数理解析研究所講究録
第2001巻 2016年 74-82



# 一般化された高木関数とそのウェーブレット展開について
# On the generalized Takagi function and its wavelet expansion

松江工業高等専門学校人文・数理科学科　福田　尚広 (Naohiro Fukuda)
National Institute of Technology, Matsue College
筑波大学大学院数理物質科学研究科　木下　保 (Tamotu Kinoshita)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba
筑波大学大学院数理物質科学研究科　鈴木　俊夫 (Toshio Suzuki)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

## 1　はじめに

高木関数とは，１９０３年に高木貞治氏により発表された，至る所微分不可能な連続関数である．高木関数は，のこぎり型関数 $S(x)=\min_{k\in\mathbf{N}}|x-k|$ を用いて

$$T(x)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}S(2^{j}x) \tag{1}$$

で定義される．(1) を区間 $[0,1]$ に制限したものを考えると，2次の B-spline 関数

$$N_2(x)=\begin{cases} x & \text{if } 0\leq x\leq 1, \\ 2-x & \text{if } 1\leq x\leq 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いることで，

$$T(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^{j}-1}2^{-j-1}N_2(2^{j+1}x-2k) \tag{2}$$

と書きなおすことができる．

## 1.1 一般化された高木関数

一般化された高木関数は，次の形で与えられる：

$$F(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j t^j G\left(\Psi^j(x)\right). \tag{3}$$

ここで，$\Psi^j$ は $\Psi$ を $j$ 回合成した関数，即ち，$\Psi^j(x)=\Psi^{j-1}(\Psi(x))$ とする．$G$ は初期関数と呼ばれ，$\mathrm{supp}\, G\subset[0,1]$ を満たす．いま，$G(x)=N_2(2x)$，$c_j=1$，$t=2^{-1}$，$\Psi$ を 2 次の Bernoulli シフト写像

$$B_2(x)=\begin{cases}2x & \text{if } 0<x\le\frac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{if } \frac{1}{2}<x\le 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ととると，高木関数 (1) の別表現

$$T(x)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}N_2\left(2B_2^j(x)\right)$$

が得られる．一般化された高木関数は様々な研究が行われており，例えば次のような結果が知られている．

**Proposition 1.1 (M. Krüppel, M. Yamaguti and M. Hata)** 初期関数 $G$ は $\mathrm{supp}\, G\subset[0,1]$ を満たすとし，$c_j=1$ とする．このとき，一般化された高木関数 (3) は

$$F(t,x)=tF\left(t,\Psi(x)\right)+G(x),\quad (t,x)\in[0,1]\times\mathbf{R}$$

を満たす．

一方，$c_j=(j+1)^{-1}$ に対して，我々は以下を示した．

**Proposition 1.2** 初期関数 $G\mathrm{supp}\, G\subset[0,1]$ を満たし，$c_j=(j+1)^{-1}$ とする．このとき，一般化された高木関数 (3) は

$$F(t,x)=tF\left(t,\Psi(x)\right)-t\int_0^1 sF\left(ts,\Psi(x)\right)ds+G(x),\quad (t,x)\in[0,1]\times\mathbf{R}$$

を満たす．

## 1.2 Main Results

Bernoulli シフト写像は次の形に一般化される：

$$B_p(x) = \begin{cases} px & \text{if } \ 0 < x \le 1 \cdot p^{-1}, \\ px - 1 & \text{if } \ 1 \cdot p^{-1} < x \le 2 \cdot p^{-1}, \\ px - 2 & \text{if } \ 2 \cdot p^{-1} < x \le 3 \cdot p^{-1}, \\ \vdots & \\ px - (p-1) & \text{if } \ (p-1) \cdot p^{-1} < x \le 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

いま，各 $p$ に対して初期関数を

$$G(x) = \sum_{k=0}^{p-2} g(k+1) N_2(px - k)$$

とおく．ここで，各 $1 \le k \le p-1$ に対して，$g(k) \in \mathbf{R}$ とし．$g(0) = g(p) = 0$ と定める．$x \in [0,1]$ に対して，その $p$ 進法での表現

$$x = 0.\xi_1 \xi_2 \cdots = 0 + \xi_1 p^{-1} + \xi_2 p^{-2} + \cdots$$

を考え，これにより定まる列 $\{\xi_j\}$ に対して，

$$D_J^{(p)} = \sum_{j=1}^{J} c_{j-1} \left( g(\xi_j + 1) - g(\xi_j) \right)$$

を定める．$x \in [0,1]$ を $p$ 進数で展開した際に，有限小数となるものを $p$-adic rational，無限小数となるものを non $p$-adic rational と呼ぶことにする．$x$ が non $p$-adic rational のとき，$\xi_J \ne 0$ なるようなものが $\xi_J$ が無限個取れる．そこで，$\xi_{J_m^-} \ne 0$ となる部分列 $\{J_m^-\}$ を考え，

$$r_m^- := c_{J_m^- - 1} \Big( 2g(\xi_{J_m^-}) - g(\xi_{J_m^-} - 1) - g(\xi_{J_m^-} + 1) \Big) \xi_{J_m^-}$$

と定める．$\xi_{J_m^-} \ne 0$ であるから，$g(\xi_{J_m^-} - 1)$ は well-defined である．

同様にして，$x$ が non $p$-adic rational のとき，$\xi_J \ne p-1$ なるようなものが $\xi_J$ が無限個取れる．$\xi_{J_m^+} \ne p-1$ となる部分列 $\{J_m^+\}$ を考え，

$$r_m^+ := c_{J_m^+ - 1} \Big( 2g(\xi_{J_m^+} + 1) - g(\xi_{J_m^+}) - g(\xi_{J_m^+} + 2) \Big) (\xi_{J_m^+} + 1)$$

と定める．$\xi_{J_m^+} \ne p-1$ であるから，$g(\xi_{J_m^+} + 2)$ は well-defined である．

これらを用いることで，次の定理が導かれる．

**Theorem 1.3** $p \geq 2$とし，$1 \leq k \leq p-1$に対して，$g(k) \in \mathbf{R}$と定め，$g(0) = g(p) = 0$とする．$t = p^{-1}$, $\Psi(x) = B_p(x)$, $G(x) = \sum_{k=0}^{p-2} g_{k+1} N_2(px - k)$ とおき，

$$\mathbf{T}(x) := F(p^{-1}, x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j p^{-j} G\Big(B_p^j(x)\Big).$$

を考える．このとき，$\mathbf{T}(x)$ は以下の条件の少なくとも 1 つを満たすとき，$x \in [0,1]$ で微分不可能である：

*(i)* $\left\{D^{(p)}_{J_m^+} + r_m^+\right\}_{m \in \mathbf{N}}$ が収束しない．

*(ii)* $x$ が *non p-adic rational* のとき，$\left\{D^{(p)}_{J_m^-} + r_m^-\right\}_{m \in \mathbf{N}}$ が収束しない．

*(iii)* $x$ が *non p-adic rational* のとき，$\lim_{m \to \infty}\left(D^{(p)}_{J_m^+} + r_m^+\right) \neq \lim_{m \to \infty}\left(D^{(p)}_{J_m^-} + r_m^-\right)$.

$(iii)$ の条件の，$\lim_{m \to \infty}\left(D^{(p)}_{J_m^+} + r_m^+\right)$ は右側微分係数，$\lim_{m \to \infty}\left(D^{(p)}_{J_m^-} + r_m^-\right)$ は左側微分係数を表している．つまり，$D^{(p)}_{J_m^{\pm}}$ と $r_m^{\pm}$ という，微分係数を表す量を導入することにより，微分不可能性に関する結果を記述することができた．

高木関数 (3) についての non p-adic rational $x = 0.101010\cdots$ における微分不可能性を，この定理を用いて考えてみよう．この $x$ に対して，$J_m^+ = 2m$，$J_m^- = 2m-1$ であり，

$$\begin{aligned}
D^{(2)}_{J_m^+} &= \sum_{j=1}^{2m}(1 - 2\xi_j) = (1-1) + \cdots + (1-1) = 0 \quad \text{for all } m \in \mathbf{N} \\
D^{(2)}_{J_m^-} &= \sum_{j=1}^{2m-1}(1 - 2\xi_j) = 1 + (-1+1) + \cdots + (-1+1) = 1 \quad \text{for all } m \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

さらに，$r_m^{\pm} = 2$ であることがわかる．上の定理の条件 (iii) を用いることにより，$T(x)$ は $x = 0.101010\cdots$ で微分不可能であることがわかる．

Lipschitz 連続である関数は離散ウェーブレットで展開することができる．また，$T(x)$ は絶対連続でもあるから，超関数の意味で微分することができる．今回，我々は Haar ウェーブレットを用いて，高木関数をウェーブレット展開し，その $L^2$ ノルムを算出することに成功した．

**Theorem 1.4** $c_j = 1$, $(j+1)^{-1}$ に対して，関数

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j 2^{-j} N_2\Big(2B_2^j(x)\Big)$$

は，*Haar* ウェーブレット $\psi^H$ を用いて，

$$T(x) = \sum_{J\in\mathbf{Z}} \sum_{K\in\mathbf{Z}} d_{J,K}\psi^H_{J,K}(x),$$

$$d_{J,K} = \begin{cases} 2^{-3/2J} \sum_{j=0}^{J-1} c_j \left(2\left[\dfrac{K \bmod 2^{J-j}}{2^{J-j-1}}\right] - 1\right) & \text{if } 0 \le j \le J-1, K \ge 0, \\ 2^{J/2-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j 2^{-j} & \text{if } J \le -1, K = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{4}$$

と展開できる．ここで，$[x]$ は，$x$ を超えない最大の整数を表す．また特に $c_j = (j+1)^{-1}$ のとき，$\|T\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{1}{3}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + (\log 2)^2$，$\|T'\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{2}{3}\pi^2$ となる．ここで，$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ は多重対数関数と呼ばれる特殊関数である．

## 2 高木関数の $L^2$ ノルム

ここでは，Theorem 1.4 の $c_j = (j+1)^{-1}$ における，$\|T\|_{L^2}$ の値を直接的に求めてみることを考える．次の補題を準備する．

**Lemma 2.1**

$$\int_0^1 N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right) N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{3} & (j_1 = j_2) \\ \frac{1}{4} & (j_1 \ne j_2) \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)\right) \frac{d}{dx}\left(N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)\right) dx = \begin{cases} 4^{j+1} & (j_1 = j_2 = j) \\ 0 & (j_1 \ne j_2) \end{cases} \tag{6}$$

**Proof** まず (5) 式を計算する．
$(a)$ $j_1 = j_2$ のとき：

$$\begin{aligned} \int_0^1 N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right) N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right) dx &= 2^{j_1} \int_0^{1/2^{j_1}} \left\{N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)\right\}^2 dx \\ &= 2^{j_1+1} \int_0^{1/2^{j_1+1}} (2^{j_1+1}x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$(b)$ $j_1 \neq j_2$ のとき：$j_1 < j_2$ とする．

$$\begin{aligned}\int_0^1 N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx &= 2^{j_1+1}\int_0^{1/2^{j_1+1}} N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx \\ &= 2^{2j_1+2}\int_0^{1/2^{j_1+1}} xN_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx\end{aligned}$$

ここで，

$$\int_0^{1/2^{j_2}} (x+k)N_2\left(B_2^{j_2}(x)\right)dx = \frac{1}{2^{2(j_2+1)}} + \frac{k}{2^{j_2+1}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2^{j_1+1}} xN_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx &= \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1-1}-1}\int_{k/2^{j_2+1}}^{(k+1)/2^{j_2+1}} xN_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1-1}-1}\int_0^{1/2^{j_2+1}}\left(x+\frac{k}{2^{j_2}}\right)N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1-1}-1}\left(\frac{1}{2^{2(j_2+1)}}+\frac{k}{2^{2j_2+1}}\right) = \frac{1}{2^{2j_1+4}}.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx &= 2^{2j_1+2}\int_0^{1/2^{j_1+1}} xN_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)dx \\ &= 2^{2j_1+2}\frac{1}{2^{2j_1+4}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

を得る．Haar ウェーブレットは

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \frac{1}{2}), \\ -1 & (\frac{1}{2} \le x < 1), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義される．ウェーブレットの定義から，$\{\psi^H_{j,k} = 2^{j/2}\psi^H(2^j \cdot -k) \mid j,k \in \mathbf{Z}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる．また，超関数の意味で微分をすると，

$$\frac{d}{dx}N_2(x) = \psi^H(2x)$$

となるから，(6) 式については，

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)\right)\frac{d}{dx}\left(N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1} 2^{j_1+1}\psi^H(2^{j_1}x-k_1)\sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_2+1}\psi^H(2^{j_2}x-k_2) \\
&= \int_0^1 \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1} 2^{j_1/2+1}\psi^H_{j_1,k_1}(x)\sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_2/2+1}\psi^H_{j_2,k_2}(x)dx \\
&= \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_1/2+j_2/2+2}\int_0^1 \psi^H_{j_1,k_1}(x)\psi^H_{j_2,k_2}(x)dx \\
&= \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_1/2+j_2/2+2}\delta_{j_1,j_2}\delta_{k_1,k_2} = \begin{cases} 4^{j+1} & (j_1=j_2=j) \\ 0 & (j_1\neq j_2)\end{cases}
\end{aligned}$$

さて，この Lemma を用いると，

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbf{R}}\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)}N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)\right)\left(\sum_{j_2=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j_2}(j_2+1)}N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)\right)dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j(j+1)^2}\int_0^1\left(N_2\left(2B_2^{j}(x)\right)\right)^2dx \\
&\qquad + \sum_{j_1\neq j_2}\frac{1}{2^{j_1+j_2}(j_1+1)(j_2+1)}\int_0^1\left(N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)\right)\left(N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j(j+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{j_1\neq j_2}\frac{1}{2^{j_1+j_2}(j_1+1)(j_2+1)} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j(j+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{j_1=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)}\left(\sum_{j_2=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j_2}(j_2+1)}-\frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j(j+1)^2}+\frac{1}{4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j(j+1)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)+(\log 2)^2
\end{aligned}$$

同様にして,

$$
\begin{aligned}
\|T'\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbf{R}} \left( \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)} \frac{d}{dx} N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right) \right) \left( \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_2}(j_2+1)} \frac{d}{dx} N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right) \right) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} \int_0^1 \left(N_2\left(2B_2^j(x)\right)\right)^2 dx \\
&\quad + \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{2^{j_1+j_2}(j_1+1)(j_2+1)} \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(N_2\left(2B_2^{j_1}(x)\right)\right) \frac{d}{dx}\left(N_2\left(2B_2^{j_2}(x)\right)\right) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} 4^{j+1} = \frac{2}{3}\pi^2
\end{aligned}
$$

を得る. [7] では, $T$ の $L^2$ ノルムの値を, 離散ウェーブレットや Fourier 解析の手法を用いて値を求めた. しかし, 上にあるように, 実際に直接的に求めることも可能である. Theorem 1.3 と Theorem 1.4 を始めとした詳細や証明については, 投稿中の論文 [7] をお待ちください.

## References


[1] P. C. Allaart and K. Kawamura, The improper infinite derivatives of Takagi's nowhere-differentiable function, J. Math. Anal. Appl., **372**, 656–665 (2010).

[2] P. C. Allaart and K. Kawamura, The Takagi function: a survey, Real Anal. Exchange, **37**, 1–54 (2011/2012).

[3] E. G. Begle and W. L. Ayres, On Hildebrandtf's example of a function without a finite derivative, Amer. Math. Monthly, **43**, 294–296 (1936).

[4] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[5] N. Fukuda and T. Kinoshita, On non-symmetric orthogonal spline wavelets, Southeast Asian Bull. Math., **36**, No. 3, 319–341 (2012).

[6] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions, to appear in Int. J. Wavelets. Multiresolut. Inf. Process., **14**, No.1, 1–18 (2016).

[7] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On a Generalization of the Takagi Function and its Wavelet Expansion, preprint.

[8] N. Kôno, On generalized Takagi functions, Acta Math. Hungar, **49**, No. 3-4, 315–324 (1987).

[9] M. Krüppel, On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function, Rostock, Math.Kolloq., **62**, 41–59 (2007).

[10] M. Krüppel, On the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function, Rostock. Math.Kolloq., **65**, 3–13 (2010).

[11] T. Takagi, A simple example of the continuous function without derivative, Phys.-Math. Soc. Japan, **1**, 176–177 (1903). The Collected Papers of Teiji Takagi, S. Kuroda, Ed., Iwanami 5–6(1973).

[12] M. Yamaguti and M. Hata, Weierstrass's function and chaos, Hokkaido Math. J., **12**, 333–342 (1983).

[13] M. Yamaguti and M. Hata, The Takagi function and its generalization, Japan, I. Appl Math., **1**, 183–199 (1984).