^* 加群として $G(P)$ の歪多項式 Δ で生成される．

正凸多面体に対しては調和多項式の空間をこれで把握することができたが，他の多面体に関してはあまり知られていない現状である．正凸多面体以外の多面体の調和多項式に関しては，Iwasaki [16], Hasui, Iwasaki [8] がある．

例 4.9. $V := \mathbb{R}^3$ とし，$G \subseteq O(V)$ を B_3 型の既約実有限鏡映群，すなわち超平面

$$x_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad x_i \pm x_j = 0 \quad (1 \leq i < j \leq 3)$$

に関する鏡映で生成される有限群とする．G 推移的な集合 Gv で調和多項式からなる空間がなるべく大きくなるようなものについて具体例を挙げてみる．Gv を多面体の頂点とみなすことで定理 4.7 などが有効であることに注意しておく．G の標準不変式系は

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\
f_2 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 3(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2), \\
f_3 &= 2(x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) - 15(x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_1^4x_3^2 + x_1^2x_3^4 + x_2^4x_3^2 + x_2^2x_3^4) \\
&\quad + 180x_1^2x_2^2x_3^2.
\end{aligned}$$

で与えられる．定理 4.7(1) より，$\mathcal{H}_{Gv}$ の次元をなるべく大きくするためには $f_2(v) = f_3(v) = 0$ となる $v \neq 0$ をとればよい．$v \in V$ は

$$f_1(v) = 1, \quad f_2(v) = f_3(v) = 0$$

を満たすとしよう．Gv に対する $\tau_i := \tau_i^{(0)}$ は

$$\tau_i = \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma v, x \rangle^i$$

で与えられる．i が奇数のとき $\tau_i = 0$ となることはただちに分かる．偶数 i に対し，τ_i を計算機に計算させてみると，

$$\begin{aligned}
\tau_2 &\doteq f_1, \qquad \tau_4 \doteq \tau_2^2, \qquad \tau_6 \doteq \tau_2^3, \\
\tau_8 &\doteq 206701f_1^4 + 6048f_1^2f_2 + 2080f_1f_3 - 24024f_2^2, \\
\tau_{10} &\doteq 176671f_1^5 + 13408f_1^3f_2 + 5440f_1^2f_3 - 59304f_1f_2^2 + 1360f_2f_3, \\
\tau_{12} &\doteq 60966697f_1^6 + 7680288f_1^4f_2 + 3592160f_1^3f_3 - 37559592f_1^2f_2^2 \\
&\quad + 1525440f_1f_2f_3 + 284592f_2^3 + 19480f_3^2, \\
\tau_{14} &\doteq 2536437695f_1^7 + 436963296f_1^5f_2 + 229746880f_1^4f_3 - 2334080952f_1^3f_2^2 \\
&\quad + 128236080f_1^2f_2f_3 + 32676336f_1f_2^3 + 2751800f_1f_3^2 + 4213440f_2^2f_3.
\end{aligned}$$

少し考察をすると，

$$I_{Gv} = (\tau_2, \tau_8, \tau_{10}, \tau_{12}).$$

となることがわかる．歪多項式 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}\Delta &:= x_1x_2x_3(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2),\\ \Delta_1 &:= \Delta(2f_1^2 + 23f_2),\\ \Delta_2 &:= \Delta(88f_1^3 + 84f_1f_2 + 145f_3).\end{aligned}$$

さらに少し計算をさせると，以下のような結果を得る．

命題 4.10.

(1) $\mathcal{H}_{Gv} = S^*\Delta_1 + S^*\Delta_2$.

(2) $\mathcal{H}_G = S^*\Delta = S^*\Delta_1 \cap S^*\Delta_2$.

以下は，各空間の次数別の次元の表である．ただし，$\mathcal{H}$ は古典的調和多項式からなる空間である．

deg	any	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S	∞	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153
$\mathcal{H}$	∞	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
$\mathcal{H}_{Gv}$	144	1	3	5	7	9	11	13	15	16	16	15	13	10	6	3	1	0
$S^*\Delta_2$	96	1	3	5	7	8	8	8	8	8	8	8	8	7	5	3	1	0
$S^*\Delta_1$	96	1	3	5	7	9	11	12	12	11	9	7	5	3	1	0	0	0
$\mathcal{H}_G$	48	1	3	5	7	8	8	7	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0

参考文献

[1] N. Bergeron and A. Garsia, On certain spaces of harmonic polynomials, *Contemporary Mathematics* **138** (1992), 51–86.

[2] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.* **77** (1955), no. 4, 778–782.

[3] L. Flatto, Basic sets of invariants for finite reflection groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), no. 4, 730–734.

[4] L. Flatto, Invariants of finite reflection groups and mean value problems II, *Amer. J. Math.* **92** (1970), no. 3, 552–561.

[5] L. Flatto and M. M. Weiner, Invariants of finite reflection groups and mean value problems, *Amer. J. Math.* **91** (1969), no. 3, 591–598.

[6] E. Fortuna, P. Gianni, and B. Trager, Irreducible decomposition of polynomial ideals, *Journal of Symbolic Computation* **39** (2005), no. 3, 305–316.

[7] A. Friedman and W. Littman, Functions satisfying the mean value property, *Transactions of the American Mathematical Society* (1962), 167–180.

[8] M. Hasui and K. Iwasaki, Triakis Solids and Harmonic Functions, *ArXiv e-prints* (2012).

[9] K. Iwasaki, Basic invariants of finite reflection groups, *J. Algebra* **195** (1997), no. 2, 538–547.

[10] K. Iwasaki, Polytopes and the mean value property, *Discrete Comput. Geom.* **17** (1997), no. 2, 163–189.

[11] K. Iwasaki, Regular simplices, symmetric polynomials and the mean value property, *J. Anal. Math.* **72** (1997), no. 1, 279–298.

[12] K. Iwasaki, Invariants of finite reflection groups and the mean value problem for polytopes, *Bull. London Math. Soc.* **31** (1999), no. 4, 477–483.

[13] K. Iwasaki, Recent progress in polyhedral harmonics, *Acta Appl. Math.* **60** (2000), no. 2, 179–197. MR 1773962 (2001e:31004)

[14] K. Iwasaki, Cubic harmonics and Bernoulli numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **119** (2012), no. 6, 1216–1234.

[15] K. Iwasaki, A. Kenma, and K. Matsumoto, Polynomial invariants and harmonic functions related to exceptional regular polytopes, *Experiment. Math.* **11** (2002), no. 2, 313–319.

[16] K. Iwasaki, Triangle mean value property, *Aequationes Math.* **57** (1999), no. 2-3, 206–220. MR 1689194 (2000m:39054)

[17] G. I. Lehrer and D. E. Taylor, *Unitary reflection groups*, vol. 20, Cambridge University Press, 2009.

[18] N. Nakashima, H. Terao, and S. Tsujie, Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups, *arXiv:1310.0570* (2013).

[19] N. Nakashima and S. Tsujie, A canonical system of basic invariants of a finite reflection group, *J. Algebra* **406** (2014), 143–153.

[20] M. D. Neusel and L. Smith, *Invariant theory of finite groups*, vol. 94, American Mathematical Soc., 2010.

[21] S. Sather-Wagstaff, Algebraic geometry notes, http://www.ndsu.edu/pubweb/ ssatherw/DOCS/AGN.pdf.

[22] R. Steinberg, Differential equations invariant under finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1964), no. 3, 392–400.

[23] S. Tsujie, Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups, *Ph. D. Thesis* (2014).