数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 25-35

$\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

京都大学・数理解析研究所　元良 直輝 *

Naoki Genra
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 研究の背景

$\mathcal{W}$ 代数とは, 複素有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数 $\mathfrak{g}$, その (even な) べき零元 f, 複素数 k, そして f に関して良い条件を満たす $\mathfrak{g}$ の半整数次数付け (good grading と呼ばれる) Γ によって定まるスーパー頂点代数の族である. これを

$$\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{g}, f;\Gamma)$$

と表す（詳しくは2章参照）. k を $\mathcal{W}$ 代数のレベルと呼び, 特に $h^{\vee}$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数とすると, $k=-h^{\vee}$ のときを臨界レベルという. k が非臨界レベル（$k\neq-h^{\vee}$）のとき, $\mathcal{W}$ 代数は共形ベクトルをもち, 共形的なスーパー頂点代数となる. $\mathfrak{g}, f$ が与えられたとき, Γ は少なくとも一つ存在し, しかも Γ の選び方によらず $\mathcal{W}$ 代数は同じスーパー頂点代数構造をもつ. ただし共形ウェイトは Γ の選び方に依存する.

$\mathcal{W}$ 代数は数多くの数学的にも物理的にも重要なスーパー頂点代数をその例として含んでいる. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ かつ f が正則べき零元ののとき Virasoro 代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$ かつ f が副正則べき零元ののとき Bershadsky-Polyakov 代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(1,2)$ かつ f が正則べき零元ののとき Super Virasoro 代数 (N=1 スーパーコンフォーマル代数), $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(1,2)$ かつ f が正則べき零元ののとき N=2 スーパーコンフォーマル代数などがある.

初めて $\mathcal{W}$ 代数を導入したのは Zamolodchikov [12] である. 彼は二次元共形場理論の研究の中で, Virasoro 代数の一般化の一つとして, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$ かつ f が正則べき零元のときに対応する $\mathcal{W}$ 代数を構成した. その後 Fateev と Lukyanov [3] によって A_n, B_n, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数と呼ばれるものが定義され, Feigin と Frenkel [5] によって一般の単純リー代数 $\mathfrak{g}$（かつ f はその正則べき零元）に対応する $\mathcal{W}$ 代数が定義された. それから de Boer と Tjin によるさらなる一般化を経て, 最終的に最も一般的な定義は, Kac, Roan, 脇本らによって与えられた [9].

注意しなければならないのは, Fateev と Lukyanov は $\mathcal{W}$ 代数をスクリーニング作用素と呼ばれる線形作用素を用いて, Heisenberg 頂点代数の部分頂点代数として構成したが, Feigin と Frenkel は（一般化のために）BRST コホモロジーを用いて $\mathcal{W}$ 代数を構成したという点である. BRST コホモロジーを用いた構成はさらなる一般化に向いていたため, その後の $\mathcal{W}$ 代数の定義には BRST コホモロジーが用いられた. すると Fateev と Lukyanov による構成は, Feigin と Frenkel 以降の

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\mathcal{W}$ 代数の定義と一致しているのか, という問題が残る. 以降, 二つの構成を区別するために, BRST コホモロジーによって構成された $\mathcal{W}$ 代数を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ と表すことにする. 次の結果は Feigin と Frenkel による.

定理 1.1 (Feigin-Frenkel [4][7]). $\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー代数, f をその正則べき零元, Γ をその (唯一の)good grading とする. k が generic のとき, BRST コホモロジーによって定義された $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の双対 $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha_i(z)}\, dz,$$

ただし $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha_i(z)$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルート α_i に対応する Heisenberg 頂点代数の場であり, $\int \cdot\, dz$ は形式的に z^{-1} の係数をとる操作を表す.

上式の $\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha_i(z)}\, dz$ は Heisenberg 頂点代数からその加群への線形作用素で, これがスクリーニング作用素である. このスクリーニング作用素による構成を $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現という. この定理より, Fateev と Lukyanov の A_n, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は, A_n, D_n 型の単純リー代数とその正則べき零元に付随する BRST コホモロジーによって定義された $\mathcal{W}$ 代数と一致することがわかる. したがって BRST コホモロジーによる $\mathcal{W}$ 代数の構成は, スクリーニング作用素による構成の一般化になっている.

しかしながら, 実は Fateev と Lukyanov の構成した B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は, B_n 型の単純リー代数に付随する $\mathcal{W}$ 代数と一致しないことが知られている. B_n 型の単純リー代数に限らず, 一般の単純リー代数（とそのべき零元）に付随する $\mathcal{W}$ 代数は頂点代数となるが, Fateev と Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数はスーパー頂点代数になることからも分かる. 以降, 区別するため Fateev と Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数を, 彼らの表記に倣って $\mathcal{W}B_n$ と表す. $\mathcal{W}B_n$ 代数は n だけではなくパラメータ $\gamma \in \mathbb{C}$ にもよっている（詳しくは 3 章参照）. $\mathcal{W}B_1$ は Super Virasoro 頂点代数であり, これはスーパーリー代数 $\mathfrak{osp}(1,2)$ とその (even part の) 正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数に一致する. 一般には次の予想がある.

予想 1.2. $\mathcal{W}B_n$ 代数は $\mathfrak{osp}(1,2n)$ とその (even part の) 正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数に一致する.

本稿の研究のきっかけは予想 1.2 にある. この予想を証明するために, まず定理 1.1 を拡張した. 実際には一般の $\mathfrak{g}, f$ に対して定理 1.1 は拡張できる（定理 5.2）. 特に Γ として特別な条件を満たすものがとってこれるときには, $\mathcal{W}$ 代数の新しい自由場実現を与えてくれる（定理 5.3）. この結果を用いて, 予想 1.2 は（非臨界レベルのとき）証明される（定理 6.1）. 一方で定理 5.3 より一般的な結果である定理 5.2 には, それとは別の応用がある. それがもう一つの結果である定理 6.2 である. 定理 6.2 は Feigin と Semikhatov [6] によって導入された $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数と呼ばれる頂点代数が $\mathfrak{sl}_n$ とその副正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数と一致することを示す. この証明には本質的に $\mathcal{W}$ 代数がスクリーニング作用素の核の形で実現されることが使われる. 本稿ではこれらの結果をまとめて報告する.

2 $\mathcal{W}$ 代数

Kac, Roan, 脇本らによる $\mathcal{W}$ 代数の定義を与える. $\mathfrak{g}$ を複素有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数とする. このとき $\mathfrak{g}$ は非退化 even 超対称不変双線形形式 $(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$

をもつ．そこで (even な) 長ルートに対して長さの二乗が 2 となるように正規化したものをとる．$\mathfrak{g}$ は一般にスーパーベクトル空間であり，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$$

なる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けをもつ．これをパリティという．ただし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ とする．$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ を $\mathfrak{g}$ の even part, $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ を $\mathfrak{g}$ の odd part という．f を $\mathfrak{g}$ の even part のべき零元, k を複素数とする．また

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

を $\mathfrak{g}$ の（スーパーリー代数としての）次数付けであって，$f \in \mathfrak{g}_{-1}$ かつ $f : \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-1}$ が $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射, $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射となるものとする．これを $\mathfrak{g}$ の f に関する good grading と呼ぶ．例えば, $\{e, h, f\}$ を f を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple とすると $\mathrm{ad}(\frac{1}{2}h)$ は $\mathfrak{g}$ に $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 次数付けを与えるが，これは good grading になっている（これを Dynkin grading と呼ぶ）．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数, Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系, Π をその単純ルートの集合であって，

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0, \quad \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\geq 0}$$

となるようにとる（いつでもこのようにとれる）．ただし Δ_+ は正ルートの集合, $\mathfrak{g}_\alpha$ は α のルートベクトル空間である．$j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して，

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}, \quad \Pi_j = \Pi \cap \Delta_j$$

とすると, Γ の満たす条件から

$$\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_{\frac{1}{2}} \cup \Pi_1$$

となることが知られている．$\alpha \in \Delta$ に対してルートベクトル e_α を一つとっておく．$\bar{\alpha}$ で e_α のパリティを表す．$\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ に対し, $c_{\alpha,\beta}^{\gamma}$ で構造定数を表す．また

$$I = \{1, \ldots, l\}, \quad l = \mathrm{rank}\mathfrak{g}$$

として, $\{e_i\}_{i \in I}$ を $\mathfrak{h}$ の基底とする．さらに, $V^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k のアファインスーパー頂点代数（affine vertex superalgebra），F^{ch} を $\mathfrak{g}_{>0}$ に付随するチャージフェルミオンスーパー頂点代数（charged fermion vertex superalgebra），F^{ne} を $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ に付随する中立フェルミオンスーパー頂点代数（neutral fermion vertex superalgebra）とする．$V^k(\mathfrak{g})$ の生成する場を $u(z)$（$u \in \mathfrak{g}$）とすると, $u, v \in \mathfrak{g}$ に対して

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u,v](w)}{z-w} + \frac{k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立つ．F^{ch} の生成する場を $\varphi_\alpha(z), \varphi^\alpha(z)$（$\alpha \in \Delta_{>0}$）とすると, これらは e_α のパリティとは逆のパリティ $(\bar{e}_\alpha + \bar{1})$ をもち, $\alpha, \beta \in \Delta_{>0}$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w) &\sim \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w}, \\ \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w) &\sim \ 0 \ \sim \varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(w) \end{aligned}$$

が成り立つ. $F^{\rm ne}$ の生成する場を $\Phi_\alpha(z)$ ($\alpha\in\Delta_{\frac{1}{2}}$) とすると, これは e_α と同じパリティをもち, $\alpha,\beta\in\Delta_{\frac{1}{2}}$ に対して

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w)\sim\frac{\chi([e_\alpha,e_\beta])}{z-w}$$

が成り立つ. ただし $u\in\mathfrak{g}$ に対して, $\chi(u)=(f|u)$ とする. このとき, スーパー頂点代数 $C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ を

$$C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma)=V^k(\mathfrak{g})\otimes F^{\rm ch}\otimes F^{\rm ne}$$

で定義する. また $C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ 上の odd な場 $d(z)$ を

$$d(z)=d_{\rm st}(z)+d_{\rm ne}(z)+d_\chi(z),$$

ただし

$$\begin{aligned}
d_{\rm st}(z)&=\sum_{\alpha\in\Delta_{>0}}(-1)^{\bar\alpha}:e_\alpha(z)\varphi^\alpha(z):-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta_{>0}}(-1)^{\bar\alpha\bar\gamma}c^\gamma_{\alpha,\beta}:\varphi_\gamma(z)\varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(z):,\\
d_{\rm ne}(z)&=\sum_{\alpha\in\Delta_{\frac{1}{2}}}:\varphi^\alpha(z)\Phi_\alpha(z):,\\
d_\chi(z)&=\sum_{\alpha\in\Delta_{>0}}\chi(e_\alpha)\varphi^\alpha(z)
\end{aligned}$$

とする. すると

$$d(z)d(w)\sim 0$$

となり, したがって $[d_{(0)},d_{(0)}]=0$. $d(z)$ は odd な場だったので, $d_{(0)}^2=0$ となる. 一方で, $C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ のチャージを $V^k(\mathfrak{g})$ と $F^{\rm ne}$ に対しては全て 0, $F^{\rm ch}$ に対しては任意の $\alpha\in\Delta_{>0}$ について $\varphi_\alpha(z)$ のチャージを -1, $\varphi^\alpha(z)$ のチャージを 1 として定める. このとき C_k^n を $C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ の元であってチャージが n となるもの全体の集合とすると,

$$C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}C_k^n$$

となる. さらに

$$d_{(0)}C_k^n\subset C_k^{n+1}$$

が任意の n に対して成り立つ. したがって $(C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma),d_{(0)})$ はチャージについての複体をなす。これを量子 Drinferd-Sokolov 還元に関する BRST 複体と呼ぶ. このとき $\mathfrak{g},f,k,\Gamma$ に関する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ をそのコホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f;\Gamma)=H(C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma),d_{(0)})$$

で定める. 実際には Kac と脇本 [10][11] により

$$H(C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma),d_{(0)})=H^0(C_k(\mathfrak{g},f;\Gamma),d_{(0)})$$

となることが知られている.

Remark. $h^\vee$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数とする.

1. $\mathcal{W}$ 代数は（構成から）スーパー頂点代数構造をもつ.
2. $k \neq -h^\vee$ のとき, $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は（Γ に依存して定まる）共形ベクトル L をもち, $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 次数付き共形スーパー頂点代数となる.
3. 2. のとき L は（零でない）コホモロジー類を定め, $\mathcal{W}$ 代数の共形ベクトルになる. このとき $\mathcal{W}$ 代数は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き共形スーパー頂点代数構造をもつ.
4. $\mathcal{W}$ 代数のスーパー頂点代数構造は Γ のとり方に依存しない. ただし共形ウェイトは Γ に依存して変化する（[1][2] による）.

3 $\mathcal{W}B_n$ 代数

Fateev と Lukyanov による $\mathcal{W}B_n$ 代数の定義を述べる. $\mathcal{H}$ を B_n 型のルート系に付随する Heisenberg 頂点代数, $\mathcal{F}$ を odd な場 $\Phi(z)$ によって生成されるフェルミオンスーパー頂点代数とする。ただし $\Phi(z)$ は

$$\Phi(z)\Phi(w) \sim \frac{1}{z-w}$$

を満たすものとする. $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ 上の odd な場 $G(z)$ を

$$G(z) =: (\gamma\partial + b_1(z))(\gamma\partial + b_2(z)) \cdots (\gamma\partial + b_n(z))\Phi(z):$$

で定義する. ただし

$$b_i(z) = \sum_{j=i}^{n} \alpha_i(z)$$

であり, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は B_n 型の単純ルートである.

定義 3.1. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ 上の場 $W_i(z)$（$i = 1, \ldots, 2n-1$）を

$$G(z)G(w) \sim \frac{W_1(w)}{z-w} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \left(\frac{W_{2i}(w)}{(z-w)^{2i}} + \frac{W_{2i+1}(w)}{(z-w)^{2i+1}} \right) + \frac{\gamma_n}{(z-w)^{2n+1}}$$

で定義する. ただし

$$\gamma_i = \prod_{j=1}^{i} (1 - 2j(2j-1)\gamma^2)$$

である. $\gamma \in \mathbb{C}$ に関する $\mathcal{W}B_n$ 代数とは, $G(z)$ および $W_{2i-1}(z)$（$i = 1, \ldots, n$）によって生成される $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ の部分頂点代数である.

次の事実が Fateev と Lukyanov によって知られている.

命題 3.2 (Fateev-Lukyanov [3]). $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, $\gamma_\pm \in \mathbb{C}$ を $\gamma_+ + \gamma_- = \gamma$ かつ $\gamma_+\gamma_- = -1$ なる複素数としてとる. γ が generic のとき,

$$\mathcal{W}B_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} \int e^{\gamma_+ \int \alpha_i(z)}\, dz \ \cap\ \mathrm{Ker} \int : e^{\gamma_+ \int \alpha_n(z)} \Phi(z) : dz$$

が成り立つ. ただし $\int \cdot\, dz$ は形式的に z^{-1} の係数をとる操作を表す.

4 $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数

Feigin と Semikhatov によって導入された $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数の定義を述べる. n を 2 以上の自然数, k を $k \neq -n$ なる複素数, V を $n+1$ 次元複素ベクトル空間とする.

$$a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, \psi, \xi \in V$$

を V の一つの基底とする. V 上の双線形形式 $(\cdot|\cdot)_V : V \times V \to \mathbb{C}$ を次の Gram 行列で定義する:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & \psi & \xi \\
\hline
a_{n-1} & 2(k+n) & -k-n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a_{n-2} & -k-n & 2(k+n) & -k-n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a_{n-3} & 0 & -k-n & 2(k+n) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(k+n) & -k-n & 0 \\
\psi & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k-n & 1 & 1 \\
\xi & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{array}.$$

$\mathcal{H}$ を V とその双線形形式 $(\cdot|\cdot)_V$ に付随する Heisenberg 頂点代数, また $m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{H}_{m\xi}$ を $m\xi \in V$ を最高ウェイトにもつ $\mathcal{H}$ 加群とする. $e^{m\xi}$ を $\mathcal{H}_{m\xi}$ の最高ウェイトベクトルとする. このとき

$$\mathcal{V}_\xi = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{m\xi}$$

は格子頂点代数になる. 特に $e^{m\xi}$ の頂点作用素 $e^{m\xi}(z)$ は

$$e^{m\xi}(z) = \mathrm{e}^{m \int \xi(z)}$$

で定義される. ここで $\mathcal{V}_\xi$ 上の場 $\mathcal{E}(z), \mathcal{F}(z)$ を

$$\mathcal{E}(z) = e^{\xi}(z), \quad \mathcal{F}(z) = - : \mathcal{P}(z) e^{-\xi}(z) :$$

で定義する. ただし

$$\mathcal{P} = ((k+n-1)\partial + \psi + \sum_{i=1}^{n-1} a_i)((k+n-1)\partial + \psi + \sum_{i=1}^{n-2} a_i) \cdots ((k+n-1)\partial + \psi + a_1)$$

である.

定義 4.1. k に関する $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数とは, $\mathcal{E}(z)$ と $\mathcal{F}(z)$ によって生成される $\mathcal{V}_\xi$ の部分頂点代数である.

次の事実は Feigin と Semikhatov による.

命題 4.2 (Feigin-Semikhatov [6]). k を generic としたとき,

$$\mathcal{W}_n^{(2)} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\int a_i(z)}\, dz \ \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\int \psi(z)}\, dz.$$

5 主定理

主定理を述べるための準備をする．2 章の記号をここでも用いる．まず

$$\Delta^\Gamma = \Delta\backslash\Delta_0 = \Delta_{>0}\cup\Delta_{<0},$$
$$\Pi^\Gamma = \{\alpha\in\Delta_{>0}\mid \alpha=\beta+\gamma\text{となるような}\beta,\gamma\in\Delta_{>0}\text{は存在しない}\}$$

と定める．Δ^Γ は Brundan と Goodwin によって定義された制限ルート系と呼ばれるものになっており，そのとき Π^Γ はその base の一つである．$\Pi^\Gamma_j = \Pi^\Gamma\cap\Delta_j$ と定義すると，

$$\Pi^\Gamma = \Pi^\Gamma_{\frac{1}{2}}\cup\Pi^\Gamma_1$$

となることが分かる．ここで Q_0 を $\mathfrak{g}_0$ のルート格子 (root lattice) とする．すなわち $Q_0=\bigoplus_{\alpha\in\Pi_0}\mathbb{Z}\alpha$ である．このとき Π^Γ に同値関係 $\sim$ を任意の $\alpha,\beta\in\Pi^\Gamma$ に対し

$$\alpha\sim\beta \iff \alpha-\beta\in Q_0$$

として定義する．この同値関係による Π^Γ の商集合を $[\Pi^\Gamma]$ と表す．また $\alpha\in\Pi^\Gamma$ の同値類を $[\alpha]\in[\Pi^\Gamma]$ と表す．さらに $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}_0$ とその不変双線形形式 τ_k に付随するアファインスーパー頂点代数とする．ただし τ_k は $u,v\in\mathfrak{g}_0$ に対し，

$$\tau_k(u|v) = k(u|v)+\frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v)-\frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

と定義される．このとき $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式である．$u\in\mathfrak{g}_0$ に対応する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ の場を $J^u(z)$ と表すと，$u,v\in\mathfrak{g}_0$ に対し，

$$J^u(z)J^v(w)\sim\frac{J^{[u,v]}(w)}{z-w}+\frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立っている．また $\{u_i\}_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}_0}$, $\{u^i\}_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}_0}$ を $(u^i|u_j)=\delta_{i,j}$ なる $\mathfrak{g}_0$ の双対基底とする．このとき菅原構成から，$k+h^\vee\neq0$ のとき

$$L(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}=\frac{1}{2(k+h^\vee)}\sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}_0}:u^i(z)u_i(z):$$

は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ の共形ベクトルのなす場であることがわかる．$[\beta]\in[\Pi]$ に対し，ベクトル空間 $\mathbb{C}^{[\beta]}$ を

$$\mathbb{C}^{[\beta]}=\bigoplus_{\alpha\in[\beta]}\mathbb{C}x_\alpha$$

とする．x_α のパリティを $\bar{\alpha}+\bar{1}$ と定義してスーパーベクトル空間となる．$\mathbb{C}^{[\beta]}$ に対する $\mathfrak{g}_0$ 作用を，任意の $u\in\mathfrak{g}_0$ に対し

$$u\cdot x_\alpha=\sum_{\beta\in[\alpha]}c^\alpha_{\beta,u}x_\beta$$

によって定義する．ただし $c^\alpha_{\beta,u}$ は $[e_\beta,u]=\sum_{\alpha\in[\beta]}c^\alpha_{\beta,u}e_\alpha$ によって定義される定数である．この作用によって $\mathbb{C}^{[\beta]}$ は $\mathfrak{g}_0$ 加群となる．一方で $\hat{\mathfrak{g}}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ のループ（スーパー）代数 $\mathfrak{g}_0[t,t^{-1}]$ の τ_k による中心拡大とする．すなわち

$$\hat{\mathfrak{g}}_0=\mathfrak{g}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K$$

であって, 任意の $u, v \in \mathfrak{g}_0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$[ut^m, vt^n] = [u, v]t^{m+n} + \tau_k(u|v)K$$

を満たす. このとき $\mathbb{C}^{[\beta]}$ に, $\hat{\mathfrak{g}}_0$ の部分リー代数 $\mathfrak{g}_0[t] \oplus \mathbb{C}K$ の作用を $\mathfrak{g}_0[t]t = 0$ かつ $K = 1$ によって定義して $\mathfrak{g}_0[t] \oplus \mathbb{C}K$ 加群とする. よって誘導表現

$$M_{[\beta]} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_0[t]\oplus\mathbb{C}K}^{\hat{\mathfrak{g}}_0} \mathbb{C}^{[\beta]} \simeq V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes \bigoplus_{\alpha\in[\beta]} \mathbb{C}x_\alpha$$

が得られる. 構成から $M_{[\beta]}$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ 加群である. $k \neq -h^\vee$ とする. $\alpha \in \Pi^\Gamma$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 線形作用素

$$S_n^\alpha : V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \to M_{[\alpha]}$$

を定義する.

$$S^\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S_n^\alpha z^{-n}$$

として, 任意の $A \in V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ に対し

$$S^\alpha(z)A = (-1)^{(\bar{\alpha}+\bar{1})\bar{A}}\ e^{zT}Y(A, -z)x_\alpha$$

として定義する. ただし $Y(A, z)$ は $M_{[\alpha]}$ 上の頂点作用素であり, $T = L_{-1}$ とする.

命題 5.1. k を generic とする. このとき次が成り立つ.

1. $S_0^\alpha|0\rangle = x_\alpha$, $n \geq 1$ に対し $S_n^\alpha|0\rangle = 0$.
2. S_n^α は $\bar{\alpha} + \bar{1}$ のパリティをもつスーパー線形作用素である.
3. $[J_{(m)}^u, S_n^\alpha] = \sum_{\beta\in[\alpha]} c_{\beta,u}^\alpha S_{m+n}^\beta$.
4. $\partial S^\alpha(z) = -\dfrac{1}{(k+h^\vee)(e_\alpha|e_{-\alpha})} \sum_{\substack{\beta\in[\alpha]\\ \gamma\in I\cup\Delta_0}} (-1)^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} c_{\beta,-\alpha}^\gamma : J^{e_\gamma}(z)S^\beta(z) :.$

次の定理が本稿の主定理である.

定理 5.2. k が generic のとき, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F^{\mathrm{ne}}$ の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{[\alpha]\in\Pi^\Gamma} \mathrm{Ker}\ Q_{[\alpha]}.$$

ただし

$$Q_{[\alpha]}\ :\ V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F^{\mathrm{ne}} \longrightarrow M_{[\alpha]} \otimes F^{\mathrm{ne}}$$

は次のように定義される:

$$Q_{[\alpha]} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\beta\in[\alpha]} \chi(e_\beta) \int S^\beta(z)\ dz & ([\alpha] \in [\Pi_1^\Gamma] \text{ のとき}), \\ \displaystyle\sum_{\beta\in[\alpha]} \int : S^\beta(z)\Phi_\beta(z) : dz & ([\alpha] \in [\Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma] \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となる Γ が選べるときを考える（必ずしもとれるとは限らない）．このとき $\Delta_0 = \phi$ なので, $\Delta^\Gamma = \Delta$, $\Pi^\Gamma = \Pi$ である．また $Q_0 = 0$ より, Π^Γ に定義された同値関係は自明となる．したがって $[\Pi^\Gamma] = \Pi^\Gamma = \Pi$ である．このとき $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) = V^{\tau_k}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ と $\mathfrak{h}$ を同一視することで, $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ と同型になる．さらに命題 5.1 より, $\alpha \in \Pi$ に対し

$$S^\alpha(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha(z)}$$

となる．ただし $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対応する $\mathcal{H}$ 上の場である．よって定理 5.2 より次の定理を得る．

定理 5.3. k が generic かつ $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ とする．このとき $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\mathcal{H} \otimes F^{\mathrm{ne}}$ の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha \in \Pi_1 \\ \chi(e_\alpha) \neq 0}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha(z)}\, dz \cap \bigcap_{\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}} \mathrm{Ker} \int : \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha(z)} \Phi_\alpha(z) : dz.$$

ただし $\mathcal{H}$ は $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数, $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対応する $\mathcal{H}$ 上の場である．

$\mathfrak{g}$ が単純リー代数かつ f がその正則べき零元のとき, $\mathfrak{g}$ の Dynkin grading Γ をとると $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ であり, このとき定理 5.3 は Feigin-Frenkel の定理 1.1 の結果を含む．したがって定理 5.3 は定理 1.1 の一般化であり, $\mathcal{W}$ 代数の新しい自由場実現を与えている．

6 主定理の応用

定理 6.1. $k \neq -n - \frac{1}{2}$ のとき,

$$\mathcal{W}B_n \simeq \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n), f_{reg}; \Gamma).$$

ただし f_{reg} は $\mathfrak{osp}(1, 2n)_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2n)$ の正則べき零元, Γ は Dynkin grading であり, $\mathcal{W}B_n$ のパラメータ γ は

$$\gamma = \sqrt{2k + 2n + 1} - \frac{1}{\sqrt{2k + 2n + 1}}$$

で対応付けられる．

証明. 定理 5.3 において $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$, f をその even part の正則べき零元とすれば, 定理 6.1 が成り立つ．ただし定理 6.1 において $n + \frac{1}{2}$ は $\mathfrak{osp}(1, 2n)$ の双対 Coxeter 数であることに注意する．定理 6.1 が k が generic だけではなく, 非臨界レベル（$k \neq -n - \frac{1}{2}$）でも成り立つのは, 三浦写像と呼ばれる $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を誘導する写像を用いることでわかる． □

定理 6.2. $k \neq -n$ のとき,

$$\mathcal{W}_n^{(2)} \simeq \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{sub}; \Gamma).$$

ただし f_{sub} は $\mathfrak{sl}_n$ の副正則べき零元, Γ は $\mathfrak{sl}_n$ の good grading であり, 単純ルートを $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ とすると $\alpha_1 \in \Pi_0$ かつ $\alpha_i \in \Pi_1$（$i \geq 2$）を満たすものである．

証明. 定理 5.2 で $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $f = f_{sub}$, Γ を $\alpha_1 \in \Pi_0$ かつ $\alpha_i \in \Pi_1$ ($i \geq 2$) を満たす good grading とすると, generic な k に対して

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{sub}; \Gamma) \simeq \bigcap_{i=2}^{n-1} \mathrm{Ker} \int S^{\alpha_i}(z)\, dz \subset V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$$

となる. ただし

$$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}e_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_{-\alpha_1}$$

である. $h_i = \alpha_i^{\vee} \in \mathfrak{h}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) とおく. このとき頂点代数の射

$$\pi \ : \ V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \longrightarrow \mathcal{V}_{\xi}$$

を次で定義する:

$$\begin{aligned}
J^{h_1}(z) &\longmapsto (k+n-2)\xi(z) + 2\psi(z) + a_1(z),\\
J^{h_2}(z) &\longmapsto \xi(z) - \psi(z) + a_2(z),\\
J^{h_i}(z) &\longmapsto a_i(z) \qquad (i = 3, \ldots, n-1),\\
J^{e_{\alpha_1}}(z) &\longmapsto \mathrm{e}^{\int \xi(z)},\\
J^{e_{-\alpha_1}}(z) &\longmapsto -:((k+n-1)(\partial + \xi(z)) + \psi(z) + a_1(z))\psi(z)\mathrm{e}^{-\int \xi(z)}:.
\end{aligned}$$

すると π は $V^{k+n-2}(\mathfrak{sl}_2)$ の脇本表現の拡張になっており, 単射である (ただし $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}e_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_{-\alpha_1}$ と思っている). このとき π は $\mathcal{W}$ 代数と $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数の間の同型を誘導することが分かり, generic な k に対して主張が成り立つことが分かる. 再び三浦写像を用いることで定理 6.2 が成り立つことが証明される. □

参考文献

[1] T. Arakawa, T. Kuwabara, F. Malikov, *Localization of affine W-algebras*, Comm. Math. Phys. 335, No. 1, 143–182, 2015.

[2] J. Brundan, S. Goodwin, *Good grading polytopes*, Proc. London Math. Soc. 94, 155–180, 2007.

[3] V.A. Fateev, S.L. Lukyanov, *Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional Conformal field theory*, Sov. Sci. Rev. A. Phys., Vol. 15 (1–117), 1990.

[4] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Affine Kac-Moody Algebras At The Critical Level And Gelfand-Dikii Algebras*, Int. J. Mod. Phys., A7S1A, 197, 1992.

[5] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Quantization of Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett., B246, 75–81, MR 1071340, 1990.

[6] B.L. Feigin, A. Semikhatov, $\mathcal{W}_n^{(2)}$*-algebras*, Nuclear Phys., B 698, No. 3, 409–449, 2004.

[7] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surv. Monogr., Vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[8] N. Genra, *Screening Operators for $\mathcal{W}$-algebras*, in preparation.

[9] V.G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Commun. Math. Phys., 241(2-3), 307–342, 2003.

[10] V.G. Kac, M. Wakimoto, *Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras*, Adv. Math., 185(2), 400–458, 2004.

[11] V.G. Kac, M. Wakimoto, *Corrigendum to "Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras" [Adv.Math.185, 400–458, 2004]*, Adv. Math., 193.2, 453–455, 2005.

[12] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys., 65, 1205, 1986.