数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 74-76

Terwilliger algebras of some group association schemes*1

バンドン工科大学・金沢大学　Nur Hamid
Institut Teknologi Bandung and Kanazawa University

金沢大学　大浦　学
Manabu Oura
Kanazawa University

いくつかの group association scheme の Terwilliger algebra に関して、これまでに得た結果を報告いたします。

まず、有限群の association scheme, Terwilliger algebra の定義から始めます。有限群 G をとってきます。その共役類を $C_0=\{1\}, C_1, \ldots, C_d$ とし、G の元 x, y に対して

$$(x,y)\in R_i \Longleftrightarrow yx^{-1}\in C_i$$

と定義してやることで、class d の commutative association scheme $\mathfrak{X}(G)=(G,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ が得られます。サイズ $|G|\times|G|$ の行列の成分は、G の元で index づけされているとしましょう。$\mathfrak{X}(G)$ の adjacency matrix を

$$(A_i)_{x,y}=\begin{cases}1 & \text{if } (x,y)\in R_i,\\ 0 & \text{if } (x,y)\notin R_i\end{cases}$$

と定義することで、Bose-Mesner algebra $\mathfrak{A}=\langle A_0, A_1, \ldots, A_d\rangle\subset \mathrm{Mat}_{|G|\times|G|}(\mathbf{C})$ が得られます。これは行列の普通の積で閉じており、$d+1$ 次元ベクトル空間となっております。

$$A_iA_j=\sum_{0\leq k\leq d} p_{ij}^k A_k$$

として、パラメータ p_{ij}^k をおきます。さて、$\mathfrak{X}(G)$ の著しい性質として

Fact. $\mathfrak{X}(G)$: primitive $\Leftrightarrow$ G: simple

があげられると思います。坂内先生が「有限単純群の分類を association scheme の枠組みで見直したい」と言われる根拠の一つかと思います。僕が大学4年前後の頃の坂内先生の

*1 2016年1月6日、RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」における講演の記録です。

授業「組合せ数学」のノートが残っています。strongly regular graph から始まっているのですが、続く association scheme の所で、未解決問題として「$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le 6})$ を association scheme で $\forall p_{ij}^k$ が $\mathfrak{X}(S_5)$ の p_{ij}^k と同じであると仮定。この時、$\mathfrak{X} \cong \mathfrak{X}(S_5)$?」と書き記されています。この問いに対する答えは

Tomiyama, M.,
Characterization of the group association scheme of A_5 by its intersection numbers, J. Math. Soc. Japan 50 (1998), no. 1, 43–56.

あたりから始まるのかと思います。続く研究もありますが、先を急ぎます。対角行列

$$(E_i^*)_{x,x} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C_i, \\ 0 & \text{if } x \notin C_i \end{cases}$$

を導入して、$\mathbf{C}$ 上の代数 Terwillger algebra $T(G) = \langle A_i, E_j^* : i, j = 0, 1, \ldots, d\rangle$ を定義します。これは、Bose-Mesner algebra を更に細かく、共役類の所で分割した形になっています。一般に積では閉じておらず、$T(G)$ のベクトル空間としての基底を求めることから我々の研究は始まります。

さて、Terwilliger algebra は

Terwilliger, P.,
The subconstituent algebra of an association scheme, J. Algebraic Combin., I (1992), no. 4, 363–388, II (1993), no. 1, 73–103, III (1993), no. 2, 177–210.

で導入されましたが、上に述べた有限群に対する Terwilliger algebra の定式化は

Bannai, E., Munemasa, A.,
The Terwilliger algebras of group association schemes, Kyushu J. Math. 48 (1994), no. 2, 221–231.

で行われました。そこでは位数の低い有限群に対して、Terwilliger algebra の構造が調べられています。それらに対応する非自明な例として、5 次の対称群、交代群の Terwilliger algebra が論文

Balmaceda, P., Oura, M.,
The Terwilliger algebras of the group association schemes of S_5 and A_5, Kyushu J.Math. vol 48, No.2(1994), 221–231.

で考察されました。それらの Terwilliger algebra の構造は、$\mathfrak{M}_g = \mathrm{Mat}_{g\times g}(\mathbf{C})$ として、

$$\begin{aligned}
T(S_5) &\cong \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_5 \oplus \mathfrak{M}_5 \oplus \mathfrak{M}_6 \oplus \mathfrak{M}_7, \\
R(A_5) &\cong \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_5 \oplus \mathfrak{M}_5
\end{aligned}$$

と述べることができます。

さて、今回、我々が報告する結果は、二つの単純群 $PSL(2,7)$、A_6 と 6 次対称群 S_6 に対するものです。次のようになります。

$$\begin{aligned}
T(PSL(2,7)) &\cong \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_5 \oplus \mathfrak{M}_6 \oplus \mathfrak{M}_9, \\
T(A_6) &\cong \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \mathfrak{M}_4 \oplus \mathfrak{M}_4 \oplus \mathfrak{M}_6 \oplus \mathfrak{M}_6 \oplus \mathfrak{M}_7 \oplus \mathfrak{M}_8 \oplus \mathfrak{M}_{10}.
\end{aligned}$$

ベクトル空間としての次元は

$$\begin{aligned}
\dim T(PSL(2,7)) &= 165 \\
&= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2, \\
\dim T(A_6) &= 336 \\
&= 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2
\end{aligned}$$

となります。もっとも我々の方法では Terwilliger algebra の基底を最初に求めるのであって、 6 次対称群 S_6 に関しては、$\dim T(S_6) = 758$ までわかっています。