数理解析研究所講究録
第 1999 巻 2016 年 174-187

The power of the test based on the non-central t-statistic under non-normality

筑波大学　赤平昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1　はじめに

通常，2 標本問題において，正規性の仮定の下で 2 つの平均の同等性の検定や，それらの差の区間推定において，非心 t 統計量が用いられ非心 t 分布のパーセント点が必要となるが，解析的に求めることは困難である．そのためにその数表が作成され，種々の近似式も提案されてきた (Johnson et al. [JKB95], Bagui [B93], Akahira [A95], Akahira et al. [AST95])．しかし，正規性の仮定は強いので，それを外す試みも行われてきた (Bentkus et al. [BJSZ07], Akahira et al. [AOK13])．

本稿において，非正規性の下で [AOK13] において導出された非心 t 統計量の分布のパーセント点の 2 次近似を用いて，その統計量に基づく検定の検出力関数を求める．そして，その例も挙げる．なお，関連する結果は [BJSZ07] においても得られている．

2　非心 t 統計量の分布のパーセント点の高次近似

本節では [AOK13] に従って非心 t 統計量とその分布のパーセント点について述べる．まず，$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがいに独立に平均 μ，分散 1 を持つ分布 $P(\mu, 1)$ に従う非退化連続型確率変数列とする．また X_1 は有限な 6 次モーメントをもつとする．ここで

$$\mu_j := E[(X_1 - \mu)^j] \ (j = 2, \dots, 6), \quad \bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

とする．また，$\mu \neq 0$ のとき非心 t 統計量を $T_n := \sqrt{n}\bar{X}/S_n$ と定義する．ただし，$S_n = \sqrt{S_n^2}$ とする．特に分布 $P(\mu, 1)$ が正規分布 $N(\mu, 1)$ であるとき，T_n は自由度 $n-1$，非心度 $\mu\sqrt{n}$ を持つ非心 t 分布に従う．

いま，$\sigma_n := E(S_n)$ とおいて，任意の実数 t について

$$\begin{aligned} P_\mu\{T_n \le t\} &= P_\mu\{\sqrt{n}\bar{X} - tS_n \le 0\} \\ &= P_\mu\{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) - t(S_n - \sigma_n) \le -\mu\sqrt{n} + t\sigma_n\} \end{aligned}$$

になる．また，$Z := \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$，$a_n(t) := -\mu\sqrt{n} + t\sigma_n$ とおくと

$$P_\mu\{T_n \le t\} = P_\mu\{Z - t(S_n - \sigma_n) \le a_n(t)\} = P_\mu\{Y_n \le a_n(t)\} \tag{2.1}$$

になる．ここで，$Y_n := Z - t(S_n - \sigma_n)$ とおくと $E_t(Y_n) = 0$ になる．いま，$t = O(\sqrt{n})$ の場合について考える．このとき，σ_n, Y_n の分散，3 次のキュムラント

はそれぞれ

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{8n}(\mu_4 - 1) - \frac{1}{128n^2}\{8(6\mu_3^2 - \mu_6 + 3\mu_4 + 2) + 15(\mu_4 - 1)^2\} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{2.2}$$

$$V_t(Y_n) = 1 - \frac{t\mu_3}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{4n}(\mu_4 - 1) - \frac{t}{8n\sqrt{n}}(9\mu_3 - 2\mu_5 + 3\mu_3\mu_4) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{3,t}(Y_n) =& \frac{\mu_3}{\sqrt{n}} - \frac{3t}{4n}\{2(\mu_4 - 3) - \mu_3^2\} + \frac{3t^2}{4n\sqrt{n}}\{\mu_5 - \mu_3(\mu_4 + 5)\} \\ &- \frac{t^3}{16n^2}(1 + 2\mu_6 - 12\mu_3^2 - 3\mu_4^2) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

になる．特に，分布 $P(\mu,1)$ が正規分布 $N(\mu,1)$ のときには

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{4n} - \frac{7}{32n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$V_t(Y_n) = 1 + \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{2.5}$$

$$\kappa_{3,t}(Y_n) = -\frac{t^3}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{2.6}$$

になる．ここで，$W_n := Y_n/\sqrt{V_t(Y_n)}$ とすると，(2.1) より

$$P_\mu\{T_n \le t\} = P_\mu\left\{W_n \le \frac{t\sigma_n - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{V_t(Y_n)}}\right\}$$

となるから Cornish-Fisher 展開を用いて (2.1)～(2.4) より T_n の分布のパーセント点の高次近似を得る．

定理 2.1 ([AOK13]) T_n の分布の上側 $100\alpha\%$ 点は，等式

$$\frac{t_\alpha\sigma_n - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{V_{t_\alpha}(Y_n)}} = u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_{3,t_\alpha}(W_n)(u_\alpha^2 - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.7}$$

から近似的に求められる．ただし，u_α は標準正規分布 $N(0,1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点で，σ_n, $V_t(Y_n)$ はそれぞれ (2.2), (2.3) として与えられ，また

$$\kappa_{3,t}(W_n) = \kappa_{3,t}(Y_n)\{V_t(Y_n)\}^{-3/2}$$

とし，$\kappa_{3,t}(Y_n)$ は (2.4) として与えられている．

定理 2.1 を用いると，非心母数の区間推定を高次のオーダーまで行うことができる．

系 2.1 ([AOK13]) 非心 t 統計量 T_n に基づいて，漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の非心

母数 $\delta := \mu\sqrt{n}$ の下側信頼限界 $\hat{\delta}$ と信頼区間 $[\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ は，それぞれ

$$\hat{\delta} = \sigma_n T_n - \sqrt{V_{T_n}(Y_n)}\left\{u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_{3,T_n}(W_n)(u_\alpha^2 - 1)\right\} + O_p\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\underline{\delta} = \sigma_n T_n - \sqrt{V_{T_n}(Y_n)}\left\{u_{\alpha/2} + \frac{1}{6}\kappa_{3,T_n}(W_n)(u_{\alpha/2}^2 - 1)\right\} + O_p\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\bar{\delta} = \sigma_n T_n + \sqrt{V_{T_n}(Y_n)}\left\{u_{\alpha/2} + \frac{1}{6}\kappa_{3,T_n}(W_n)(u_{\alpha/2}^2 - 1)\right\} + O_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる．

特に，分布 $P(\mu,1)$ が正規分布 $N(\mu,1)$ のとき，(2.5)〜(2.7) より

$$\frac{t_\alpha\sigma_n - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{t_\alpha^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}} = u_\alpha - \frac{t_\alpha^3(u_\alpha^2 - 1)}{24n^2}\left(1 + \frac{t_\alpha^2}{2n}\right)^{-3/2}\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{2.8}$$

になる．ここで，$N(\mu,1)$ のときには，σ_n は任意の自然数 n について

$$\sigma_n = E(S_n) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \tag{2.9}$$

として与えられるので，その近似式 (2.2) を用いるより精確になることに注意．実は，式 (2.8) は [A95] において導出された，自由度 ν，非心度 δ をもつ非心 t 分布の上側 $100\alpha\%$ 点の近似式

$$\frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} = u_\alpha - \frac{t_\alpha^3(u_\alpha^2 - 1)}{24\{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)\}^{3/2}}\left\{\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right)\right\} \tag{2.10}$$

からも得られる．ただし，$\nu = n - 1$, $\delta = \mu\sqrt{n}$,

$$b_\nu := \sqrt{\frac{2}{\nu}}\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} = 1 - \frac{1}{4\nu} + \frac{1}{32\nu^2} + \frac{5}{128\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right)$$

とする．なお，t_α に関する方程式 (2.10) の解の存在性と一意性については [AST95] において論じられている．近似式としては (2.10) の方が (2.8) より精確である．何故なら，任意の自然数 n について $\sigma_n = E(S_n) = b_{n-1}$ となるからである．

次に，定数 c, d について $t = c\sqrt{n} + d$ とすると，(2.3), (2.4) より

$$\begin{aligned} V_{c,d}(Y_n) :=& 1 - c\mu_3 + \frac{c^2}{4}(\mu_4 - 1) + \frac{d}{2\sqrt{n}}\{c(\mu_4 - 1) - 2\mu_3\} + \frac{d^2}{4n}(\mu_4 - 1) \\ & - \frac{c}{8n}(9\mu_3 - 2\mu_5 + 3\mu_3\mu_4) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\kappa_{3,c,d}(Y_n) := \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\mu_3 - \frac{3c}{4}\{2(\mu_4-3)-\mu_3^2\} + \frac{3c^2}{4}\{\mu_5 - \mu_3(\mu_4+5)\}\right.$$
$$\left. - \frac{c^3}{16}(1+2\mu_6-12\mu_3^2-3\mu_4^2)\right] - \frac{3d}{16n}\left[4\{2(\mu_4-3)-\mu_3^2\}\right.$$
$$\left. - 8c\{\mu_5-\mu_3(\mu_4+5)\} + c^2(1+2\mu_6-12\mu_3^2-3\mu_4^2)\right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{2.12}$$

になる．ここで，(2.11) の右辺の定数項について

$$1 - c\mu_3 + \frac{c^2}{4}(\mu_4 - 1) \geq 0$$

となる ([BJSZ07])．何故なら，$E(X) = 0$, $E(X^2) = 1$ となる確率変数 X について

$$E\left[\left\{X - \frac{c}{2}(X^2-1)\right\}^2\right] = 1 - c\mu_3 + \frac{c^2}{4}(\mu_4 - 1)$$

となるからである．いま，非心 t 統計量の分布の上側 $100\alpha\%$ 点 t_α の高次近似式 (2.7) において，第 1 次近似まで考えると

$$\frac{t_\alpha\sigma_n - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{V_{c,d}(Y_n)}} = u_\alpha + o(1),$$

すなわち

$$t_\alpha = \frac{1}{\sigma_n}\left\{\mu\sqrt{n} + u_\alpha\sqrt{V_{c,d}(Y_n)}\right\} + o(1)$$

になる．ここで，(2.2), (2.11) より

$$t_\alpha = \mu\sqrt{n} + u_\alpha\left\{1 - c\mu_3 + \frac{c^2}{4}(\mu_4-1)\right\}^{1/2} + o(1)$$

となる．そこで，$c = \mu$ とすると $d = \sigma_0 u_\alpha$ を得る．ただし

$$\sigma_0 := \left\{1 - \mu\mu_3 + \frac{\mu^2}{4}(\mu_4-1)\right\}^{1/2}$$

とする．このとき，(2.11), (2.12) からそれぞれ

$$V_{\mu,\sigma_0 u_\alpha}(Y_n) = \sigma_0^2 + \frac{\sigma_0 u_\alpha}{2\sqrt{n}}\{\mu(\mu_4-1)-2\mu_3\}$$
$$+ \frac{\sigma_0^2 u_\alpha^2}{4n}(\mu_4-1) - \frac{\mu}{8n}(9\mu_3 - 2\mu_5 + 3\mu_3\mu_4) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{3,\mu,\sigma_0 u_\alpha}(Y_n) =& \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\mu_3 - \frac{\mu}{16}\{12(2(\mu_4-3)-\mu_3^2) - 12\mu(\mu_5 - \mu_3(\mu_4+5)) \\
&+ \mu^2(1+2\mu_6 - 12\mu_3^2 - 3\mu_4^2)\}\Big] \\
&- \frac{3\sigma_0 u_\alpha}{16n}\Big[4\{2(\mu_4-3)-\mu_3^2\} - 8\mu\{\mu_5 - \mu_3(\mu_4+5)\} \\
&+ \mu^2(1+2\mu_6 - 12\mu_3^2 - 3\mu_4^2)\Big] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\
=:& \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

となるから，定理 2.1 より非心 t 統計量 T_n の分布のパーセント点の直接的表現を得る．

定理 2.2 ([AOK13]) T_n の分布の上側 $100\alpha\%$ 点 t_α の高次の近似式は

$$
t_\alpha = \frac{1}{\sigma_n}\left[\mu\sqrt{n} + \sqrt{V_{\mu,\sigma_0 u_\alpha}(Y_n)}\left\{u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_{3,\mu,\sigma_0 u_\alpha}(W_n)(u_\alpha^2 - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]
$$

として与えられる．ただし，σ_n, $V_{\mu,\sigma_0 u_\alpha}(Y_n)$ はそれぞれ (2.2), (2.13) で与えられ，

$$
\kappa_{3,\mu,\sigma_0 u_\alpha}(W_n) = \sigma_0^{-3}\left[\frac{A}{\sqrt{n}} - \frac{3Au_\alpha}{4n}\{\mu(\mu_4-1) - 2\mu_3\} + \frac{B}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]
$$

とし，A, B は (2.14) で与えられるとする．

3 非心 t 統計量に基づく検定の検出力関数

まず, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に, 平均 μ, 分散 σ^2 を持つ分布 $P(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数列とする．ただし，μ, σ^2 は未知とし，$\sigma > 0$ とする．ここで，$X_1/\sigma, X_2/\sigma, \ldots, X_n/\sigma, \ldots$ はたがいに独立に，平均 μ/σ，分散 1 をもつ分布 $P(\mu/\sigma, 1)$ に従うので，μ/σ を改めて μ とする．なお，非心統計量 $T_n = \sqrt{n}\bar{X}/S_n$ は尺度不変であることに注意．そこで，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に分布 $P(\mu, 1)$ に従うと仮定して，仮説 $H : \mu = \mu_0$，対立仮説 $K : \mu = \mu_0 + (\delta/\sqrt{n})$ の水準 α の検定問題を考える．ただし，$\delta > 0$ とする．ここで，対立仮説は隣接性 (contiguity) をもつことに注意．次に，仮説 $H : \mu = \mu_0$ の下で非心 t 統計量 $T_n = \sqrt{n}\bar{X}/S_n$ について

$$
\begin{aligned}
\alpha = P_H\{T_n > C_n\} =& P_H\{\sqrt{n}\bar{X} - C_n S_n > 0\} \\
=& P_H\{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) - C_n(S_n - \sigma_{0n}) > -\mu_0\sqrt{n} + C_n\sigma_{0n}\} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，(2.2) より

$$
\begin{aligned}
\sigma_{0n} :=& E_H(S_n) \\
=& 1 - \frac{1}{8n}(\mu_{0,4} - 1) \\
&- \frac{1}{128n^2}\{8(6\mu_{0,3}^2 - \mu_{0,6} + 3\mu_{0,4} + 2) + 15(\mu_{0,4} - 1)^2\} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

とし，$\mu_{0,j} := E_H[(X_1-\mu_0)^j]$ $(j=2,3,\dots)$ とする．このとき，$Y_n=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)-C_n(S_n-\sigma_{0n})$ として定理 2.2 より (3.1) を満たす C_n を

$$C_n^{(0)}=\frac{1}{\sigma_{0n}}\left[\mu_0\sqrt{n}+\sqrt{V_{\mu_0,\sigma_0^{(0)}u_\alpha}(Y_n)}\left\{u_\alpha+\frac{1}{6}\kappa_{3,\mu_0,\sigma_0^{(0)}u_\alpha}(W_n)(u_\alpha^2-1)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]$$

とする．ただし

$$\sigma_0^{(0)}:=\left\{1-\mu_0\mu_{0,3}+\frac{\mu_0^2}{4}(\mu_{0,4}-1)\right\}^{1/2},$$

$$\begin{aligned}V_{\mu_0,\sigma_0^{(0)}u_\alpha}(Y_n)=&\sigma_0^{(0)^2}+\frac{\sigma_0^{(0)}u_\alpha}{2\sqrt{n}}\{\mu_0(\mu_{0,4}-1)-2\mu_{0,3}\}+\frac{1}{4n}\sigma_0^{(0)^2}u_\alpha^2(\mu_{0,4}-1)\\&-\frac{\mu_0}{8n}(9\mu_{0,3}-2\mu_{0,5}+3\mu_{0,3}\mu_{0,4})+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),\\ \kappa_{3,\mu_0,\sigma_0^{(0)}u_\alpha}(Y_n)=&\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\mu_{0,3}-\frac{\mu_0}{16}\{12(2(\mu_{0,4}-3)-\mu_{0,3}^2)-12\mu_0(\mu_{0,5}-\mu_{0,3}(\mu_{0,4}+5))\\&+\mu_0^2(1+2\mu_{0,6}-12\mu_{0,3}^2-3\mu_{0,4}^2)\}\Big]\\&-\frac{3}{16n}\sigma_0^{(0)}u_\alpha\Big[4\{2(\mu_{0,4}-3)-\mu_{0,3}^2\}-8\mu_0\{\mu_{0,5}-\mu_{0,3}(\mu_{0,4}+5)\}\\&+\mu_0^2(1+2\mu_{0,6}-12\mu_{0,3}^2-3\mu_{0,4}^2)\Big]+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\=:&\frac{A_0}{\sqrt{n}}+\frac{B_0}{n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

とする．もう少し変形すれば

$$\begin{aligned}C_n^{(0)}=&\mu_0\sqrt{n}+\sigma_0^{(0)}u_\alpha+\frac{1}{6\sqrt{n}}A_0\sigma_0^{(0)}(u_\alpha^2-1)+\frac{u_\alpha^2}{4\sqrt{n}}(\mu_0(\mu_{0,4}-1)-2\mu_{0,3})\\&+\frac{\mu_0}{8\sqrt{n}}(\mu_{0,4}-1)+O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

となる．

次に，T_n に基づく検定の検出力関数は，$\mu=\mu_0+(\delta/\sqrt{n})$ として

$$\begin{aligned}\beta(\delta):=&P_K\{T_n>C_n^{(0)}\}=P_K\{\sqrt{n}\bar{X}-C_n^{(0)}S_n>0\}\\=&P_K\{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)-C_n^{(0)}(S_n-\sigma_{1n})>-\mu\sqrt{n}+C_n^{(0)}\sigma_{1n}\}\end{aligned}\tag{3.4}$$

になる．ただし，

$$\begin{aligned}\sigma_{1n}=E_K(S_n)=&1-\frac{1}{8n}(\mu_{1,4}-1)-\frac{1}{128n^2}\{8(6\mu_{1,3}^2-\mu_{1,6}+3\mu_{1,4}+2)+15(\mu_{1,4}-1)^2\}\\&+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\mu_{1,j}:=E_K[(X_1-\mu)^j]\ \ (j=2,3,\dots)$$

とする．ここで，$Y_n = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) - C_n^{(0)}(S_n - \sigma_{1n})$ として (3.4) から

$$\begin{aligned}\beta(\delta) &= P_K\{Y_n > -\mu\sqrt{n} + C_n^{(0)}\sigma_{1n}\} \\ &= P_K\left\{\frac{Y_n}{\sqrt{V_K(Y_n)}} > \frac{C_n^{(0)}\sigma_{1n} - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{V_K(Y_n)}}\right\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．一方，

$$\sigma_0^{(1)} := \left\{1 - \mu\mu_{1,3} + \frac{\mu^2}{4}(\mu_{1,4} - 1)\right\}^{1/2}$$

として，

$$\begin{aligned}V_K(Y_n) =& V_{\mu,\sigma_0^{(1)}u_\alpha}(Y_n) \\ =& \sigma_0^{(1)^2}\left[1 + \frac{u_\alpha}{2\sigma_0^{(1)}\sqrt{n}}\{\mu(\mu_{1,4} - 1) - 2\mu_{1,3}\}\right. \\ &\left. + \frac{u_\alpha^2}{4n}(\mu_{1,4} - 1) - \frac{\mu}{8\sigma_0^{(1)^2} n}(9\mu_{1,3} - 2\mu_{1,5} + 3\mu_{1,3}\mu_{1,4}) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

となる．いま，(3.3), (3.5), (3.7) より

$$\begin{aligned}\frac{C_n^{(0)}\sigma_{1n} - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{V_K(Y_n)}} =& \frac{1}{\sigma_0^{(1)}}\left[-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha + \frac{A_0\sigma_0^{(0)}}{6\sqrt{n}}(u_\alpha^2 - 1) + \frac{u_\alpha^2}{4\sqrt{n}}\{\mu_0(\mu_{0,4} - 1) - 2\mu_{0,3}\}\right. \\ & + \frac{\mu_0}{8\sqrt{n}}(\mu_{0,4} - \mu_{1,4}) + \frac{u_\alpha\delta}{4\sigma_0^{(1)}\sqrt{n}}\{\mu(\mu_{1,4} - 1) - 2\mu_{1,3}\} \\ &\left. - \frac{\sigma_0^{(0)}u_\alpha^2}{4\sigma_0^{(1)}\sqrt{n}}\{\mu(\mu_{1,4} - 1) - 2\mu_{1,3}\} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．そこで

$$\lambda := 1 - \mu_0\mu_{1,3} + \frac{\mu_0^2}{4}(\mu_{1,4} - 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_0^{(1)}} =& \lambda^{-1/2}\left\{1 + \frac{\delta\mu_{1,3}}{2\lambda\sqrt{n}} - \frac{\delta\mu_0(\mu_{1,4} - 1)}{4\lambda\sqrt{n}} - \frac{\delta^2}{8\lambda n}(\mu_{1,4} - 1)\right. \\ &\left. + \frac{3}{8}\left(\frac{\delta^2\mu_{1,3}^2}{\lambda^2 n} + \frac{\delta^2\mu_0(\mu_{1,4} - 1)}{4\lambda^2 n} - \frac{\delta^2\mu_0\mu_{1,3}(\mu_{1,4} - 1)}{\lambda^2 n}\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

となり，これを (3.8) に代入して，$\mu = \mu_0 + (\delta/\sqrt{n})$ とすれば

$$\begin{aligned}
\gamma_n :=& \frac{C_n^{(0)}\sigma_{1n} - \mu\sqrt{n}}{\sqrt{V_K(Y_n)}} \\
=& \lambda^{-1/2}\Big[-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha + \frac{A_0\sigma_0^{(0)}}{6\sqrt{n}}(u_\alpha^2 - 1) + \frac{u_\alpha^2}{4\sqrt{n}}\{\mu_0(\mu_{0,4} - 1) - 2\mu_{0,3}\} \\
&+ \frac{\mu_0}{8\sqrt{n}}(\mu_{0,4} - \mu_{1,4}) + \frac{u_\alpha}{4\sqrt{\lambda n}}(\delta - \sigma_0^{(0)}u_\alpha)\{\mu_0(\mu_{1,4} - 1) - 2\mu_{1,3}\} \\
&+ \frac{\delta\mu_{1,3}}{2\lambda\sqrt{n}}(-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha) - \frac{\delta\mu_0(\mu_{1,4} - 1)}{4\lambda\sqrt{n}}(-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha) + O\left(\frac{1}{n}\right)\Big] \\
=:& \lambda^{-1/2}\left\{ -\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha + \frac{d}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

になる．さて，対立仮説 K の下で，Y_n の 3 次のキュムラントは (2.14) より $\mu = \mu_0 + (\delta/\sqrt{n})$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\kappa_{3,K}(Y_n) =& \kappa_{3,\mu,\sigma_0^{(1)}u_\alpha}(Y_n) \\
=& \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\mu_{1,3} - \frac{\mu_0}{16}\{12(2(\mu_{1,4} - 3) - \mu_{1,3}^2) - 12\mu_0(\mu_{1,5} - \mu_{1,3}(\mu_{1,4} + 5)) \\
&+ \mu_0^2(1 + 2\mu_{1,6} - 12\mu_{1,3}^2 - 3\mu_{1,4}^2)\}\Big] + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
=:& \frac{1}{\sqrt{n}}A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

となる．そこで，$W_n := Y_n/\sqrt{V_K(Y_n)}$ とすれば，$E_K(W_n) = 0$, $V_K(W_n) = 1$ となり，(3.7), (3.9), (3.11) より

$$\begin{aligned}
\kappa_{3,K}(W_n) &= \frac{1}{\{V_K(Y_n)\}^{3/2}}\kappa_{3,K}(Y_n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}A_1\sigma_0^{(1)^{-3}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}A_1\lambda^{-3/2} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

になる．よって，Edgeworth 展開を用いて，任意の実数 a について

$$P_K\{W_n \le a\} = \Phi(a) - \frac{A_1}{6\lambda^{3/2}\sqrt{n}}(a^2 - 1)\phi(a) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

となるから，(3.6) より検出力関数

$$\begin{aligned}
\beta(\delta) =& P_K\{W_n \ge \gamma_n\} \\
=& 1 - \Phi(\lambda^{-1/2}(-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha)) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda n}}\left\{\frac{A_1}{6\lambda}(\lambda^{-1}(-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha)^2 - 1) - d\right\}\phi(\lambda^{-1/2}(-\delta + \sigma_0^{(0)}u_\alpha)) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

を得る．ただし

$$
\begin{aligned}
d =&\frac{1}{6}A_0\sigma_0^{(0)}(u_\alpha^2-1)+\frac{u_\alpha^2}{4}\{\mu_0(\mu_{0,4}-1)-2\mu_{0,3}\}+\frac{\mu_0}{8}(\mu_{0,4}-\mu_{1,4})\\
&+\frac{1}{4\sqrt{\lambda}}u_\alpha(\delta-\sigma_0^{(0)}u_\alpha)\{\mu_0(\mu_{1,4}-1)-2\mu_{1,3}\}+\frac{\delta\mu_{1,3}}{2\lambda}(-\delta+\sigma_0^{(0)}u_\alpha)\\
&-\frac{1}{4\lambda}\delta\mu_0(\mu_{1,4}-1)(-\delta+\sigma_0^{(0)}u_\alpha)
\end{aligned}
$$

とする．

4 応用例

非心 t 統計量に基づく検定の検出力関数をいくつかの例について述べる．

例 4.1（正規分布） まず，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に，いずれも $N(\mu, 1)$ に従う確率変数列とする．このとき，仮説 $H:\mu=0$，対立仮説 $K:\mu=\delta/\sqrt{n}$ の水準 α の検定問題を考える．ただし，$\delta>0$ とする．いま，H の下で統計量 $T_n=\sqrt{n}\bar{X}/S_n$ は自由度 $n-1$ の (中心)t 分布 (t_{n-1} 分布) に従うので，$t_\alpha=t_\alpha(n-1)$ を t_{n-1} 分布の上側 $100\alpha\%$ 点とすれば，(3.4) と同様にして T_n に基づく検定の検出力関数は

$$
\begin{aligned}
\beta_0(\delta)&=P_K\{T_n>t_\alpha\}=P_K\left\{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)-t_\alpha(S_n-\sigma_{1n})>-\delta+t_\alpha\sigma_{1n}\right\}\\
&=P_K\left\{\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)-t_\alpha(S_n-b_{n-1})}{\sqrt{1+t_\alpha^2(1-b_{n-1}^2)}}>\frac{t_\alpha b_{n-1}-\delta}{\sqrt{1+t_\alpha^2(1-b_{n-1}^2)}}\right\} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

になる．ただし

$$
\begin{aligned}
\sigma_{1n}&=E_K(S_n)=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=b_{n-1},\\
V_K&\left(\sqrt{n}\left(\bar{X}-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)-t_\alpha(S_n-b_{n-1})\right)=1+t_\alpha^2(1-b_{n-1}^2)
\end{aligned}
$$

となることに注意．ここで

$$
b_{n-1}=1-\frac{1}{4n}-\frac{7}{32n^2}-\frac{19}{128n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)
$$

より

$$
1-b_{n-1}^2=\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\frac{3}{16n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)
$$

であるから

$$
\frac{t_\alpha b_{n-1}-\delta}{\sqrt{1+t_\alpha^2(1-b_{n-1}^2)}}=t_\alpha-\delta-\frac{t_\alpha}{4n}\{t_\alpha(t_\alpha-\delta)+1\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.2)
$$

になる．また，Cornish-Fisher 展開によって

$$t_\alpha = t_\alpha(n-1) = u_\alpha + \frac{1}{4n}(u_\alpha^3 + u_\alpha) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になるから，(4.2) より

$$\frac{t_\alpha b_{n-1} - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_{n-1}^2)}} = u_\alpha - \delta + \frac{1}{4n}u_\alpha^2\delta + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる．さて，

$$W_n := \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) - t_\alpha(S_n - b_{n-1})}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_{n-1}^2)}}$$

とおくと，対立仮説 K の下で W_n の平均，分散，3 次のキュムラントは

$$E_K(W_n) = 0, \quad V_K(W_n) = 1, \quad \kappa_{3,K}(W_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる ([A95])．よって Edgeworth 展開を用いて，任意の実数 a について

$$P_K\{W_n \le a\} = \Phi(a) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる．このとき (4.1) から

$$\beta_0(\delta) = P_K\left\{W_n > \frac{t_\alpha b_{n-1} - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_{n-1}^2)}}\right\} = 1 - \Phi(u_\alpha - \delta) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.3}$$

になる．

一方，一般の非心 t 統計量に基づく検定の検出力関数 (3.12) を用いると，いまの場合，$\mu_0 = 0$，$\mu = \delta/\sqrt{n}$，$\mu_{0,2} = \mu_{1,2} = 1$，$\mu_{0,3} = \mu_{1,3} = \mu_{0,5} = \mu_{1,5} = 0$，$\mu_{0,4} = \mu_{1,4} = 3$，$\sigma_0^{(0)} = 1$，$A_0 = A_1 = d = 0$，$\lambda = 1$ となるから

$$\beta(\delta) = 1 - \Phi(u_\alpha - \delta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり，(4.3) から

$$\beta_0(\delta) - \beta(\delta) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる．

例 4.2 (対称分布) まず，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度関数 $f(x-\mu)$ をもつ分布に従う確率変数列とする．ただし，μ は実母数とする．ここで，$f(\cdot)$ を偶関数とし，$V_\mu(X_1) = E_\mu[(X_1-\mu)^2] = 1$ とする．このとき，$\mu_1' := E_\mu(X_1) = \mu$ で，任意の奇数 j (≥ 3) に対して $\mu_j := E_\mu[(X_1-\mu)^j] = 0$ になる．いま，仮説 $H : \mu = 0$, 対立仮説 $K : \mu = \delta/\sqrt{n}$ の水準 α の検定問題を考える．ただし，$\delta > 0$ とする．このとき，一般の非心 t 統計量に基づく検定の検出力関数 (3.12) を用いると，いまの場合，$\mu_0 = 0, \mu_{0,2} = \mu_{1,2} = 1$, $\mu_{0,3} = \mu_{1,3} = \mu_{0,5} = \mu_{1,5} = 0$, $\mu_{0,4} = \mu_{1,4} = k$ (定数), $\sigma_0^{(0)} = 1$, $A_0 = A_1 = d = 0$, $\lambda = 1$ となるから，例 4.1 と同様に

$$\beta(\delta) = 1 - \Phi(u_\alpha - \delta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる．

例 4.3 (指数分布) まず，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に，いずれも p.d.f.

$$f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & (x > \theta), \\ 0 & (x \leq \theta) \end{cases}$$

をもつ指数分布に従う確率変数列とする．ただし，θ は実母数とする．このとき，$\mu := \mu_1' = E_\theta(X_1) = \theta + 1$ になり，また，$\mu_j := E_\theta[(X_1-\theta)^j]$ ($j = 2, \ldots, 6$) とすると，$\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$, $\mu_4 = 9$, $\mu_5 = 44$, $\mu_6 = 265$ になる．いま，仮説 $H : \mu = 1$, 対立仮説 $K : \mu = 1 + (\delta/\sqrt{n})$ の水準 α の検定問題を考える．ただし，$\delta > 0$ とする．ここで，一般の非心 t 統計量に基づく検定の検出力関数 (3.12) を用いると，いまの場合，$\mu_0 = 1, \mu_{0,2} = \mu_{1,2} = 1$, $\mu_{0,3} = \mu_{1,3} = 2$, $\mu_{0,4} = \mu_{1,4} = 9$, $\mu_{0,5} = \mu_{1,5} = 44$, $\mu_{0,6} = \mu_{1,6} = 265$ より $\lambda = 1$, $\sigma_0^{(0)} = 1, A_0 = A_1 = -7$ となり，

$$d = -\frac{7}{6}(u_\alpha^2 - 1) + \delta^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

になるから，

$$\beta(\delta) = 1 - \Phi(u_\alpha - \delta) + \frac{\delta}{6\sqrt{n}}(14u_\alpha - 13\delta)\phi(u_\alpha - \delta) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.4}$$

になる．このとき，検出力関数の 2 次近似 (4.4) の数値計算を行う[*1]．

[*1] 数値計算とグラフは橋本真太郎氏 (広島大) による．

表 1　検出力関数の 2 次近似 (4.4) の数値計算 ($\alpha = 0.05$)

n	$\delta = 2.0$	$\delta = 2.5$	$\delta = 3.0$	$\delta = 3.5$	$\delta = 4.0$
10	0.5214173	0.4583422	0.5100916	0.6723140	0.8385670
20	0.5557862	0.5595156	0.6279000	0.7589806	0.8831381
30	0.5710122	0.6043362	0.6800910	0.7973754	0.9028838
40	0.5800887	0.6310546	0.7112031	0.8202632	0.9146546
50	0.5862828	0.6492881	0.7324350	0.8358826	0.9226874
70	0.5944086	0.6732082	0.7602886	0.8563733	0.9332254
100	0.6016530	0.6945333	0.7851205	0.8746411	0.9426202

表 2　検出力関数の 2 次近似 (4.4) の数値計算 ($\alpha = 0.01$)

n	$\delta = 2.0$	$\delta = 2.5$	$\delta = 3.0$	$\delta = 3.5$	$\delta = 4.0$
10	0.6339909	0.5724966	0.4264199	0.4018165	0.5501248
20	0.5572792	0.5714521	0.5211163	0.5417949	0.6680951
30	0.5232946	0.5709894	0.5630684	0.6038077	0.7203579
40	0.5030358	0.5707136	0.5880768	0.6407747	0.7515127
50	0.4892105	0.5705253	0.6051434	0.6660021	0.7727737
70	0.4710734	0.5702784	0.6275326	0.6990974	0.8006656
100	0.4549039	0.5700582	0.6474929	0.7286024	0.8255317

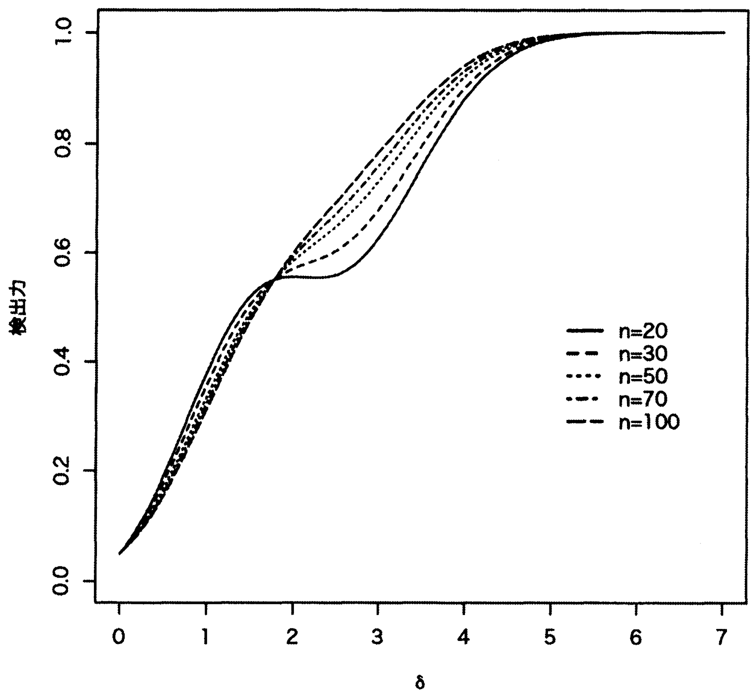

図 1　$\alpha = 0.05$ のときの検出力関数の 2 次近似 (4.4) のグラフ

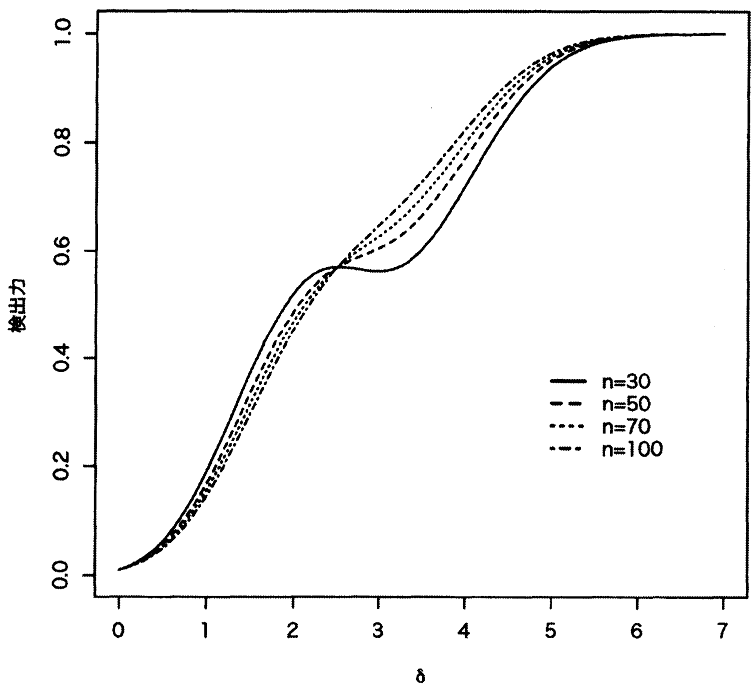

図 2　$\alpha = 0.01$ のときの検出力関数の 2 次近似 (4.4) のグラフ

5 おわりに

本稿では，正規性の条件を外したときに，非心 t 統計量の分布のパーセント点の近似を用いて仮説検定問題において検出力関数を漸近的に求めた．実際に，Edgeworth 展開を用いて $1/\sqrt{n}$ のオーダーまで求めたが，その先のオーダーまで求めることも可能である．また，検出力関数は非心 t 統計量の裾確率の計算になるので，大偏差確率の観点から論じることもできるであろう．

参考文献

[A95] Akahira, M. (1995). A higher order approximation to a percentage point of the non-central t-distribution. *Commun. Statist.– Simula. Comput.*, **24**(3), 595–605.

[AST95] Akahira, M., Sato, M. and Torigoe, N. (1995). On the new approximation to non-central t-distributions. *J. Japan. Statist. Soc.*, **25**(1), 1–18.

[AOK13] Akahira, M., Ohyauchi, N. and Kawai, S. (2013). A higher order approximation to a percentage point of the distribution of a non-central t-statistic without the normality assumption. *Commun. Statist.– Simula. Comput.*, **42**(9), 2086–2105.

[B93] Bagui, S. C. (1993). *CRC Handbook of Percentiles of Noncentral t-Distributions.* CRC Press, Florida.

[BJSZ07] Bentkus, V., Jing, B.-Y., Shao, Q.-M. and Zhou, W. (2007). Limiting distributions of the non-central t-statistic and their applications to the power of t-tests under non-normality. *Bernoulli*, **13**(2), 346–364.

[JKB95] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions.* 2nd ed., Wiley, New York.