数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 82-95

ハミンググラフ $H(n,m)$ の埋め込みを含む最大な m 距離集合の分類

愛知教育大学・数学教育講座　野崎寛
Hiroshi Nozaki
Department of Mathematics Education
Aichi University of Education

1　はじめに

本稿では，主に [1] の内容を紹介する．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有限部分集合 X おいて，X の互いに異なる 2 点間のユークリッド距離の種類の個数 $|\{d(x,y)\mid x,y\in X,x\neq y\}|$ が m のとき，X は m 距離集合と呼ばれる．$X\subset\mathbb{R}^d$ が m 距離集合のとき，X のサイズの上界 $|X|\leq\binom{d+m}{m}$ が知られている [4]．距離集合の主な問題のひとつは，距離の個数 m と次元 d を固定したとき，最大な m 距離集合 X を決定・分類することである．最大 1 距離集合は，任意の次元 d において，$d+1$ 点の正則単体 (regular simplex) である．最大 2 距離集合は，$d\leq 7$ において分類されている [8, 11]．Lisoněk [11] は $\mathbb{R}^8$ 上の最大 2 距離集合をひとつ構成しており，これは，$m\geq 2$ において，上界 $|X|\leq\binom{d+m}{m}$ を達成する唯一の既知の集合である．$\mathbb{R}^2$ 上の m 距離集合は $m\leq 5$ で分類されている [6, 14, 15]．$\mathbb{R}^2$ 上の 6 距離集合は，分類は未解決だが，2 つ最大なものが知られている [17]．$\mathbb{R}^3$ 上の最大 3 距離集合は，正二十面体の頂点集合のみである [16]．表 1，2 で，知られている最大距離集合のサイズ $|X|$ と，その非同型（等長写像が存在しない）な距離集合の個数 $\#$ を示す．

いくつかの例外を除いて，知られている最も大きな m 距離集合は，ジョンソンスキーム $J(n,m)$ の埋め込みである．次の様に記号を準備する．実数

表1 $m=2$

d	2	3	4	5	6	7	8
$\lvert X\rvert$	5	6	10	16	27	29	45
#	1	6	1	1	1	1	≥ 1

表2 $d=2$

m	2	3	4	5	6
$\lvert X\rvert$	5	7	9	12	13
#	1	2	4	1	≥ 2

x_i，自然数 λ_i に対して，

$$(x_1^{\lambda_1},\ldots,x_n^{\lambda_n}) = (\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{\lambda_1},\ldots,\underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{\lambda_n}) \in \mathbb{R}^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}.$$

$(x_1^{\lambda_1})$ は $x_1^{\lambda_1}$ と略記される．$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$\mathbf{x}^P = (x_1,\ldots,x_n)^P = \{(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) \mid \sigma\in S_n\} \subset \mathbb{R}^n,$$

ここで，S_n は対称群である．$J(n,m)$ の m 距離集合としての埋め込みは，次の様に表される．

$$\tilde{J}(n,m) = (1^m, 0^{n-m})^P \subset \mathbb{R}^n.$$

つまり，$\tilde{J}(n,m)$ は成分 1，0 の個数が，それぞれ n，$n-m$ である $\mathbb{R}^n$ のベクトル全体の集合となる．$\tilde{J}(n,m)$ の各ベクトルの成分和が一定であることから，$\tilde{J}(n,m)$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の m 距離集合であるとみなすことが出来る．ジョンソンスキームのボーズメスナー代数（隣接代数）の冪等元（半正定値行列）の振る舞いを見れば，次元 $n-1$ がジョンソンスキームの m 距離集合の埋め込みを含む最小な次元であることが確認できる．Bannai–Sato–Shigezumi [5] は，$\tilde{J}(n,m)$ を含む極大な m 距離集合について調べている．m 距離集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ が，m 距離集合の性質を保ったまま，新たな元 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus X$ が加えられないとき，X は m 距離集合として極大であるという．[5] では，$\tilde{J}(n,m)$ が m 距離集合として極大であるときの必要十分条件を与えている．さらに，$m\leq 5$ のとき，$(n,m)=(9,4)$ の場合を除いて，$\tilde{J}(n,m)$ を含む最大な m 距離集合の分類を与えている．$(n,m)=(9,4)$ の場合は，[2] で分類された．

本稿では，[5] でジョンソンスキームに対して行った議論を，ハミングスキーム $H(n,m)$ に対して行う．ここで，次のような記号を準備する．

$X_i \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(X_1, \ldots, X_m) = \{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \mid \mathbf{x}_i \in X_i\} \subset \mathbb{R}^{mn},$$

$$(X_1, \ldots, X_m)^P = \{(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{\sigma(m)}) \mid \mathbf{x}_i \in X_i, \sigma \in S_m\} \subset \mathbb{R}^{mn}.$$

ハミングスキーム $H(n,m)$ の埋め込みは,

$$\tilde{H}(n,m) = (\underbrace{(1,0^{n-1})^P, \ldots, (1,0^{n-1})^P}_{m})$$

と表される. $\mathbf{j}_k \in \mathbb{R}^{mn}$ を,

$$\mathbf{j}_k = (0^n, \ldots, 0^n, \underbrace{1^n}_{k\text{-th block}}, 0^n, \ldots, 0^n)$$

と定義すれば, 任意の $\mathbf{x} \in \tilde{H}(n,m)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{j}_k) = 1$ となる. ここで, $(,)$ は標準内積であるとする. したがって, $\tilde{H}(n,m)$ は, $\mathbb{R}^{m(n-1)}$ 上の m 距離集合であると見なすことが出来る. ハミングスキームのボーズメスナー代数の冪等元をみることで, 次元 $m(n-1)$ はハミングスキームの m 距離集合としての埋め込みを含む, 最小な次元であることが分かる.

本稿は, 主に以下の新たに得られた結果を紹介する. 第 2 節では, $\tilde{H}(n,m)$ に m 距離集合の性質を保ったまま加えられることが出来るベクトルの表示を与える. 第 3 節では, ある簡明な方法により, $\tilde{H}(n,2)$ を含む, 最大な 2 距離集合の分類を与える. 第 4 節では, $\tilde{H}(n,m)$ が m 距離集合として極大であることの必要十分条件と, $\tilde{H}(n,m)$ が極大でない n の最大値が m^2+m-1 であることを紹介する. 第 5 節では, $m \geq 4$ における, $\tilde{H}(n,m)$ を含む最大な m 距離集合の分類を紹介し, その証明の概略を与える. 表 3, 4, 5 で, $\tilde{H}(n,m)$ を含む最大な m 距離集合 $X \subset \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{m(n-1)}$ の元の個数 $|X|$ を与えている.

表 3　$m=2$

n	5
d	8
$\lvert X\rvert$	40

表 4　$m=3$

n	3	5	9	11
d	6	12	24	30
$\lvert X\rvert$	40	200	981	1451

表 5　$m=4$

n	2	3	5	6	7	9	11	13	14	19
d	4	8	16	20	24	32	40	48	52	72
$\lvert X\rvert$	25	222	1600	2004	3390	8829	16566	29056	39417	133381

2　$\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられるベクトル

$\tilde{H}(n,m)$ の元 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{mn}$ を次の様に表す.

$$\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_{mn})=\mathbf{y}(q_i)=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{e}_{(i-1)n+q_i},$$

ここで，$\mathbf{e}_i$ は $\mathbb{R}^{mn}$ における基本ベクトル，$q_i\in\{1,\ldots,n\}$ である．$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)=(x_1,\ldots,x_{mn})\in\mathbb{R}^{mn}$ ($\mathbf{x}_i\in\mathbb{R}^n$) が，$m$ 距離の性質を保ったまま，$\tilde{H}(n,m)$ に加えられるとする．つまり，任意の $k\in\{1,\ldots,m\}$ に対して，$(\mathbf{x},\mathbf{j}_k)=1$ であり，任意の $y\in\tilde{H}(n,m)$ に対して，$d(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\{\sqrt{2},\sqrt{4},\ldots\sqrt{2m}\}$ とならなければならない．j を固定し，$q_j\neq q'_j$, $i\neq j$ に対して $q_i=q'_i$ となる，$\{q_i\}$, $\{q'_i\}$ に対して，$d(\mathbf{x},\mathbf{y}(q_i))^2-d(\mathbf{x},\mathbf{y}(q'_i))^2$ を考えれば,

$$x_{(j-1)n+q_j}-x_{(j-1)n+q'_j}\in\{0,\pm1,\ldots,\pm(m-1)\}$$

が成り立つことが分かる．つまり，各ブロック $\mathbf{x}_j$ の成分の差は整数であることが分かった．さらに，$\mathbf{x}_j$ の成分の和が 1 であることに注意すれば，$\mathbf{x}_j$ は次の様に表すことが出来る.

$$\mathbf{x}_j\in\mathfrak{x}_j=\mathfrak{x}_j(k_0^{(j)},\ldots,k_{t_j}^{(j)})$$

$$= \left(\frac{k_0^{(j)}}{n}^{k_1^{(j)}}, \left(\frac{k_0^{(j)}}{n} - 1\right)^{k_2^{(j)}}, \dots, \left(\frac{k_0^{(j)}}{n} - t_j + 1\right)^{k_{t_j}^{(j)}} \right)^P .$$

ここで，$0 \leq k_i^{(j)}$，$\sum_{i=1}^{t_j} k_i^{(j)} = n$，$k_0^{(j)} = 1 + \sum_{i=1}^{t_j}(i-1)k_i^{(j)} \in \mathbb{Z}$，$1 \leq t_j \leq m$，

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \leq 2m - 1. \tag{2.1}$$

$\mathbf{x} \in \mathfrak{x}_j$，$\mathbf{y} \in \tilde{H}(n, m)$ に対して，

$l_i^{(j)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = l_i^{(j)} = |\{q \mid y_{(j-1)n+q} = 1, x_{(j-1)n+q} = k_0^{(j)}/n - i + 1\}| \in \{0, 1\}$.

と定義すれば，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(1 - n - 2k_0^{(j)} - \frac{{k_0^{(j)}}^2}{n} + \sum_{i=1}^{t_j} i^2 k_i^{(j)} + 2 \sum_{i=1}^{t_j} i l_i^{(j)} \right) \tag{2.2}$$

と表すことが出来る．

3 $m = 2$ の場合

この節では，$\tilde{H}(n, 2)$ を含む極大な 2 距離集合の分類を，簡明な方法を用いて与える．$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ が，$\tilde{H}(n, 2)$ へ 2 距離の性質を保ったまま付け加えられると仮定する．式 (2.1) より，$(t_1, t_2) = (1, 1), (2, 1)$，または $(1, 2)$ となる．よって，$\mathbf{x}$ は，

$$\mathbf{x} \in \left(\left(\frac{k_0^{(1)}}{n}^{k_1^{(1)}}, \left(\frac{k_0^{(1)}}{n} - 1\right)^{n - k_1^{(1)}} \right)^P, \frac{1}{n}^n \right)^P ,$$

と表せる，ここで $k_0^{(1)} = 1 + n - k_1^{(1)}$．式 (2.2) より，$\mathbf{y} \in \tilde{H}(n, 2)$ に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = -1 - \frac{1}{n} + k_0^{(1)} - \frac{{k_0^{(1)}}^2}{n} + 2l_1^{(1)} + 4l_2^{(1)} \in \{2, 4\}$$

となる．このことから，

$$-1-\frac{1}{n}+k_0^{(1)}-\frac{{k_0^{(1)}}^2}{n}=0$$

となり，$n=k_0^{(1)}+1+2/(k_0^{(1)}-1)$ を得る．ここで可能な値は，$(n,k_0^{(1)})=(5,2),(5,3)$ のみであり，$\mathbf{x}$ は

$$X_1=\left(\left(\frac{2}{5}^4,-\frac{3}{5}\right)^P,\frac{1}{5}^5\right)^P,\ \text{または}\ X_2=\left(\left(\frac{3}{5}^3,-\frac{2}{5}^2\right)^P,\frac{1}{5}^5\right)^P.$$

に含まれる．$X_1\cup X_2$ の任意の 2 点間の距離を考慮すれば，$\tilde{H}(n,2)$ を含む極大な 2 距離集合は，ブロックの置換を除いて，

$$\left(\left(\frac{2}{5}^4,-\frac{3}{5}\right)^P,\frac{1}{5}^5\right)\cup\left(\frac{1}{5}^5,\left(\frac{3}{5}^3,-\frac{2}{5}^2\right)^P\right)\cup\tilde{H}(n,2)\quad[40\text{ 点}],$$

となることが分かる．

4 $\tilde{H}(n,m)$ が極大であるための必要十分条件

この節では，$\tilde{H}(n,m)$ が $\mathbb{R}^{n(m-1)}$ 上の m 距離集合として極大であるための必要十分条件を紹介する．第 2 節から，$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{mn}$ が距離集合の性質を保ったまま $\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられるとすれば，

$$\mathbf{x}\in\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\}_{0\le i\le t_j,1\le j\le m})=(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_m)$$

となる．もし，$\mathfrak{X}$ のある元が，$\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられるならば，$\mathfrak{X}$ の全ての元が $\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられることに注意する．$\mathbf{x}\in\mathfrak{X}$ に対して，

$$M_{\mathfrak{X}}=\max_{\mathbf{y}\in\tilde{H}(n,m)}d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2$$

とする．ここで $M_{\mathfrak{X}}$ は，元 $\mathbf{x}\in\mathfrak{X}$ の選び方に依らない．このとき，次が成り立つ．

補題 4.1. $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ が m 距離の性質を保ったまま $\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられる必要十分条件は，$M_{\mathfrak{X}}$ が偶数で，$M_{\mathfrak{X}} \leq 2m$ を満たすことである．

$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ に対して，もし $t_l \geq 3$ となる l が存在するとき，$\mathfrak{X}'_l$ を $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}'_l = \mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})$ と定義する，ここで $k'^{(j)}_i$ は次のように与えられる．

- $(j,i) \neq (l,1),(l,2),(l,t_l-1),(l,t_l)$ のとき，$k'^{(j)}_i = k_i^{(j)}$,
- $t_l \geq 4$ のとき，$k'^{(l)}_1 = k_1^{(l)} - 1$, $k'^{(l)}_2 = k_2^{(l)} + 1$, $k'^{(l)}_{t_l-1} = k_{t_l-1}^{(l)} + 1$, $k'^{(l)}_{t_l} = k_{t_l}^{(l)} - 1$,
- $t_l = 3$ のとき，$k'^{(l)}_1 = k_1^{(l)} - 1$, $k'^{(l)}_2 = k_2^{(l)} + 2$, $k'^{(l)}_3 = k_3^{(l)} - 1$.

例えば，$\tilde{H}(6,4)$ に

$$\mathfrak{X} = \left(\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}^3\right)^P, \frac{1}{6}^6, \frac{1}{6}^6, \frac{1}{6}^6\right)$$

の任意の元は付け加えられるが，$l=1$ に対して，上の操作を行えば，

$$\mathfrak{X}'_1 = \left(\left(\frac{1}{2}^4 - \frac{1}{2}^2\right)^P, \frac{1}{6}^6, \frac{1}{6}^6, \frac{1}{6}^6\right)$$

となる．この操作 $\mathfrak{X}'$ について，次が成り立つ．

補題 4.2. $M_{\mathfrak{X}}$ を偶数であるとする．そのとき，$M_{\mathfrak{X}'}$ も偶数で，$M_{\mathfrak{X}} > M_{\mathfrak{X}'}$ を満たす．

補題 4.1, 4.2 により，もし，$\mathfrak{X}$ の元が $\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられるならば，$\mathfrak{X}'$ の元も $\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられる．この操作を繰り返すことで，全ての j に対して，$t_j \leq 2$ を満たし，$\tilde{H}(n,m)$ に付け加えられる元を持つ $\mathfrak{X}_0$ を構成することができる．つまり，$\tilde{H}(n,m)$ が極大でないことは，任意の j に対して $t_j \leq 2$ をみたす $\mathfrak{X}$ で $\tilde{H}(n,m)$ に元が付け加えらるものがあるかをどうかで判断できる．それが主なアイデアとなり次を得る．

補題 4.3. 次の 2 条件は同値である．

(1) $\tilde{H}(n,m)$ は m 距離集合として，極大でない．

(2) 整数 l, $k_0^{(1)}, \dots, k_0^{(m)}$ が存在して，$n \ge k_0^{(1)} \ge \cdots \ge k_0^{(l)} > 1 = k_0^{(l+1)} = \cdots = k_0^{(m)}$ を満たし，ある i に対して $k_0^{(i)} \ne n$，かつ

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{k_0^{(j)}(n - k_0^{(j)})}{n} + 2l \tag{4.1}$$

が $2m$ 以下の偶数である．

補題 4.3 と初等的な $M_{\mathfrak{X}}$ の評価により，次の定理を得る．

定理 4.4. $\tilde{H}(n,m)$ が m 距離集合として極大でない最大の n は m^2+m-1 である．

5 $\tilde{H}(n,m)$ を含む最大な m 距離集合

本節では，$m = 3, 4$ に対し，$\tilde{H}(n,m)$ を含む最大な m 距離集合の分類の方法について述べていく．まず，m を固定し，$n \le m^2 + m - 1$ を満たす全ての n に対して，補題 4.3 (2) を満たす $(k_0^{(1)}, \dots, k_0^{(m)})$ をコンピュータにより，全て列挙する．$m = 3, 4$ のとき，表 6 で $(k_0^{(1)}, \dots, k_0^{(m)})$ から得られる $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ をブロックの置換を除いて示す．

$\mathfrak{X}'$ と逆の操作を，$M_{\mathfrak{X}_0} < 2m$ を満たす $\mathfrak{X}_0$ に対して行うことで，$\tilde{H}(n,m)$ に加えることができる元をもつ $\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ を全て与えることが出来る．表 7 は，$\mathfrak{X}_0$ から得られた $\mathfrak{X}$ のリストである．

次に，いつ 2 点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ が $\tilde{H}(n,m)$ へ同時に付け加えられるかを考える．$(\alpha^{k_1}, (\alpha-1)^{k_2})^P$ (*resp.* $(\alpha^{k_1}, (\alpha-1)^{k_2}, (\alpha-2)^{k_3})^P$) が $(1^{k_1}, 0^{k_2})^P$ (*resp.* $(1^{k_1}, 0^{k_2}, -1^{k_3})^P$) と等長同型であることに注意する．表 8 の $\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ を除けば，表 6 の $\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ の全ての元は，$\tilde{H}(n,m)$ へ同時に付け加えられる．Erdős–Ko–Rado の定理の類似 [7, 18, 3, 13, 12, 10, 9, 2] を用いることで，表 8 のように，$\tilde{H}(n,m)$ に全ての元を同時に付け加えられる，$\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ の最大な部分集合を分類することが可能である．ここでは，次の記号を用いた．

$$\mathscr{F}_r(k,t) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (1^k, 0^{n-k})^P : |\{i \in \{1, \dots, t+2r\} : x_i = 1\}| \ge t+r\}.$$

表 6　$\tilde{H}(n,m)$ へ付け加えられる元をもつ $\mathfrak{X}_0$

m	n	$n\mathfrak{X}_0$
3	3	$(1^3,1^3,1^3)$, $((2^2,-1)^P,1^3,1^3)$, $((2^2,-1)^P,(2^2,-1)^P,1^3)$
	5	$((5,0^4)^P,(2^4,-3^1)^P,1^5)$, $((5,0^4)^P,(3^3,-2^2)^P,1^5)$
	9	$((4^6,-5^3)^P,1^9,1^9)$, $((5^5,-4^4)^P,1^9,1^9)$
	11	$((3^9,-8^2)^P,1^{11},1^{11})$, $((8^4,-3^7)^P,1^{11},1^{11})$
4	2	$(1^2,1^2,1^2,1^2)$
	3	$((3,0^2)^P,1^3,1^3,1^3)$, $((3,0^2)^P,(2^2,-1)^P,1^3,1^3)$, $((3,0^2)^P,(2^2,-1)^P,(2^2,-1)^P,1^3)$
	5	$((2^4,-3^1)^P,(2^4,-3^1)^P,1^5,1^5)$, $((3^3,-2^2)^P,(2^4,-3^1)^P,1^5,1^5)$, $((3^3,-2^2)^P,(3^3,-2^2)^P,1^5,1^5)$, $((5,0^4)^P,(5,0^4)^P,(2^4,-3^1)^P,1^5)$, $((5,0^4)^P,(5,0^4)^P,(3^3,-2^2)^P,1^5)$
	6	$((3^4,-3^2)^P,1^6,1^6,1^6)$, $((5^2,-1^4)^P,(3^4,-3^2)^P,1^6,1^6)$
	7	$((2^6,-5^1)^P,1^7,1^7,1^7)$, $((5^3,-2^4)^P,1^7,1^7,1^7)$, $((6^2,-1^5)^P,(2^6,-5^1)^P,1^7,1^7)$, $((6^2,-1^5)^P,(5^3,-2^4)^P,1^7,1^7)$
	9	$((9,0^8)^P,(4^6,-5^3)^P,1^9,1^9)$, $((9,0^8)^P,(5^5,-4^4)^P,1^9,1^9)$
	11	$((11,0^{10})^P,(3^9,-8^2)^P,1^{11},1^{11})$, $((11,0^{10})^P,(8^4,-3^7)^P,1^{11},1^{11})$
	13	$((6^8,-7^5)^P,1^{13},1^{13},1^{13})$, $((7^7,-6^6)^P,1^{13},1^{13},1^{13})$
	14	$((5^{10},-9^4)^P,1^{14},1^{14},1^{14})$, $((9^6,-5^8)^P,1^{14},1^{14},1^{14})$
	19	$((4^{16},-15^3)^P,1^{19},1^{19},1^{19})$, $((15^5,-4^{14})^P,1^{19},1^{19},1^{19})$

表 7　$\mathfrak{X}_0$ から得られる $\mathfrak{X}$

m	n	$n\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$
3	3	$((4,1,-2)^P,1^3,1^3)$, $((5,-1^2)^P,1^3,1^3)$
4	2	$((3,-1)^P,1^2,1^2,1^2)$
	3	$((3,0^2)^P,(4,1,-2)^P,1^3,1^3)$, $((3^2,-3)^P,1^3,1^3,1^3)$, $((3,0^2)^P,(5,-1^2)^P,1^3,1^3)$
	6	$((9,3^2,-3^3)^P,1^6,1^6,1^6)$
	7	$((9,2^4,-5^2)^P,1^7,1^7,1^7)$, $((12,5,-2^5)^P,1^7,1^7,1^7)$

$$\mathscr{F}_r(k,t,k_0) = \{\mathbf{x} \in (k_0^k,(k_0-n)^{n-k})^P \mid 1/n(\mathbf{x}-(k_0-n)\mathbf{1}) \in \mathscr{F}_r(k,t)\}.$$

表 9 は，表 7 の $\mathfrak{X}$ に対して，同時に $\tilde{H}(n,m)$ に加えられる最大部分集合を示している．主に，コンピューターに依る分類と，[2] のある種の Erdős–Ko–Rado の定理の類似の結果を用いた．

表 8 Erdős–Ko–Rado の定理等が必要な $\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$

m	n	$n\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$	最大部分集合 X	$\|X\|$
3	9	$((5^5,-4^4)^P,1^9,1^9)$	$(\mathscr{F}_3(5,2,5),1^9,1^9)$	56
	11	$((8^4,-3^7)^P,1^{11},1^{11})$	$(\mathscr{F}_0(4,1,8),1^{11},1^{11})$	120
4	7	$((6^2,-1^5)^P,(5^3,-2^4)^P,1^7,1^7)$	$((6^2,-1^5)^P,\mathscr{F}_0(3,1,5),1^7,1^7)$	315
	9	$((9,0^8)^P,(5^5,-4^4)^P,1^9,1^9)$	$((9,0^8)^P,\mathscr{F}_3(5,2,5),1^9,1^9)$	504
	11	$((11,0^{10})^P,(8^4,-3^7)^P,1^{11},1^{11})$	$((11,0^{10})^P,\mathscr{F}_0(4,1,8),1^{11},1^{11})$	1320
	13	$((6^8,-7^5)^P,1^{13},1^{13},1^{13})$	$(\mathscr{F}_4(8,4,6),1^{13},1^{13},1^{13})$	495
			$(\mathscr{F}_5(8,4,6),1^{13},1^{13},1^{13})$	495
		$((7^7,-6^6)^P,1^{13},1^{13},1^{13})$	$(\mathscr{F}_3(7,3,7),1^{13},1^{13},1^{13})$	372
	14	$((9^6,-5^8)^P,1^{14},1^{14},1^{14})$	$(\mathscr{F}_1(6,2,9),1^{14},1^{14},1^{14})$	525
	19	$((15^5,-4^{14})^P,1^{19},1^{19},1^{19})$	$(\mathscr{F}_0(5,1,15),1^{19},1^{19},1^{19})$	3060

表 9 表 7 の $\mathfrak{X}$ の最大部分集合

m	n	$n\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$	最大部分集合 X	$\|X\|$
3	3	$((4,1,-2)^P,1^3,1^3)$	$\{((u_1,1,v_1),1^3,1^3),$ $((u_2,v_2,1),1^3,1^3),$ $((1,u_3,v_3),1^3,1^3)\}$ $((u_i,v_i)=(4,-2)$ or $(-2,4))$	3
		$((5,-1^2)^P,1^3,1^3)$	$\{((5,-1^2),1^3,1^3)\}$	1
4	2	$((3,-1)^P,1^2,1^2,1^2)$	$((3,-1)^P,1^2,1^2,1^2)$	2
	3	$((3,0^2)^P,(4,1,-2)^P,1^3,1^3)$	$\{((3,0^2)^P,(u_1,1,v_1),1^3,1^3),$ $((3,0^2)^P,(u_2,v_2,1),1^3,1^3),$ $((3,0^2)^P,(1,u_3,v_3),1^3,1^3)\}$ $((u_i,v_i)=(4,-2)$ or $(-2,4))$	9
		$((3^2,-3)^P,1^3,1^3,1^3)$	$((3^2,-3)^P,1^3,1^3,1^3)$	3
		$((3,0^2)^P,(5,-1^2)^P,1^3,1^3)$	$((3,0^2),(5,-1^2)^P,1^3,1^3),$ $((3,0^2)^P,(5,-1^2),1^3,1^3)$	3
	6	$((9,3^2,-3^3)^P,1^6,1^6,1^6)$	$(9,(3^2,-3^3)^P)\cup(3^2,(9,-3^3)^P)$ $\cup(3,9,(3,-3^3)^P)$	18
	7	$((9,2^4,-5^2)^P,1^7,1^7,1^7)$	$X_7(9)$, $Y_7(9)$, $Z_7(9)$	37
		$((12,5,-2^5)^P,1^7,1^7,1^7)$	$(12,(5,-2^5)^P)\cup(5,(12,-2^5)^P)$	12

次に，異なる $\{k_i^{(j)}\}$，$\{k'^{(j)}_i\}$ に対して，$\mathbf{x}\in\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$, $\mathbf{y}\in\mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})$ が，いつ $\tilde{H}(n,m)$ に同時に付け加えられるか考える．ベクトル $(x_{11},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn})\in\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ が標準的と呼ばれるのは，全ての $i\in\{1,\ldots,m\}$，$l\in\{1,\ldots,n-1\}$ に対して，$x_{i,l}\geq x_{i,l+1}$ を満たすときにいう．次の補題が有効である．

補題 5.1. $\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$，$\mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})$ は異なると仮定する．そのとき，次が同値

である．

(1) ある $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$，$\mathbf{y} \in \mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})$ が存在して，$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \in \{2, 4, \ldots, 2m\}$ を満たす．

(2) 標準的な $\mathbf{x}' \in \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$，$\mathbf{y}' \in \mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})$ に対して，$d(\mathbf{x}', \mathbf{y}')^2 \in \{2, 4, \ldots, 2m\}$ を満たす．

さらに，もし

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\}), \mathbf{y} \in \mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \in \{2, 4, \ldots, 2m\},$$

を満たすならば，全ての組 $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$，$\mathbf{y} \in \mathfrak{X}(\{k'^{(j)}_i\})$ は，$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \in \{2, 4, \ldots, 2m\}$ を満たす．

$V = V(n, m)$ を $\tilde{H}(n, m)$ に付け加えられる元を持つ $\mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ の族であるとする．標準的な $x' \in \mathfrak{X}$, $y' \in \mathfrak{X}'$ に対して，辺集合 $E = \{(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') \mid d(x', y') \in \{2, 4, \ldots, 2m\}\}$ を定義することで，V にグラフ構造 $\mathcal{G}(n, m) = (V, E)$ を与える．ソフトウェア Magma を用いて，$\mathcal{G}(n, m)$ の極大クリークを分類することが出来る．補題 5.1 を用いれば，$((3, 0^2)^P, 1^3, 1^3, (4, 1, -2)^P)$, $(1^3, (3, 0^2)^P, 1^3, (5, -1^2)^P)$ の組を除けば，隣接する $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$, に対して，全ての組 $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$, $\mathbf{x}' \in \mathfrak{X}'$ が，同時に $\tilde{H}(n, m)$ へ付け加えられることが分かる．したがって，極大クリークの頂点 $\mathfrak{X}$ を，$\tilde{H}(n, m)$ へ同時に付け加えられる $\mathfrak{X}$ の最大部分集合 X に置き換えることで，$\tilde{H}(n, m)$ の含む最大な m 距離集合が分類できる．表 10 が，その最大 m 距離集合のリストである．

参考文献

[1] S. Adachi, R. Hayashi, H. Nozaki, and C. Yamamoto, Maximal m-distance sets containing the representation of the Hamming graph $H(n, m)$, preprint, arXiv:1602.01215.

[2] S. Adachi, and H. Nozaki, On the largest subsets avoiding the diameter of $(0, \pm 1)$-vectors, to appear in *Ars Math. Contemp.*

表 10　$\tilde{H}(n,m)$ に加えられる最大集合 X

m	n	X	$\lvert X\rvert$
3	3	$((5,-1^2),1^3,1^3)\cup(1^3,(2^2,-1)^P,(2^2,-1)^P)$ $\cup((2^2,-1)^P,1^3,1^3)$	13
		$(1^3,1^3,1^3)\cup((4,1,-2)^C,1^3,1^3)^P$	10
	5	$((3^3,-2^2)^P,1^5,(5,0^4)^P)\cup(1^5,(2^4,-3)^P,(5,0^4)^P)$	75
	9	$(\mathscr{F}_3(5,2,5),1^9,1^9)$	84
		$((4^6,-5^3)^P,1^9,1^9)^P$	252
	11	$((3^9,-8^2)^P,1^{11},1^{11})$	55
		$(\mathscr{F}_0(4,1,8),1^{11},1^{11})$	120
4	2	$(1^2,1^2,1^2,1^2)\cup((3,-1)^P,1^2,1^2,1^2)^P$	9
	3	$((3,0^2)^P,1^3,1^3,1^3)\cup(1^3,((3,0^2)^P,1^3,(2^2,-1)^P)^C)$ $\cup((2^2,-1)^P,((3,0^2)^P,(2^2,-1)^P,1^3)^C)\cup(3^2,-3)^P,1^3,1^3,1^3)$ $\cup((3,0^2)^P,(\{(-2,4,1),(-2,1,4)\},1^3,1^3)^C)$ $\cup(1^3,((5,-1^2),(3,0^2)^P,1^3)^C)$	141
		$((3,0^2)^P,1^3,1^3,1^3)\cup(1^3,((3,0^2)^P,1^3,(2^2,-1)^P)^C)$ $\cup((2^2,-1)^P,((3,0^2)^P,(2^2,-1)^P,1^3)^C)\cup(3^2,-3)^P,1^3,1^3,1^3)$ $\cup((3,0^2)^P,((4,-2,1)^C,1^3,1^3)^C)$	141
	5	$(1^5,1^5,(2^4,-3)^P,(2^4,-3)^P)$ $\cup((3^3,-2^2)^P,1^5,1^5,(2^4,-3)^P)^{(1\,2)(3\,4)}$ $\cup((3^3,-2^2)^P,(3^3,-2^2)^P,1^5,1^5)$ $\cup((5,0^4)^P,1^5,(5,0^4)^P,(2^4,-3)^P)^{(1\,2)(3\,4)}$ $\cup((5,0^4)^P,(3^3,-2^2)^P,(5,0^4)^P,1^5)^{(1\,2)(3\,4)}$	975
	6	$((3^4,-3^2)^P,1^6,1^6,1^6)\cup(1^6,((5^2,-1^4)^P,1^6,(3^4,-3^2)^P)^C)$ $\cup((9,(3^2,-3^3)^P)\cup(3^2,(9,-3^3)^C)\cup(3,9,(3,-3^3)^C),1^6,1^6,1^6)$	708
	7	$((2^6,-5)^P,1^7,1^7,1^7)\cup(1^7,((6^2,-1^5)^P,\mathscr{F}_0(3,1,5),1^7)^C)$ $\cup(\{X_7(9),Y_7(9)\text{ or }Z_7(9)\},1^7,1^7,1^7)$	989
		$((5^3,-2^4)^P,1^7,1^7,1^7)\cup(1^7,((6^2,-1^5)^P,(2^6,-5)^P,1^7)^C)$ $\cup(12,(5,-2^5)^P)\cup(5,(12,-2^5)^P)$	488
	9	$((9,0^8)^P,\mathscr{F}_3(5,2,5),1^9,1^9),(1^9,1^9,(9,0^8)^P,\mathscr{F}_3(5,2,5))$	1008
		$((9,0^8)^P,((4^6,-5^3)^P,1^9,1^9)^C)$	2268
	11	$((11,0^{10})^P,\mathscr{F}_0(4,1,8),1^{11},1^{11})\cup(1^{11},1^{11},(11,0^{10})^P,(3^9,-8^2)^P)$	1925
	13	$(\mathscr{F}_4(8,4,6),1^{13},1^{13},1^{13})$	495
		$(\mathscr{F}_3(7,3,7),1^{13},1^{13},1^{13})$	372
	14	$((5^{10},-9^4)^P,1^{14},1^{14},1^{14})$	1001
		$(\mathscr{F}_1(6,2,9),1^{14},1^{14},1^{14})$	525
	19	$((4^{16},-15^3)^P,1^{19},1^{19},1^{19})$	969
		$(\mathscr{F}_0(5,1,15),1^{19},1^{19},1^{19})$	3060

$(x_1,\ldots,x_n)^C = \{(x_{1+i},\ldots,x_{n+i}) \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$, $(X_1,\ldots,X_n)^C = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(X_{1+i},\ldots,X_{n+i})$, $(X_1,X_2,X_3,X_4)^{(1\,2)(3\,4)} = (X_1,X_2,X_3,X_4) \cup (X_2,X_1,X_4,X_3)$.

[3] R. Ahlswede, and L.H. Khachatrian, The complete intersection theorem for systems of finite sets, *Europ. J. Combin.* **18** (1997), 125–136.

[4] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147–152.

[5] E. Bannai, T. Sato, and J. Shigezumi, Maximal m-distance sets containing the representation of the Johnson graph $J(n, m)$, *Discrete Math.* **312** (2012), no. 22, 3283–3292.

[6] P. Erdős, and P. Fishburn, Maximum planar sets that determine k distances, *Discrete Math.* **160** (1996), 115–125.

[7] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **12** (1961), 313–320.

[8] S. J. Einhorn, and I. J. Schoenberg, On euclidean sets having only two distances between points. I. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **69**=*Indag. Math.* **28** (1966), 479–488, 489–504.

[9] P. Frankl, and N. Tokushige, Some best possible inequalities concerning cross-intersecting families, *J. Combin. Theory, Ser. A* **61** (1992), 87–97.

[10] A.J.W. Hilton, and E.C. Milner, Some intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford* **18** (1967), 369–384.

[11] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* **77** (1997), 318–338.

[12] M. Matsumoto, and N. Tokushige, The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem for cross-intersecting families, *J. Combin. Theory Ser. A* **52** (1989), no. 1, 90–97.

[13] L. Pyber, A new generalization of the Erdős–Ko–Rado theorem, *J. Combin. Theory Ser. A* **43** (1986), no. 1, 85–90.

[14] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.* **25** (2004), 1039–1058.

[15] M. Shinohara, Uniqueness of maximum planar five-distance sets, *Discrete Math.* **308** (2008), 3048–3055.

[16] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, arXiv:1309.2047.

[17] X. Wei, A proof of Erdős–Fishburn's conjecture for $g(6) = 13$, *Electron. J. Comb.* **19**(4) (2012), #P38.

[18] R.M. Wilson, The exact bound on the Erdős–Ko–Rado theorem, *Combinatorica* **4** (1984), 247–257.