数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 55-65

New strongly regular graphs with the same parameters as the symplectic graph

東北大学大学院情報科学研究科　久保田　匠
Sho Kubota
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

1　はじめに

Godsil-McKay switching は，cospectral なグラフを構成するのに使われる．しかしながら，この switching を適用するためには，非常に強いふたつの条件を満たす点集合の分割を用意しなければならない．一方で，グラフの自己同型写像からなる群の軌道分解は，そのうちひとつの条件を自動的に満たす．ゆえに，もし，もうひとつの条件も満たしているような自己同型写像の群の軌道分解を見つけることができれば，我々は Godsil-McKay switching を適用することができる．

symplectic graph $Sp(2\nu, 2)$ と呼ばれる強正則グラフの無限系列について，Abiad-Haemers は [2] で，適当な 4 点部分集合 S とその補集合からなる点集合の分割 $\{S, V(Sp(2\nu, 2)) \setminus S\}$ を用意した．この分割は Godsil-McKay switching を適用するための条件を満たしており，彼らは symplectic graph と同じパラメータをもつ強正則グラフを数多く構成した．我々も，Godsil-McKay switching によって，symplectic graph と同じパラメータをもつ強正則グラフを構成したい．そのために考える点集合の分割は自己同型写像からなる群の軌道分解である．今回の研究では，次のふたつの群を考えた：

- 標準基底を固定する自己同型写像がなす群
- Abiad-Haemers による 4 点集合を固定する自己同型写像がなす群

その結果，symplectic graph と同じパラメータをもつ強正則グラフの無限系列を 4 つ構

成することができた．なお，そのうちのひとつは Abiad-Haemers が構成したものと同型である．

加えて，symplectic graph の場合，複数の頂点の共通近傍点の集合は対応する連立方程式の解の集合とみることができる．この観点から，同型不変量として 3 点の共通近傍点の個数を考えることにした．その結果，元のグラフと switching によって構成された 4 つのグラフ，計 5 つのグラフがすべて互いに非同型であることを証明することができた．

2 強正則グラフ

本稿で扱うグラフは有限単純グラフである．すなわち，グラフ X とは，集合のペア $(V(X), E(X))$ であり，$V(X)$ は有限集合，$E(X)$ は $V(X)$ の 2 点部分集合の族である．グラフ X がパラメータ (n, k, a, c) の強正則グラフであるとは，X が n 点からなる k-正則グラフで，相異なる 2 点の共通近傍点の数が，隣接しているときは常に a 個，隣接していないときは常に c 個であることをいう．強正則グラフの例は数多く知られているが，本稿で主に扱われる symplectic graph もまた，強正則グラフの例のひとつである．

$\mathbb{F}_2^{2\nu}$ を $\mathbb{F}_2$ 上の 2ν 次元のベクトル空間とし，

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする．

Definition 2.1. symplectic graph $Sp(2\nu, 2)$ とは，次で定まるグラフである：

$$\begin{aligned} V(Sp(2\nu, 2)) &= \mathbb{F}_2^{2\nu} \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ E(Sp(2\nu, 2)) &= \{xy \mid x^T K y = 1\}, \end{aligned}$$

ここで，$K = I_\nu \otimes R$ である．

$Sp(2\nu, 2)$ はパラメータ $(2^{2\nu} - 1, 2^{2\nu-1}, 2^{2\nu-2}, 2^{2\nu-2})$ の強正則グラフであり，その固有値は $2^{2\nu-1}$, $2^{\nu-1}$, $-2^{\nu-1}$ で重複度はそれぞれ 1, $2^{2\nu-1} - 2^{\nu-1} - 1$, $2^{2\nu-1} + 2^{\nu-1} - 1$ であるが，これらの具体的な値は本稿ではそれほど重要ではない．

一般に，強正則グラフは，強正則グラフであることだけでなくそのパラメータも隣接行列の固有値によって特徴づけられる．したがって，もし強正則グラフ X と同じ固有値をもつグラフ X' を構成することができたのならば，X' は自動的に X と同じパラメータを持つということになる．

3 Godsil-McKay switching

X をグラフとし，$\pi = \{C_1, \ldots, C_t\}$ を $V(X)$ の分割とする．任意のふたつの添え字 i, j と C_i の点 x, x' に対し，$|N(x) \cap C_j| = |N(x') \cap C_j|$ が成り立つとき，分割 π は equitable partition であるという．ここで，$N(x)$ は点 x の近傍点の集合を表す．equitable partition は，強い性質をもった分割であるといえるが，グラフの自己同型写像のなす群の軌道分解を考えると，それぞれの cell が軌道であること，および自己同型写像が 2 点間の隣接関係を保つことから軌道分解は自動的に equitable partition となる．

Godsil-McKay は [5] で，固有値を保ちながらグラフを変形する操作に関する次の結果を残した：

Theorem 3.1. X をグラフとし，$\pi = \{C_1, \ldots, C_t, D\}$ を $V(X)$ の分割とし，π は次のふたつの条件を満たすとする：

(i) $\{C_1, \ldots, C_t\}$ は $V(X) \setminus D$ において equitable partition である．
(ii) D の任意の点 x と，任意の添え字 $i \in \{1, \ldots, t\}$ に対して $|N(x) \cap C_i| = 0, \frac{1}{2}|C_i|, |C_i|$ のいずれかである．

このとき，D の各々の点 x と，各々の添え字 i で

$$|N(x) \cap C_i| = \frac{1}{2}|C_i|$$

を満たしているものすべてについて，x と C_i 間の隣接関係を逆転させることによって新しいグラフ X' をつくる．このとき，ふたつのグラフ X, X' は同じスペクトル*1 をもつ．

以上の定理において，グラフ X から新しいグラフ X' を作る操作を Godsil-McKay switching と呼び，switching に用いた分割 π を Godsil-McKay partition, 特別な役割を果たす cell D を Godsil-McKay cell と呼ぶ．

なお，symplectic graph $Sp(2\nu, 2)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu, 2))$ は点集合に推移的に作用することが知られている [7]．したがって，軌道の数を増やすため，我々は $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu, 2))$ の適切な部分群を考えなければならない．

---

*1 グラフの隣接行列の重複度も込めた固有値全体の multiset をグラフのスペクトルという．

4 標準基底を固定する自己同型写像がなす群

ここでは，$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))$ の部分群として $\mathbb{F}_2^{2\nu}$ の標準基底を集合として固定する自己同型写像がなす群を考える．switching を実行するためにしなければならないことは

- 軌道分解を求める．
- その中から Godsil-McKay cell となる軌道を見つける．

のふたつである．

$e_i \in \mathbb{F}_2^{2\nu}$ を第 i 成分のみが 1 でそれ以外の成分が 0 のベクトルとし，$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_{2\nu}\}$ とおく．軌道分解を求める前に標準基底を集合として固定する群

$$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}} = \{g \in \mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2)) \mid \mathcal{E}^g = \mathcal{E}\}$$

を明らかにする．

P を ν 次の置換行列とし，$A_1, \ldots, A_\nu$ を 2 次の正方行列とする．このとき，2ν 次の正方行列 $P(A_1, \ldots, A_\nu)$ を次のように定める：

$$P_{ij} \mapsto \begin{cases} O & \text{if } P_{ij} = 0, \\ A_i & \text{if } P_{ij} = 1, \end{cases}$$

ここで，O は零行列を表す．たとえば，$\nu = 3$ で $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

$$P(I_2, I_2, I_2) = \begin{bmatrix} O & I_2 & O \\ O & O & I_2 \\ I_2 & O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である．$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ はこの $P(A_1, \ldots, A_\nu)$ を用いて理解することができる．

Lemma 4.1.

$$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}} \simeq \left\{ P(A_1 \ldots, A_\nu) \,\middle|\, P : \nu\text{ 次の置換行列}, A_i \in \{I_2, R\} \right\}.$$

$\mathbb{F}_2^{2\nu}$ のベクトル x の成分をふたつごとに区切り，ν 個のブロックに区分けする：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \qquad (x_i \in \mathbb{F}_2^2).$$

さらに，$\mathbb{F}_2^{2\nu}$ のベクトルの集合 $O(i,j,k)$ を次のように定める：

$$O(i,j,k) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\nu} \;\middle|\; \begin{array}{c} \#\{l \mid \mathrm{wt}(x_l) = 2\} = i, \\ \#\{l \mid \mathrm{wt}(x_l) = 1\} = j, \\ \#\{l \mid \mathrm{wt}(x_l) = 0\} = k \end{array} \right\}.$$

たとえば，$x = [00100111]^T$ のとき，

$$\begin{aligned} \{l \mid \mathrm{wt}(x_l) = 2\} &= \{4\}, \\ \{l \mid \mathrm{wt}(x_l) = 1\} &= \{2,3\}, \\ \{l \mid \mathrm{wt}(x_l) = 0\} &= \{1\} \end{aligned}$$

であるから，$x \in O(1,2,1)$ である．

以上を準備したうえで，$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ が $Sp(2\nu,2)$ の点にどのように作用しているのかを観察してみる．例として，$x = [00100111]^T$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合を考える．

$$\begin{aligned} P(A_1,A_2,A_3,A_4)x &= \begin{bmatrix} O & A_1 & O & O \\ O & O & A_2 & O \\ A_3 & O & O & O \\ O & O & O & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [00]^T \\ [10]^T \\ [01]^T \\ [11]^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1[10]^T \\ A_2[01]^T \\ A_3[00]^T \\ A_4[11]^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることから分かるように，$P(A_1,A_2,A_3,A_4)$ はベクトルの区分けされたブロックを置換した後に，各々のブロックに A_1,A_2,A_3,A_4 をかけるという操作を行う．特に A_1,A_2,A_3,A_4 が I_2 または R のときは，各々のブロックの成分を交換するかしないかを行うということになる．結局，$P(A_1,A_2,A_3,A_4) \in \mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ が果たす役割は

- 区分けされたブロックの置換を行う．

- その後で各々のブロックの成分を交換する (か何もしない).

のふたつに尽きる．よって，ベクトルの各々のブロックがもつ 1 の数は $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ による作用で不変である．このことから，先ほど定義した $O(i,j,k)$ 達が $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ による作用の軌道を与えていることが理解できる.

Proposition 4.2. $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ の $V(Sp(2\nu,2))$ への作用における軌道分解は

$$\{O(i,j,k) \mid i+j+k=\nu, (i,j,k) \neq (0,0,\nu)\}$$

である.

詳細は割愛するが，これらの軌道の中で Godsil-McKay cell となるものを見つけることができる.

Proposition 4.3. $O(0,\nu,0)$ の点 x と，$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ の軌道 $O(i,j,k)$ に対して

$$|N(x) \cap O(i,j,k)| = \begin{cases} \frac{1}{2}|O(i,j,k)| & \text{if } j \geq 1, \\ |O(i,j,k)| & \text{if } j=0,\ i \text{ が奇数}, \\ 0 & \text{if } j=0,\ i \text{ が偶数}. \end{cases}$$

が成り立つ．特に，$O(0,\nu,0)$ は $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu,2))_{\mathcal{E}}$ の軌道分解における Godsil-McKay cell である.

以上の命題より，この軌道分解に関して我々は Godsil-McKay switching を適用することができる．適用後のグラフを $Sp(2\nu,2)^{O(0,\nu,0)}$ とかくことにする.

5 4 点集合を固定する自己同型写像がなす群

Abiad-Haemers は [2] で $Sp(2\nu,2)$ の点集合の 4 点部分集合 $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ について，次の条件を満たすものを考えた：

- v_1,v_2,v_3 は線形独立である.
- 任意の $i,j \in [3]$ について，$v_i^T K v_j = 0$ である.
- $v_4 = v_1+v_2+v_3$ である.

これらの条件より，$Sp(2\nu,2)$ の点 x について，

$$x^T K v_1 + x^T K v_2 + x^T K v_3 + x^T K v_4 = x^T K \mathbf{0} = 0$$

が成り立つので，$\#\{i \in [4] \mid x^T K v_i = 1\}$ の値は $0, 2, 4$ のいずれかでなければならない．したがって，$V(Sp(2\nu, 2))$ はこの値によって 3 つの集合に分割することができる：

$$V(Sp(2\nu, 2)) = S_0 \sqcup S_2 \sqcup S_4,$$

ここで $S_i = \left\{ x \in V(Sp(2\nu, 2)) \,\middle|\, \#\{j \in [4] \mid x^T K v_j = 1\} = i \right\}$ である．特に，点集合の分割 $\pi = \{S, V(Sp(2\nu, 2)) \setminus S\}$ は $V(Sp(2\nu, 2)) \setminus S$ を Godsil-McKay cell とする Godsil-McKay partition になっている．ゆえに，Abiad-Haemers は π に関して Godsil-McKay switching を適用し，数多くの強正則グラフで symplectic graph と同じパラメータをもつものを構成した．

これを踏まえたうえで，Abiad-Haemers による 4 点集合 S を固定する自己同型写像がなす群

$$\mathrm{Aut}(Sp(2\nu, 2))_S = \{g \in \mathrm{Aut}(Sp(2\nu, 2)) \mid S^g = S\}$$

を考え，これを用いて Godsl-McKay switching を適用することを考える．我々がするべきことは先のセクションと同様，軌道分解を決定すること，およびその中から Godsil-McKay cell となるものを見つけることである．

Proposition 5.1. $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu, 2))_S$ の $V(Sp(2\nu, 2))$ への作用における軌道分解は

$$\{S, T, S_0 \setminus (S \cup T), S_2, S_4\}$$

である．ここで $T = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ である．

運が良いことに，これら 5 つの軌道のうち，3 つが Godsil-McKay cell になっていることが分かった．

Proposition 5.2. $P \in \{S, T, S_0 \setminus (S \cup T), S_2, S_4\}$ とする．このとき，次が成り立つ：

(i) S の点 x について

$$|N(x) \cap P| = \begin{cases} 0 & \text{if } P \in \{T, S_0 \setminus (S \cup T)\}, \\ |P| & \text{if } P = S_4, \\ \frac{1}{2}|P| & \text{if } P = S_2. \end{cases}$$

(ii) S_4 の点 x について

$$|N(x) \cap P| = \begin{cases} 0 & \text{if } P = T, \\ |P| & \text{if } P = S, \\ \frac{1}{2}|P| & \text{if } P \in \{S_2, S_0 \setminus (S \cup T)\}. \end{cases}$$

(iii) $S_0 \setminus (S \cup T)$ の点 x について

$$|N(x) \cap P| = \begin{cases} 0 & \text{if } P \in \{S, T\}, \\ \frac{1}{2}|P| & \text{if } P \in \{S_2, S_4\}. \end{cases}$$

特に，$S, S_0 \setminus (S \cup T), S_4$ は $\mathrm{Aut}(Sp(2\nu, 2))_S$ の軌道分解における Godsil-McKay cell である．

したがって，各々の Godsil-McKay cell に関して，Godsil-McKay switching を適用することができる．適用後のグラフを，どの Godsil-McKay cell を用いたかに留意して，それぞれ $Sp(2\nu, 2)^S$, $Sp(2\nu, 2)^{S_4}$, $Sp(2\nu, 2)^{S_0 \setminus (S \cup T)}$ とかくことにする．

なお，先の命題により switching で影響をうける点のペアを記述することができる．このことに注意すると，$Sp(2\nu, 2)^S$ を構成するにあたって影響をうけた点のペア，Abiad-Haemers による switched $Sp(2\nu, 2)$ を構成するにあたって影響をうけた点のペアが同じであることが確認でき，したがって両者が同型であることが分かる．より正確には，次のように述べられる：

Corollary 5.3. 分割 $\{S, V(Sp(2\nu, 2)) \setminus S\}$ において，$Sp(2\nu, 2)$ を $V(Sp(2\nu, 2)) \setminus S$ に関して Godsil-McKay switching を適用したグラフは，$Sp(2\nu, 2)^S$ と同型である．

6 非同型であること

最後に，switching によって構成された 4 つのグラフ $Sp(2\nu, 2)^{O(0,\nu,0)}$, $Sp(2\nu, 2)^S$, $Sp(2\nu, 2)^{S_4}$, $Sp(2\nu, 2)^{S_0 \setminus (S \cup T)}$ と元々のグラフ $Sp(2\nu, 2)$ 合わせて 5 つのグラフが互いに非同型であることを確認する．このため，我々は各々のグラフにおいて相異なる 3 点の共通近傍点に注目する．はじめに，3 点の共通近傍点が switching によってどのように変化するのかを調べる．

X をグラフとする．A, B を互いに素な $V(X)$ の部分集合とする．このとき，A のどの点とも隣接するが，B のどの点とも隣接しないような点の集合 $\mathcal{N}_X[A|B]$ を定めることができる：

$$\mathcal{N}_X[A|B] = \left\{ w \in V(X) \setminus (A \cup B) \;\middle|\; \begin{array}{l} w \sim a \, (\forall a \in A), \\ w \not\sim b \, (\forall b \in B) \end{array} \right\}.$$

実際には，$|A \cup B| = 3$ の場合のみ考える．たとえば，X の相異なる 3 点 x, y, z に対して

$$\mathcal{N}_X[\{x, y\}|\{z\}] = \{ w \in V(X) \setminus \{x, y, z\} \mid w \sim x, \, w \sim y, \, w \not\sim z \}$$

であるが，簡単のため $\mathcal{N}_X[\{x,y\}|\{z\}]$ と書く代わりに $\mathcal{N}_X[xy|z]$ と書くことにしよう．

$\pi = \{C_1,\ldots,C_t,C_{t+1}\}$ を自己同型写像からなる群の軌道分解とし，さらにこれが $D = C_{t+1}$ を Godsil-McKay cell とする Godsil-McKay partition であるとする．このとき，各々の添え字 $i \in [t]$ に対して

$$\{|N(x)\cap C_i|\mid x\in D\} = \{0\}, \left\{\frac{1}{2}|C_i|\right\}, \{|C_i|\},$$

のいずれかが成り立つので，この値によって添え字の集合 $[t]$ を分割することができる．すなわち，

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ i\in[t] \,\middle|\, \{|N(x)\cap C_i|\mid x\in D\} = \{0\}\right\},$$
$$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = \left\{ i\in[t] \,\middle|\, \{|N(x)\cap C_i|\mid x\in D\} = \left\{\frac{1}{2}|C_i|\right\}\right\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \left\{ i\in[t] \,\middle|\, \{|N(x)\cap C_i|\mid x\in D\} = \{|C_i|\}\right\}.$$

とおくとき，$[t] = \mathcal{C}_0 \sqcup \mathcal{C}_{\frac{1}{2}} \sqcup \mathcal{C}_1$ と分解することができる．switching によって影響される点のペアを調べることで，switching 後のグラフの 3 点の共通近傍点の個数に関する次の公式が得られる．

Theorem 6.1. X をグラフとし，$\pi = \{C_1,\ldots,C_t,C_{t+1}\}$ を自己同型写像からなる群の軌道分解とする．π は $D = C_{t+1}$ を Godsil-McKay cell とする Godsil-McKay partition であるとし，X' を π に関して Godsil-McKay switching を適用したグラフ，x,y,z を相異なる 3 点，i_x,i_y,i_z をそれぞれの点が属する cell の添え字とする．このとき，次に述べる場合について，$|\mathcal{N}_{X'}[xyz|]|$ の値は Table 6.1 にまとめられる．

(1) $x,y,z \notin D$,
- (i) $i_x,i_y,i_z \notin \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$,
- (ii) $i_x \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ かつ $i_y,i_z \notin \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$,
- (iii) $i_x,i_y \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ かつ $i_z \notin \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$,
- (iv) $i_x,i_y,i_z \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

(2) $x \in D$ かつ $y,z \notin D$,
- (i) $i_y,i_z \notin \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$,
- (ii) $i_y \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ かつ $i_z \notin \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$,
- (iii) $i_y,i_z \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

(3) $x,y \in D$ かつ $z \notin D$,
- (i) $i_z \notin \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$,
- (ii) $i_z \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

(4) $x,y,z \in D$.

(1)-(i)	$\lvert\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert$
(1)-(ii)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}\sqcup\mathcal{C}_1} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \lvert D\cap\mathcal{N}_X[yz\lvert x]\rvert$
(1)-(iii)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}\sqcup\mathcal{C}_1} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \lvert D\cap\mathcal{N}_X[z\lvert xy]\rvert$
(1)-(iv)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}\sqcup\mathcal{C}_1} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \lvert D\cap\mathcal{N}_X[\,\lvert xyz]\rvert$
(2)-(i)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_1\sqcup\{t+1\}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \sum_{i\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[yz\lvert x]\rvert$
(2)-(ii)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_1} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \sum_{i\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[yz\lvert x]\rvert + \lvert D\cap\mathcal{N}_X[xz\lvert y]\rvert$
(2)-(iii)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_1} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \sum_{i\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[yz\lvert x]\rvert + \lvert D\cap\mathcal{N}_X[x\lvert yz]\rvert$
(3)-(i)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_1\sqcup\{t+1\}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \sum_{i\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[z\lvert xy]\rvert$
(3)-(ii)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_1} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \sum_{i\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[z\lvert xy]\rvert + \lvert D\cap\mathcal{N}_X[xy\lvert z]\rvert$
(4)	$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{C}_0\sqcup\mathcal{C}_1\sqcup\{t+1\}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[xyz\lvert\,]\rvert + \sum_{i\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \lvert C_i\cap\mathcal{N}_X[\,\lvert xyz]\rvert$

Table 6.1. X' における 3 点の共通近傍点の個数

以上の表を用いて，各々のグラフについて 3 点の共通近傍点の個数を調べる．この数のとり得る値をすべて求めることは確かに困難であるが，我々の目標は，5 つのグラフが互いに非同型であることを示すことである．ゆえに，より簡単な同型不変量を見つけてくれば十分である．この観点から，3 点の共通近傍点の数のうち，非ゼロの最小値に注目する．それでも計算は簡単に終わるものではなかったが，結果として 5 つのグラフそれぞれにおいて，3 点の共通近傍点の数の非ゼロ最小値が確かに違うことが確認できた．この結果を紹介して本稿を締めくくることにする．

Theorem 6.2. 5 つのグラフ $Sp(2\nu,2)$，$Sp(2\nu,2)^{O(0,\nu,0)}$，$Sp(2\nu,2)^{S}$，$Sp(2\nu,2)^{S_4}$，

$Sp(2\nu,2)^{S_0\setminus(S\cup T)}$ それぞれについて，3 点の共通近傍点の数の非ゼロ最小値は，次の表にまとめられる：

$Sp(2\nu,2)$	$Sp(2\nu,2)^{O(0,\nu,0)}$	$Sp(2\nu,2)^{S}$	$Sp(2\nu,2)^{S_4}$	$Sp(2\nu,2)^{S_0\setminus(S\cup T)}$
$2^{2\nu-3}$	$2^{\nu-2}$	1	$2^{2\nu-5}$	$2^{2\nu-5}-2$

特に，与えられた $\nu(\geq 3)$ に対して 5 つのグラフは互いに非同型である．

参考文献

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, 1957.

[2] A. Abiad, W.H. Haemers, *Switched symplectic graphs and their 2-ranks*, `http://arxiv.org/abs/1412.2945`, 2015.

[3] A. Abiad, A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Godsil-McKay Switching and Isomorphism*, Electronic Journal of Linear Algebra 28 (2015), 3–11.

[4] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer, New York, 2012.

[5] C.D. Godsil, B.D. McKay, *Constructing cospectral graphs*, Aequationes Math. 25 (1982), 257–268.

[6] C.D. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer, New York, 2001.

[7] Z. Tang and Z. Wan, *Symplectic graphs and their automorphisms*, European Journal of Combinatorics 27 (2006), 38–50.