数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 96-103

DISTANCE SETS AND KNESER'S THEOREM

滋賀大学教育学部　篠原雅史
Masashi Shinohara
Faculty of Education, Shiga University

熊本大学教育学部　籾原幸二[1]
Koji Momihara
Faculty of Education, Kumamoto University

1. はじめに

本稿は RIMS 研究集会「有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合せ論の研究」での講演をまとめたものである．講演では，円周上の距離集合の分類に関して，主に Kneser の定理の応用にあたる部分に焦点をあてて説明した．本稿ではその部分に加え，講演ではあまり触れることのできなかった，平面上の距離集合への応用についても触れる．本稿では全体の流れを解説することを重点に置き，証明の細部は割愛する．詳しくは [8, 9] を参考していただきたい．

ここでは，円周 S^1 （または平面 $\mathbb{R}^2$）上の距離集合について考える．(他の次元の距離集合については本稿では触れないが興味がある方は [2, 10, 11, 14] などを参考にしていただきたい．) $d(p,q)$ を二点 p,q のユークリッド距離とする．$X \subset S^1$ に対し X の異なる二点間の距離全体の集合を $D(X)$ とする．つまり，

$$D(X)=\{d(p,q)\mid p,q\in X\ (p\neq q)\}$$

とする．$|D(X)|=k$ となるとき，X を k-距離集合という．円周上（より一般に球面上）の配置 X に対し，ユークリッド距離の個数 $|D(X)|$ は，内積の個数や弧長の個数に等しいので，場合によって使い分けることもある．距離の関係は相似変換で不変であるので，距離集合の分類問題を考えるときは相似なものは同一視して考える．

Example 1.1. R_m を正 m 角形の頂点集合とするとき，$|D(R_m)|=\lfloor n/2\rfloor$ となる．

次が本稿の主結果である．

Theorem 1.2. X を S^1 上の n 点 k-距離集合 $(n\geq 4)$ とする．もし $k<M_n$ なら，X は R_{2k} の部分集合か R_{2k+1} の部分集合である．ここで，

$$M_n=\begin{cases}3t, & \text{if } n=4t \text{ or } 4t-1,\\ 3t-2, & \text{if } n=4t-2 \text{ or } 4t-3.\end{cases}$$

Figure 1 のように 2 つの正多角形を使って，正多角形には含まれない偶数点の配置を構成できる．奇数点の場合は偶数点から 1 点取り除くことで例が得られる．これらの例は $k=M_n$ を満たしているため，$k<M_n$ の評価が最良であることが分かる．

[1]Research supported by JSPS under Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 25800093.

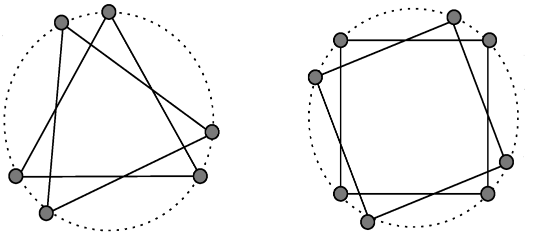

FIGURE 1. 正多角形に含まれない配置

2. 凸集合に対する問題からの動機付け

距離集合に関する研究の一つの出発点として，Erdős [3] の予想が挙げられる．

Conjecture 2.1 (Erdős [3]). 凸 n 角形の頂点集合 X に対して $|D(X)| \geq \lfloor n/2 \rfloor$ となる．

この予想については Altman [1] が肯定的に解決し，その後，次のような進展があった．

- Altman
  - $n \leq 2k+1$.
  - $n = 2k+1$ のとき，$X = R_{2k+1}$ となる．
- Fishburn [6]
  - $n = 2k$ $(k \geq 4)$ のとき，$X = R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる．
  - $(n,k) = (7,4)$ のとき，$X \subset R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる．

  Conjecture 2.2. もし $n = 2k-1$ $(k \geq 4)$ なら，$X \subset R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる．
- Erdős-Fishburn [4]
  - $(n,k) = (9,5)$ のとき，$X \subset R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる．
  - $(n,k) = (11,6)$ のとき，$X \subset R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる (コメントのみ)．

まず言及しておくべきこととして，距離集合における分類問題として，最良なところから条件を緩くしていくと一般には多くのものが挙がってくるため，問題としてはより難しくなっていく．Conjecture 2.2 は未だに未解決であるが，もし正しかったとして，$n = 2k-2$ ならどうか，$n = 2k-3$ ならどうか，ということも気になるし，そもそも，n と k をどこまで近づけられるのだろうか，という疑問も自然に生じてくる．

そこで，この問題を思い切って円周上に限定して考えるとどうなるか，というのが本研究のきっかけである．空間としては格段に考えやすくなるが，円周に限定するとその境界がはっきり分かったというのが今回の主結果である．

3. SUMSET と KNESER の定理

G を有限アーベル群とし，A, B を G の空でない部分集合とするとき，A と B の sumset $A+B$ を次で定義する．

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

例えば，$\mathbb{Z}_{11}$ の部分集合 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,2\}$, $C=\{3,4\}$ に対し，

$$A+B=\{0,1,2,3,4\},$$
$$A+C=\{3,4,5,6\}$$

となる．

sumset については，Nathanson [12] に詳しく書かれている．ここでは 2 つの部分集合 A, B のサイズ（もしくは 2 つのサイズの和）を固定したときに，sumset の位数 $|A+B|$ が小さくなるようなものについて確認していく．

G が素数位数の巡回群のとき，sumset の位数の下からの評価について次の定理が知られている．

Theorem 3.1 (Cauchy, Davenport). p を素数とし，$G=\mathbb{Z}_p$ とする．また $A,B\subset G$ とする．$A+B\neq G$ のとき，

$$|A+B|\geq|A|+|B|-1 \tag{3.1}$$

が成り立つ．

(3.1) の等号が成立の場合について次が成り立つ．

Theorem 3.2 (Vosper). p を素数とし，$G=\mathbb{Z}_p$ とする．また $A,B\subset G$ とする．もし，$|A+B|=|A|+|B|-1$ が成り立つならば，(A,B) は次のいずれかである．

(1) $|A|=1$ または $|B|=1$.
(2) $|A+B|=p-1$.
(3) A, B は（$\mathbb{Z}_p$ 上で）同じ交差を持つ等差数列である．つまり，

$$A=\{a+id\mid i=0,1,\ldots,k-1\}$$
$$B=\{b+id\mid i=0,1,\ldots,l-1\}$$

となっている．

上の (1) ～ (3) において，(1), (2) は任意の A（または B） から上手く B（または A）を選ぶことで条件を満たすようにできるため，(3) を満たすペア (A,B) が本質的である．次節で扱う直線上のよい距離集合は，(3) と似た形をしている．

Kneser は Cauchy-Davenport の定理を任意の有限アーベル群の場合に拡張した．

Theorem 3.3 (Kneser [7]). G を有限アーベル群とする．また $A,B\subset G$ とする．このとき

$$|A+B|\geq|A+H|+|B+H|-|H|$$

が成り立つ．ここで H は $A+B$ の固定部分群，つまり

$$H=\{g\in G\mid g+A+B=A+B\}.$$

次の例をみると，$\mathbb{Z}_m$ 上の sumset は，正多角形上の距離集合と対応付けられることが分かる．

Example 3.4. $A=\{0,1,4\}\subset\mathbb{Z}_9$ とするとき，

$$A-A=\{0,\pm1,\pm3,\pm4\}$$

A を R_9 の 3 点部分集合と見ると，A は 3-距離集合となっている．

Example 3.4 のように，$A \subset \mathbb{Z}_m$ に R_m の部分集合を自然に対応付けることができ，次のような関係がある．

$$A\text{: } k\text{-距離集合} \iff |A-A| = \begin{cases} 2k & \text{if } \frac{m}{2} \in D(A) \\ 2k+1 & \text{if } \frac{m}{2} \notin D(A) \end{cases}$$

Kneser の定理の応用として，正多角形上の距離集合に対して次の定理が得られる．

Theorem 3.5. $X \subset R_m$ を n 点 k-距離集合とし，$\langle X \rangle = R_m$ を満たしているとする．もし $k < M_n$ ならば，$m \in \{2k, 2k+1\}$．ここで

$$M_n = \begin{cases} 3t, & \text{if } n = 4t \text{ or } 4t-1, \\ 3t-2, & \text{if } n = 4t-2 \text{ or } 4t-3. \end{cases}$$

Proof. ここでは，$|X| = 2n$ の場合のみ示す．

X は k-距離集合だから，$|X-X| \in \{2k, 2k+1\}$．特に，$|X-X| \leq 2k+1$．一方，$|X-X|$ の下からの評価として次が成り立つ．

Claim $X \subset \mathbb{Z}_m$ が $|X| = 2n$ かつ $\langle X \rangle = \mathbb{Z}_m$ を満たしているとする．このとき，

$$|X-X| \geq \min\{m, 3n\}$$

となる．

（Claim の証明）

Kneser の定理より，

$$|X-X| \geq |X+H| + |-X+H| - |H| = 2|X+H| - |H|$$

$G = H$ のとき，$|X-X| = |G| = m$ となるので $(G:H) \geq 2$ と仮定してよい．このとき $|X+H| \geq 2|H|$ となるので，

$$|X-X| \geq \frac{3}{2}|X+H| \geq 3n.$$

(Claim の証明おわり)

Claim より，

$$\min\{m, 3n\} \leq |X-X| \leq 2k+1$$

が成り立つので，

$$k \geq \min\{\lceil (m-1)/2 \rceil, \lceil (3n-1)/2 \rceil (= M_{2n})\}.$$

仮定より，$k < M_{2n}$ だから

$$\lceil (m-1)/2 \rceil \leq k < M_n = \lceil (3n-1)/2 \rceil.$$

この式より，$|X| = 2n > \frac{2}{3}m + c$ が得られる (c は定数)．特に，m が十分大きいとき，

$$|X| > \frac{m}{2}$$

となっている．ここで R_m から点を取り除いて，ある距離 $\alpha \in D(R_m)$ を取り除くためには少なくとも $m/2$ 個の点を取り除かなければならないので

$$D(X) = D(R_m)$$

が成り立つ．つまり

$$m \in \{2k, 2k+1\}.$$

□

Theorem 3.5 より，Theorem 1.2 を示すためには，定理の仮定のもとで X がある正多角形 R_m にのることが確かめられればよいことが分かる．

4. 直線上・円周上の距離集合

半円上の距離集合は弧長を考えることで，直線上の距離集合とみることができる．一方で円周上の n 点の配置 X があるとき，円の中心と X の 1 つの点を通るように半円を 2 つに分けると，いずれか片側の半円には $\lceil n/2 \rceil$ 点以上ある．そのため，$k < M_n$ となる円周上の n 点 k-距離集合は，

$$k \leq \begin{cases} 3t-1 & \text{if } n = 2t \\ 3t & \text{if } n = 2t+1 \end{cases} \tag{4.1}$$

を満たす直線上の n 点 k-距離集合を含んでいる．本節では，(4.1) を満たす，直線上の n 点 k-距離集合を特徴付けることを目標にする．

直線上の距離集合は，インターバルを用いて表現すると扱いやすい．そこで直線上の n 点集合 X を $X = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ $(a_1 < a_2 < \dots < a_n)$ とするとき，$b_i = a_{i+1} - a_i$ とし $X = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ と表記する．

Definition 4.1. $X = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ とする．$1 \leq i \leq n-1$ なる任意の i に対し，$b_i/b_1 \in \mathbb{Q}$ となるとき，X を rational といい，そうでないとき irrational という．

Example 4.2. 無理数 c に対し，$X = (1,1,1,c,1,1,1)$ とするとき，

$$D(X) = \{1,2,3\} \cup \{i + c \mid 0 \leq i \leq 6\}$$

となるので，X は irrational な 8 点 10-距離集合である．

irrational な n 点 k-距離集合に対する，k の下からの評価として次の定理がある．

Theorem 4.3. X を直線上の *irrational* な n 点 k-距離集合とするとき，

$$k \geq \lfloor \frac{3n-3}{2} \rfloor .$$

証明は頂点数に関する帰納法で行う．詳細は省略するが，次の補題が鍵となる．

Lemma 4.4. $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $(a_1 < a_2 < \dots < a_n)$ を *irrational* とし，X から両端の点を取り除いたものを $Y = X \setminus \{a_1, a_n\}$ とする．このとき，

$$|D(X) \setminus D(Y)| \geq 3.$$

が成り立つ．

Proof. 両端の 2 点を取り除くとき，$d(a_1, a_n), d(a_1, a_{n-1}), d(a_2, a_n)$ はいずれも $D(Y)$ の最大値 $d(a_2, a_{n-2})$ より大きいので，$D(X)$ から消失する．$d(a_1, a_2) \neq d(a_{n-1}, a_n)$ のとき，$|\{d(a_1, a_n), d(a_1, a_{n-1}), d(a_2, a_n)\}| = 3$ となるので $d(a_1, a_2) = d(a_{n-1}, a_n)$ とし，この距離を 1 とする．

無理数のインターバルのうち最も左側のものを b_s，最も右側のものを b_t とする（$s = t$ でもよい）．ここで $d_1^* = d(a_1, a_t), d_2^* = d(a_{s+1}, a_n)$ とおく．一般性を失うことなく，$d_1^* \geq d_2^*$ としてよい．このとき，d_1^* が 3 つ目の消失距離になることを確か

める．$a_i, a_j \in Y$ が $d(a_i, a_j) = d_1^*$ となるとき，$2 \leq i \leq s$ かつ $t+1 \leq j \leq n-1$ である．このとき b_s, b_t の定義から，

$$\mathbb{Q} \ni d(a_1, a_i) = d(a_t, a_j) \notin \mathbb{Q}$$

となり矛盾．よって，$d_1^* \notin D(Y)$. □

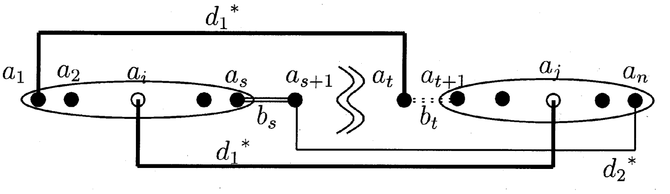

FIGURE 2. 非自明な消失距離 $d_1{}^*$

Theorem 4.3 は，k が n に対して十分小さいとき X は rational であることを意味する．今我々が必要としている範囲 (4.1) に対して，3 つのクラス

$$(n, k) = (2t, 3t-2), (2t, 3t-1), (2t+1, 3t)$$

以外は rational となっている．この 3 つのクラスの分類について次が成り立つ．

Theorem 4.5. X を *irrational* な n 点 k-距離集合とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $(n, k) = (2t, 3t-2)$ $(t \geq 2)$ のとき，

$$X = [m] \cup \tau_c([m]);$$

(2) $(n, k) = (2t+1, 3t)$ $(t \geq 5)$ のとき，

$$X = [m+1] \cup \tau_c([m]);$$

(3) $(n, k) = (2t, 3t-1)$ $(t \geq 7)$ のとき，

$$X = [m+1] \cup \tau_c([m-1]),$$

ここで c は無理数で，$[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ とする．また，$x \in \mathbb{R}$ に対し $\tau_c(x) = x + c$ とする．

この定理の結果は Vosper の定理と似た形をしている．何らかの関係性があるように思うが，その関係については今のところはっきりと分かっていない．

円周上の距離集合の分類問題に話を戻す．詳細は省略するが，$k < M_n$ を満たす円周上の n 点 k-距離集合 X に対し，半円には上の 3 つのパターンのいずれも存在できないことが確かめられる．(t が小さいときも同様.) このことより，X は rational な距離集合を上手く張り合わせてできることが分かり，X が正多角形の部分集合であることが導かれる．

Theorem 4.6. X を円周上の n 点 k-距離集合とする．もし $k < M_n$ なら X はある正多角形 R_m の部分集合である．

以上より Thoerem 1.2 が示された．

5. 円周と凸集合の間にあるクラス

平面上の点集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathrm{diam}(X) := \max D(X)$ と定め X の直径という．

$$D_X := \{p \in X \mid \exists q \in X, d(p,q) = \mathrm{diam}(X)\}$$

とし，X の直径点集合とよぶことにする．$X \subset \mathbb{R}^2$ に対し，D_X は凸集合になることが確かめられる．

X の直径グラフ $G = DG(X)$ を次で定義する．

$$\begin{cases} V(G) = X, \\ \{p,q\} \in E(G) \iff d(p,q) = \mathrm{diam}(X). \end{cases}$$

X を k-距離集合とし，Y を $DG(X)$ の独立集合としたとき，Y は高々$(k-1)$-距離集合になっている．Erdős-Fishburn [5] は，このことと凸集合の分類を用いて，平面上の最大 k-距離集合（$k = 3, 4$）を分類した．

このように凸集合は，平面上の距離集合の分類にも役立つが，この点では凸集合でなく直径点集合について考えれば十分である．ここで，$X \subset \mathbb{R}^2$ の任意の点 $p \in X$ に対し $d(p,q) = \mathrm{diam}(X)$ となる $q \in X$ が存在するとき，X を D-set ということにする．D-set については，距離の単調性が成り立つ．

Proposition 5.1 (Wei [15]). *$X = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ を D-set とし，点は反時計回りに並べられているとする．また $d_i := d(p_1, p_i)$ とする．このとき，ある j, s があって，*

$$d_2 < d_3 < \cdots < d_{j-1} < d_j = \cdots = d_{j+s} > d_{j+s+1} > \cdots > d_{n-2} > d_{n-1}$$

となっている．(他の点を基準にしても同様.)

次の問題を上げで本稿の結びとしたい．

Problem 5.2. D-set に対して Fishburn の予想（Conjecture 2.2）を証明せよ．また，円周で得られた結果は，どの程度 D-set に拡張できるだろうか？

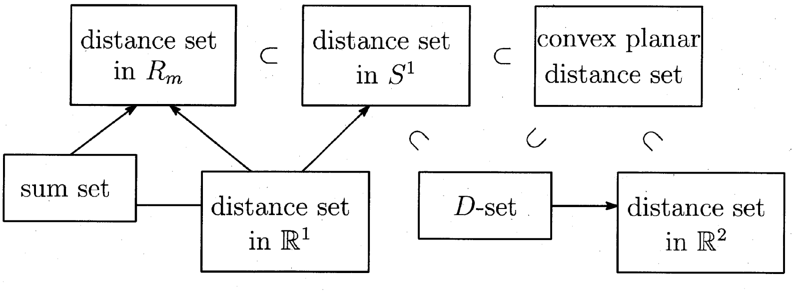

FIGURE 3. 全体の関係図

REFERENCES

[1] E. Altman, On a problem of P. Erdős, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 148–157.

[2] A. Barg, O.R. Musin, Bounds onsets with few distances, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **118** (2011), 1465–1474.

[3] P. Erdős, On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly*, **53** (1946), 248–250.

[4] P. Erdős, P. Fishburn, Convex nonagons with five intervertex distances, *Geom. Dedicata*, **60** (1996), 317–332.

[5] P. Erdős, P. Fishburn, Maximum planar sets that determine k distances, *Discrete Math.*, **160** (1996), 115–125.

[6] P. Fishburn, Convex polygons with few intervertex distances, *Comput. Geom.*, **5** (1995), 65–93.

[7] M. Kneser, Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen, *Math. Z.*, **58** (1953), 459–484.

[8] K. Momihara, M. Shinohara, Distance sets on circles, to appear in *Amer. Math. Monthly*.

[9] K. Momihara, M. Shinohara, Supplementary note on "Distance sets on circles", unpublished note (2016), `http://www.educ.kumamoto-u.ac.jp/~momihara/Supplementary_note_DSC.pdf`.

[10] O.R. Musin, Spherical two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **116** (2009), 988–995.

[11] O.R. Musin, H. Nozaki, Bounds on three- and higher-distance sets, *European J. Combin.*, **32** (2011), 1182–1190.

[12] M.B. Nathanson, *Additive Number Theory, Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Grad. Texts in Math. 165, Springer, 1996.

[13] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **25** (2004), 1039–1058.

[14] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, `arXiv:1309.2047`.

[15] X. Wei, Classification of eleven-point five-distance sets in the plane, *Ars Combinatorica*, **308** (2011), 505–515.