数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 1-7

W-algebras with non-admissible levels and the Deligne exceptional series

東京大学・大学院数理科学研究科　川節　和哉
Kazuya Kawasetsu
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

頂点作用素代数（VOA）の理論において, 指標のモジュラー不変性は重要な性質である.
VOA のうち比較的小さなものとして, W 代数がある. W 代数は, アフィン VOA に量子化された Drinfeld-Sokolov リダクションを適用して構成される VOA である. W 代数がモジュラー不変性を持つのは, レベルが許容数の場合に限られる, と予想され広く信じられてきた（cf. [KW3]）.
本稿では, 拡大の理論を用いて, その予想の反例を与える. また, 拡大の理論を用いてモジュラー不変性を示すことが出来るような W 代数を分類し, その結果, Deligne の例外系列と呼ばれる系列が現れることを観察する. この結果より, これまで考えられていたよりもずっと多くの, 性質の良い W 代数が存在する可能性が高まり, さまざまな応用が期待される.

1 Deligne 例外系列

Deligne 例外系列とは, 有限次元単純リー環の列

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

である [D]. これらのリー環の, 随伴表現のいくつかのテンソル積の既約成分に関して, Deligne 次元公式と呼ばれる, 注目すべき次元公式が確立されている [CdM, D, LM]. それらは, 双対 Coxeter 数 $h^\vee$ の有理式の形で表される. 例えば,

$$\dim \mathfrak{g} = \frac{2(h^\vee+1)(5h^\vee-6)}{h^\vee+6}, \quad \dim L(2\theta) = \frac{5h^{\vee 2}(2h^\vee+3)(5h^\vee-6)}{(h^\vee+12)(h^\vee+6)},$$

などである.
本稿では, Deligne 例外系列を前述の W 代数の研究において観察する.

2 頂点作用素代数

この章では, 頂点作用素代数の基本的な概念について復習する.

2.1 頂点代数と頂点作用素代数

頂点代数（VA）とは, ベクトル空間 V, 元 $|0\rangle \in V$（真空元）, 線形写像 $\partial : V \to V$（微分作用素）, 線形写像

$$Y : V \otimes V \to V((z)), \quad (a, b) \mapsto Y(a, z)b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) b z^{-n-1},$$

（z は形式元）の四つ組であって, 次の公理を満たすものである：

1. $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_V, \quad Y(a, z)|0\rangle \in a + V[[z]]z;$
2. $[\partial, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z), \quad \partial|0\rangle = 0;$
3. （局所性）任意の $a, b \in V$ に対して, ある $N \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $(z-w)^N [Y(a, z), Y(b, w)] = 0$.

形式的ベキ級数 $Y(a, z)$（$a \in V$）は, 頂点作用素と呼ばれる. 中心電荷 $c \in \mathbb{C}$ の頂点作用素代数（VOA）とは, 頂点代数 V と, 元 $\omega \in V$（共形元）の組であって, 次の公理を満たすものである：

1. $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega(n) z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ が, ベクトル空間 V 上に, Virasoro 代数 $\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} L_n \oplus \mathbb{C} C$ の, 中心電荷 c の加群の構造を引き起こす. つまり, V 上,

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{n^3 - n}{12} \delta_{n+m, 0} c$$

が成り立つ. さらに, L_0 の作用が半単純である. また, L_0 の各固有空間が有限次元である.

V を中心電荷 c の VOA とする. V 上の加群とは, ベクトル空間 M と, 線形写像 $Y^M : V \otimes M \to M((z))$, $(a, v) \mapsto Y^M(a, z)v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) v z^{-n-1}$, の組であって, 然るべき公理を満たすものである. 局所性と同様の公理や, $L_0 = \omega(1)$ が M に半単純に作用すること, 各斉次空間が有限次元であることなどを公理に持つ.

V の部分空間 I であって, $Y(V, z)I \subset I((z))$ を満たすものをイデアルという. I がイデアルであるとき, 商空間 V/I 上に中心電荷 c の VOA の構造が引き起こされる. V の真のイデアルが存在しないとき, V は単純であるという.

2.2 単純カレント拡大

本節では, 単純カレント拡大（cf. [C, L, Y]）について復習する.

V を VOA とする. 与えられた VOA から, 新しい VOA を構成する方法として, V と V-加群 M との直和 $V \oplus M$ を考えたい. 今, "積" $Y(a, z)b$ $(a, b \in V)$, $Y^M(a, z)v$ $(a \in V, v \in M)$ は与えられている. また, Y^M の転置 $(Y^M)^* : M \otimes V \to M((z))$ を考えることが出来る. そこで, 与えるべきは, M の元同士の "積" である.

M, N, P を V-加群とする. $\begin{pmatrix} P \\ M\ N \end{pmatrix}$-型の交絡作用素とは, 線形写像 $I : M \otimes N \to P\{z\}$, $(u, v) \mapsto I(u, z)v = \sum_{n \in \mathbb{C}} u(n) v z^{-n-1}$, であって, 然るべき公理を満たすものである. V の作用と "compatible" であることなどを公理に持つ. ここで, $P\{z\}$ は, P 係数の z の複素ベキを許す形式的ベキ級数のなす空間である.

V-既約加群 M が単純カレントであるとは, 任意の既約加群 N について, 既約加群 P が存在して, $\begin{pmatrix} P \\ M\ N \end{pmatrix}$-型の交絡作用素のなす線形空間が 1 次元であり, P と同値でない既約加群 P' に関

して, $\begin{pmatrix} P' \\ M\ N \end{pmatrix}$-型の交絡作用素のなす空間が 0 であることである．（これは, 任意の既約加群 N に対して, M, N のフュージョン積 $M \boxtimes N$ が再び既約加群であることと同値である）．

例（Virasoro 極小模型）． Virasoro 極小模型 $L(c, 0)$（$c = c_{p,q} = 1 - 6(p-q)^2/pq$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geq 2$, $(p, q) = 1$）を考える．既約加群 $L(c, h)$ が単純カレントであるための必要十分条件は, $h = 0, (p-2)(q-2)/4$ である．

例（アフィン VOA）． 非負整数レベル k の単純アフィン VOA $L_k(\mathfrak{g})$ の単純カレントはよく知られている．$\mathfrak{g} = E_7$ のとき, レベル 1 単純アフィン VOA $L_1(E_7)$ の既約加群の同値を除いた全体は, 随伴加群 $L_1(E_7)$ と $L_1(E_7; \varpi_7)$ であるが, 両者とも単純カレントである．（$\{\varpi_i\}_{i=1,\ldots,7}$ は E_7 の基本ウェイト．番号付けは Bourbaki に従う．）

V を C_2-余有限な単純 VOA とし, M を単純カレント V-加群とする．I を $\begin{pmatrix} V \\ M\ M \end{pmatrix}$-型の 0 でない交絡作用素とし, 任意の $u, v \in M$ に対して, $I(u, z)v \in V((z))$ とする．このとき, ある種の偶数性の仮定の下で,

$$Y^{\mathrm{new}} = Y \oplus Y^M \oplus \left(Y^M\right)^* \oplus I : (V \oplus M) \otimes (V \oplus M) \to (V \oplus M)((z))$$

によって, $V \oplus M$ が VOA の構造を持つ．これを, V の M による単純カレント拡大と呼ぶ．単純カレント拡大の一般論により, $V \oplus M$ は再び C_2-余有限である．さらに, V が有理的ならば, $V \oplus M$ は $\mathbb{Z}_2$-有理的である．ここで, $\mathbb{Z}_2$-有理的であるとは次で定義される．$W = V \oplus M$ とおく．二元からなる自己同型の群 $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{id}_W, \mathrm{id}_V \oplus (-\mathrm{id}_M)\}$ を考える．任意の $g \in \mathbb{Z}_2$ に関して, 任意の g-twisted W-加群が完全可約であり, g-twisted W-既約加群が同値を除いて有限個であるとき, $W = V \oplus N$ は $\mathbb{Z}_2$-有理的であると言う．

3 W 代数

3.1 W 代数とモジュラー不変性

W 代数は, ヴィラソロ VOA の拡大 [Zam] の一般化である．様々な研究が行われ, その後, 量子化された Drinfeld-Sokolov リダクション（量子リダクション）による構成が与えられた [FF, KRW, KW2]. 本節では, 量子リダクションを復習する．

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環, $f \in \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ のべき零元, $k \in \mathbb{C}$ を複素数とする．ユニバーサルアフィン VOA $M^k(\mathfrak{g})$（Segal-Sugawara 共形元 ω^{aff}）を考える．また, $\mathfrak{g}$ に依存して定まる特定の VOA $\mathcal{F}^{\mathrm{ne}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ch}}$（ボゾン・フェルミオン VOA）（共形元 $\omega^{\mathrm{ne}}, \omega^{\mathrm{ch}}$）を考える．テンソル積 VA $C = M^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{F}^{\mathrm{ne}} \otimes \mathcal{F}^{\mathrm{ch}}$ を考える．VA C に VOA の構造を, 共形元 $\omega = \omega^{\mathrm{aff}} + \omega^{\mathrm{ne}} + \omega^{\mathrm{ch}} + \partial x \in C$ によって入れる．ここで, x は $\mathfrak{g}$ の半単純元であって, $[x, f] = -f$ 等の条件を満たすものである．C 上のある特定の次数付け（L_0 による次数付けではない）と微分 d（f に依存して定まる）を考える．つまり, C に複体構造 $(C^\bullet, d)$（BRST 複体）を入れる．BRST 複体の 0-th コホモロジーを, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と書き, ユニバーサル W 代数と呼ぶ（C から VOA 構造を誘導する）．なお, 上記の構成において, アフィン VOA $M^k(\mathfrak{g})$ をその加群に置き換えて, 同様の構成を考えると, W 代数上の加群を得る．この構成法を, 量子化された Drinfeld-Sokolov リダクションと呼ぶ．

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の各斉次元のウェイトは, 半整数である. 単純商 VOA を $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ と書き, 単純 W 代数と呼ぶ.

W 代数のモジュラー不変な表現は, アフィン VOA $L_k(\mathfrak{g})$ のモジュラー不変な表現の 量子リダクションで得られると考えられている. 従って, 二条件『アフィン VOA $L_k(\mathfrak{g})$ の表現の指標がモジュラー不変性を持つこと』と,『レベル k が許容数であること』とは同値であるという Kac-Wakimoto 予想 [KW1] より, $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ が C_2-余有限かつ有理的であるのは, レベル k が許容数である場合に限られる, と広く信じられてきた（cf. [KW3]）.

ここで, $k \in \mathbb{C}$ が許容数であるとは,

$$k + h^\vee = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (p, q) = 1, \quad p \geq \begin{cases} h^\vee & (r^\vee, q) = 1, \\ h & (r^\vee, q) = r^\vee. \end{cases}$$

ここで, $r^\vee$ は レーシング数である. つまり, $\mathfrak{g} = ADE$ のとき $r^\vee = 1$, $\mathfrak{g} = BC$ のとき $r^\vee = 2$, $\mathfrak{g} = G_2$ のとき $r^\vee = 3$. 例えば, 非負整数は許容数である. また, 負整数は許容数でない.

本稿では, その反例, すなわち, C_2-余有限かつ有理的な W 代数であって, 非許容レベルを持つものを与える.

3.2 極小べき零元に付随する W 代数

f を $\mathfrak{g}$ の極小べき零元と仮定する. このとき f は, 最低ルートベクトル $f = f_\theta$ （θ は最高ルート）という形を持つ. 半単純元 $x = \theta/2 \in \mathfrak{g}$ を考える. このとき, W 代数 $W^k = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ は, 中心電荷

$$c_{\mathcal{W}} = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee} - 6k + h^\vee - 4. \tag{3.1}$$

の VOA である. $\mathrm{ad}(x)$-固有空間分解（極小次数付け）

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1.$$

を考える. $\mathfrak{g}^f$ を, $\mathfrak{g}$ における f の中心化部分代数とし, $\mathfrak{g}^\natural = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^f$ とおく.

W^k は, 共形元 ω と, 線形に定義された特定のプライマリーベクトル

$$J^{\{a\}}, \quad a \in \mathfrak{g}^\natural \quad (\text{共形ウェイト } 1);$$

$$G^{\{v\}}, \quad v \in \mathfrak{g}_{-1/2} \quad (\text{共形ウェイト } 3/2)$$

によって強生成され, これらの元による PBW 型の基底を持つ [KW2]. 強生成されるということは, VOA の頂点代数としての構造が, 生成元の間の作用素積展開（OPE）によって原理的に計算できることを意味する. これらの生成元の間の OPE は次で与えられる [KW2]

$$J^{\{a\}}(z)J^{\{b\}}(w) \sim \frac{J^{\{[a,b]\}}}{z-w} + \left(\left(k + \frac{1}{2}h^\vee \right)(a|b) - \frac{1}{4}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(a,b) \right) \frac{|0\rangle}{(z-w)^2},$$

$$J^{\{a\}}(z)G^{\{v\}}(w) \sim \frac{G^{\{[a,v]\}}}{z-w},$$

$$G^{\{u\}}(z)G^{\{v\}}(w) \sim X(z-w) \in \langle \omega, J^{\{a\}} | a \in \mathfrak{g}^\natural \rangle_{VA}[(z-w)^{-1}].$$

$X(z-w)$ は具体的に求められている（省略する）．ここで，$\kappa_{\mathfrak{g}_0}(\cdot,\cdot)$ は，リー環 $\mathfrak{g}_0$ の Killing 形式である．

$V^k = \langle J^{\{a\}} | a \in \mathfrak{g}^\natural \rangle_{VA}$ （$J^{\{a\}}$ で生成された頂点部分代数）とおく．これは，有限次元リー環 $\mathfrak{g}^\natural$ と，不変内積 $(a,b)^\natural = (k+h^\vee/2)(a|b) - 1/4\kappa_{\mathfrak{g}_0}(a,b)$ に付随するアフィン VOA である．その Segal-Sugawara 共形元を $\sigma \in V^k$ と置く．元 $\omega - \sigma$ は，ヴィラソロ VOA U^k を生成する．また，テンソル積 VOA $V^k \otimes U^k$ は W^k に埋め込まれている．

例． $\mathfrak{g} = E_8$ とする．このとき，$\mathfrak{g}_0 = E_7 \oplus \mathbb{C}\theta$, $\mathfrak{g}_{-1/2} = \underline{56}$ (E_7-加群として)，$\mathfrak{g}^f = E_7 \oplus \underline{56} \oplus f_\theta$, $\mathfrak{g}^\natural = E_7$ である．また，$a,b \in \mathfrak{g}^\natural$ に対して，$\kappa_{\mathfrak{g}_0}(a,b) = \kappa_{E_7}(a,b) = 2\cdot 18(a|b)$ である．よって，$(\cdot,\cdot)^\natural = (k+6)(\cdot|\cdot)$ である．従って，V^k はレベル $k+6$ アフィン VOA $M^{k+6}(E_7)$ （中心電荷 $c_{\mathrm{aff}} = 133(k+6)/(k+6+18)$）である．また，中心電荷を比べて，$U^k \cong V(c',0)$, $c' = c_{\mathcal{W}} - c_{\mathrm{aff}} = -3(k+6)(k+10)(2k+29)/(k+24)(k+30)$ である．

単純商 $\pi : W^k \to W_{\mathfrak{g},k} = \mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ を考える．$V_{\mathfrak{g},k} = \pi(V^k)$, $U_{\mathfrak{g},k} = \pi(U^k)$ とおく．このとき，テンソル積 VOA $V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$ が $W_{\mathfrak{g},k}$ に埋め込まれている．

そこで，$V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$-加群としての，$W_{\mathfrak{g},k}$ の分解を考えたい．

$\mathfrak{g}$ が A 型でないと仮定する．このとき，$\mathfrak{g}^\natural$ は半単純リー環である．また，次の条件を考える：

(1) $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k}$ は，C_2-余有限かつ有理的な単純 VOA;

(2) 随伴表現でない単純カレント $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k}$-加群 N, M が存在して，$W_{\mathfrak{g},k} \cong (V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}) \oplus (N \otimes M)$ （$V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$-加群として）である．

次が本稿の主定理である．

定理 3.1. *[K] 上の条件 (1), (2) を満たす組* $(\mathfrak{g},k)$ *の完全なリストは次で与えられる：*

1. $\mathfrak{g} = sp(4)$, $k = 1/2$;
2. $\mathfrak{g} = G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$, $k = -h^\vee/6$.

これら $(\mathfrak{g},k)$ *に関して，*$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f_\theta)$ *は* C_2*-余有限かつ* $\mathbb{Z}_2$*-有理的である．次の同型を得る：*

1. $\mathcal{W}_{1/2}(sp(4), f_\theta) \cong (L_1(A_1) \otimes L(-25/7,0)) \oplus (L_1(A_1;\alpha/2) \otimes L(-25/7,5/4))$,
2. $\mathcal{W}_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_\theta) \cong (V \otimes L(-3/5,0)) \oplus (N \otimes L(-3/5,3/4))$. *ただし，*$V$ *と* N *は，次の同型で定まる VOA* V *とその上の加群である：*

$$L_1(\mathfrak{g}) \cong (V \otimes L_1(A_1)) \oplus (N \otimes L_1(A_1;\theta/2)).$$

定理中のリストの 2 は，Deligne 例外系列を思い起こさせる．$\mathfrak{g} = A_1, A_2$, $k = -h^\vee/6 = -1/3, -1/2$ を考える．このとき，やはり上記の同型が成り立つ．（ただし，$\mathfrak{g} = A_1$ のときは，

$V = \mathbb{C}|0\rangle$, $N = 0$ と解釈する）．$\mathfrak{g}$ が Deligne 例外型リー環のとき, 同型は具体的には,

$$
\begin{aligned}
&W(A_1) \cong L(-3/5,0),\\
&W(A_2) \cong (V_{\sqrt{3}A_1} \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_{\sqrt{3}A_1+\sqrt{3}\alpha/2} \otimes L(-3/5,3/4)),\\
&W(G_2) \cong (V_3(A_1) \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_3(A_1;3\alpha/2) \otimes L(-3/5,3/4)),\\
&W(D_4) \cong (V_1(A_1)^{\otimes 3} \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_1(A_1;\alpha/2)^{\otimes 3} \otimes L(-3/5,3/4)),\\
&W(F_4) \cong (V_1(C_3) \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_1(C_3;\varpi_3) \otimes L(-3/5,3/4)),\\
&W(E_6) \cong (V_1(A_5) \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_1(A_5;\varpi_3) \otimes L(-3/5,3/4)),\\
&W(E_7) \cong (V_1(D_6) \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_1(D_6;\varpi_6) \otimes L(-3/5,3/4)),\\
&W(E_8) \cong (V_1(E_7) \otimes L(-3/5,0)) \oplus (V_1(E_7;\varpi_7) \otimes L(-3/5,3/4)).
\end{aligned}
$$

ここで, $V_{\sqrt{3}A_1}$ は, 格子 $\sqrt{3}A_1$ （A_1 はルート格子）に付随する格子 VOA である．

定理中の $(\mathfrak{g},k)$ に対して, 単純カレント拡大の一般論と分解の式より, $W_{\mathfrak{g},k} = \mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f_\theta)$ は C_2-余有限かつ $\mathbb{Z}_2$-有理的である．従って, [DLM, V] より, W の（ツイスト）表現の指標のモジュラー不変性を得る．

さて, $\mathfrak{g} = D_4, E_6, E_7, E_8$ のとき, 数 $k = -h^\vee/6 = -1,-2,-3,-5$ は許容数でない．そこで, この定理は, C_2-余有限かつ有理的であって, 非許容レベルを持つ W 代数の例を与える．

定理の証明は, $(\mathfrak{g},k)$ の組を制限すること, 定理のリスト中の $(\mathfrak{g},k)$ に関して同型を示すこと, に分けられる．同型を示すには, 両辺（右辺は単純カレント拡大の構造を入れる）の生成元と OPE を与えて, それらがコンパチブルであることを具体的に計算して示せばよい．

参考文献

[C] Carnahan, S. "Building vertex algebras from parts." arXiv preprint arXiv:1408.5215 (2014).

[CdM] Cohen, A. M., and de Man, R. "Computational evidence for Deligne's conjecture regarding exceptional Lie groups", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996): 427–432.

[D] Deligne, P. "La série exceptionalle de groupes de Lie", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996): 321–326.

[DLM] Dong, C., Li, H., and Mason, G. "Modular-Invariance of Trace Functions in Orbifold Theory and Generalized Moonshine." Comm. Math. Phys. 214.1 (2000): 1–56.

[FF] Feigin, B., and Frenkel, E. "Quantization of the Drinfel'd-Sokolov reduction". Phys. Lett. B, 246(1-2) (1990):75–81.

[KRW] Kac, V. G., Roan, Shi-Shyr, and Wakimoto, M. "Quantum reduction for affine superalgebras". Comm. Math. Phys., 241(2-3) (2003): 307-342.

[KW1] Kac, V. G., and Wakimoto, M. "Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras" Proc. Natl. Acad. Sci. 85 (1988): 4956–4960.

[KW2] Kac, V. G., and Wakimoto, M. "Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras." Adv. Math. 185.2 (2004): 400–458.

[KW3] Kac, V. G., and Wakimoto M. "On rationality of W-algebras." Transformation Groups 13.3-4 (2008): 671–713.

[K] Kawasetsu, K. "$\mathcal{W}$-algebras with non-admissible levels and the Deligne exceptional series." arXiv preprint arXiv:1505.06985 (2015).

[L] Lam, C. H. "Induced modules for orbifold vertex operator algebras." J. Math. Soc. Japan 53.3 (2001): 541–557.

[LM] Landsberg, J. M., and Manivel, L. "Triality, exceptional Lie algebras, and Deligne dimension formulas", Adv. Math. **171** (2002): 59–85.

[V] Van Ekeren, J. "Modular invariance for twisted modules over a vertex operator superalgebra." Comm. Math. Phys. 322.2 (2013): 333–371.

[Y] Yamauchi, H. "Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras." J. Pure and Appl. Alg. 189.1 (2004): 315–328.

[Zam] Zamolodchikov, A. B. "Infinite additional symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory." Theor. Math. Phys. 65.3 (1985): 1205–1213.