数理解析研究所講究録
第2005巻 2016年 141-144

頭髪のスタイル・シミュレーション
—おさげ髪のシミュレーション試論—

齊藤　郁夫
早稲田大学理工学術院
e-mail : i.saito2@kurenai.waseda.jp

1　はじめに

ルパン３世、風の谷のナウシカをはじめとする数々のアニメの作品を制作されている宮崎駿監督の作品は、ストーリーの素晴らしさはもちろんであるが、その登場人物（人に限らないが）が、端役に至るまで生き生きとしている。顔の表情表現や声優のキャスティング等に細やかな配慮をしているのは当然であるが、いまひとつ、彼が強調しているのは、風になびく髪や衣服の表現にたいするこだわりである。このような観点から、今ひとたび作品を見直してみると、髪や衣服のなびき方によって、その人物の登場の仕方、さらにその人物の性格のさらに奥にある使命までも暗示しているように感じられる。
しかしながら、人間の髪の毛の平均は 10 万本とも言われており、その振る舞いを方程式で表現すれば、10 万元以上の連立方程式になり、解を求めるのに計算量がかかる。風になびいたり、頭の動きにつれて動いたりダイナミックな動きが要求される。さらに、髪の毛は互いに衝突しあったりするのである。そのために、いろいろな工夫が凝らされてきた。頭髪のシミュレーションは、描画から物理的なモデルへと言えるだろう[1]-[5]。またSIGGRAPH06にこの分野のレヴュー[2]があり、描画から物理的モデリングまで、様々な手法が紹介されている。ヘアスタイル、髪の毛の動的な振る舞い、（髪の毛同士の衝突、他の物体との衝突、その他髪の毛同士の相互作用）、髪の毛の質感、光の反射、影）等があげられる。

そこで、われわれの研究目標を、文化的な意味がありかつ、数理科学的に面白そうな構造をもつものに絞り、計算機のパワーも考慮して頭髪の静的なスタイル・シミュレーションを目指している。

宮崎監督は、‘となりのトトロ’の主な登場人物、トトロ、サツキとメイ姉妹のメイの髪型をおさげ髪にしている。おさげ髪は公害もなく、里山で自然と暮らすもはや戻ることのできない世界の象徴としている。日本の映画やアニメでは、特におさげ髪の少女は、大正末期から第 2 次世界大戦前の平和な時代から昭和の高度成長期までの、けなげでいたいけな存在の象徴として文化的な意味を担っている。

しかし、おさげ髪を取り扱った論文がほとんどみられない。おさげ髪を扱ったものではChoe[6]をみつけたが、そこでは髪の毛の束ごとに始点とその軌跡を指定しておさげ髪を描かせている。これでは髪型の動力学的な表現に用いるのは難しい。そこで、軌跡を描かなくてもおさげ髪を描かせる方法を研究することにした。実用化の観点からいえば、増毛のテクニックや髪の毛の質感等の表現も大切なのであるが、それらの取り扱いについては、Choe[6]を用いればよいので、本論文では髪の毛の束ではなく、三本の髪の毛の軌跡を得る方法を提案することにした。

アニメ業界に寄与する前に、宮崎監督が、体力の衰えを理由に引退されてしまったのは残念でならない。

2　おさげ髪の表現

おさげ髪を組み紐として考えることにする。すなわち、おさげ髪は３本の髪の束を組み上げたものであるが、３ 本の組み紐で表現される。われわれはMoore[8]を参考にした。Moore はn個の粒子の運動方程式の軌跡を２体のポテンシャルが２粒子間の距離 r_{ij} のべき乗に比例するとして、ポテンシャル V

$$V=\Sigma_{ij}V_{ij},\ V_{ij}=Am_im_jr_{ij}^{\alpha},$$

の下で、n 個の粒子の運動の作る組み紐のタイプをラグランジアンの作用積分の極値問題として定式化し、降下法を用いて解いた。そして２本および３本の組み紐のタイプが尽くされることを発見した。しかし、彼の方法はヒューリスティックであり、組み紐のタイプを与えて、ポテンシャルを求めるには至っていない。

我々は Saitoh[7]、Fukumoto[11] および Berger[9]に従って、複素関数を用いてn個の

粒子で組み紐の型を保存する軌跡を描く方法を考えた。

粒子の運動を形式的に

$z = x + \mathrm{i}p$ (1)

と複素変数化して考える。ここで、xは位置座標で、pは運動量である。

z の複素共役数を z*であらわし、z と z*を独立変数であると考える。

このとき

$dz = dx + i\ dp,\ dz^* = dx - i\ dp$ (2)

かつ

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\,\partial_p\right),\ \partial_{z^*} = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\,\partial_p\right) \quad (3)$$

となる。

いま粒子の運動を記述するハミルトニアン H とする。このとき粒子の運動によって引き起こされる関数 f(x, p)の時間微分は

$$\frac{df}{dt} = [f, H] \quad (4)$$

ここで[,]はポアソン括弧、と表される。

複素空間で{,}を

$$\{f, g\} = \partial_Z f \partial_{Z^*} g - \partial_{Z^*} f \partial_Z g \quad (5)$$

と定義しよう。すると

$[f,\ g] = -2i\{f,\ g\}$ (6)

となるので

ハミルトニアンを H とする粒子の複素平面での軌跡は

$$\frac{df}{dt} = -2i\{f, H\} \quad (7)$$

となることがわかる。

電磁界の場合[7]と同様に、複素解析関数 F(z, z*)で、その虚部が先ほどのハミルトニアンを用いて

$F = W + \mathrm{i}H$ (8)

と書けているとする。ここで W および H は実とする。関数 F をうまくとると、F の部 W はトポロジカルな不変量となりかつハミルトニアンの実部は保存される。するとハミルトン方程式は

$$\frac{dz_i}{dt} = \partial_j^* F^* \quad (9)$$

となる。ハミルトン方程式の解はハミルトニアンを保存するので、

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (10)$$

が成り立つ。 $Z_j = \left(z_j, z_j^*\right)$ と定義すると

$$\frac{dZ_j}{dt} = \left(\partial_j^* F^*,\ \partial_j F\right) = \nabla K \quad (11)$$

となり、ハミルトン流は K の勾配に沿って動くことが分かる。

さて Z_i、Z_j を複素平面Cを互いに衝突することなく運動する２点とする。今、単位渦度の渦のハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{2\pi}\log\left(r_{12}\right) \quad (12)$$

と表せることに注意しよう Sommerfeld[13]。

ここで、$r_{12} = |Z_1 - Z_2|$である。

λ_{ij}を

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt}}{z_i - z_j}\mathrm{d}t, \quad (13)$$

と定義すると、λ_{ij} は解析関数で、

$H(t) = \mathrm{Im}\left(\lambda_{ij}(t)\right)$ (14)

であり、λ_{ij}は F としての条件を満たしており、粒子の軌跡は

$$\frac{dz_i}{dt} = \partial_i^* \lambda_{ij}^* \quad (15)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \partial_j^* \lambda_{ij}^* \quad (16)$$

となり、たがいに絡み合いながら実部が相対的回転数で運動する粒子の軌道を表している。

つぎに z_i、z_j および z_k を複素平面Cを互いに衝突することなく運動する３点とする。この３点の軌跡がおさげ髪になるハミルトニアンを求める。

Log(z)を log(z)の主値として、

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t) + Log\left(z_i(0) - z_j(0)\right) \quad (17)$$

と定義しなおし、

微分形式を

$$\psi_{ijk} = \frac{1}{2}\{(\lambda_{ij} - \lambda_{jk})\}\mathrm{d}\lambda_{ki} + (\lambda_{jk} - \lambda_{ki})\mathrm{d}\lambda_{ij} + (\lambda_{ki} - \lambda_{ij})\mathrm{d}\lambda_{jk} \quad (18)$$

と定義すると、

$$\mathrm{d}\psi_{ijk} = 0 \quad (19)$$

が成り立ち、閉形式となっていることがわかる。

ところで以下の積分

$$\Psi_{ijk}(T) = \int_0^T \psi_{ijk}(t) \qquad (20)$$

の実部はトポロジカルな不変量であり

$$H(t) = \mathrm{Im}\left(\psi_{ijk}(t)\right) \qquad (21)$$

となっていることが分かる。
このとき以下の式が成り立つ、

$$\frac{dz_i}{dt} = \partial_i^* \Psi_{ijk}^*$$
$$\frac{dz_j}{dt} = \partial_j^* \Psi_{ijk}^* \qquad (22)$$
$$\frac{dz_k}{dt} = \partial_k^* \Psi_{ijk}^*$$

この系では運動量、角運動量およびエネルギーが保存される。この連立方程式を以下の初期条件のもとで、シンプレクティック解法（蛙とび法）を用いて微分方程式(22)を数値的に解くとおさげ髪の基本表現がえられる。初期条件として、z_i, z_j および z_k をこの順番で一直線上に載るように配置し、等間隔に置き、

$$\mathrm{Re}(\lambda_{ij0}) = \mathrm{Re}\,(\lambda_{jk0}) = 0$$

かつ

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_{ki0}) = \frac{1}{2}$$

ととるとおさげ髪の基本表現がえられる。

3　髪の表現

髪の毛には、いろいろなモデルがあるが、髪の毛を弾性体としてモデル化する Bertails[5]の方法が我々の目的にかなっている。彼らは、髪の毛の形状を弾性体のエネルギーの変分問題と考え、差分法で解いて形状を求めている。すなわち Kirchhoff 弾性棒問題として解いている。しかし計算時間がかかる。そこで我々は、Kawakubo[14]による 3 次元空間内の Kirchhoff 弾性棒問題の解析解を用いることにした。3 次元内の弾性棒問題のヤコビの楕円関数 sn による解析解を用いている[15]。

4　まとめ一今後の研究課題

今後の我々の研究課題を挙げる。

・おさげ髪全体を弾性体とみなして、弾性体としての性質を調べ、おさげ髪の動的シミュレーションを実行することがあげられる。
・本手法を、n 本の組み紐の生成できるように拡張し、組みひも表現を用いて魚網を表現することにより、漁網シミュレーションへの応用等を図ることがあげられる。これに関連して、Moore の仕事をn粒子の場合にも成り立つか調べることがあげられる。
・ハミルトニアンの複素化という手法自体は Maxwell 方程式の場合は Silberstein[12]が、流体力学の渦糸の力学として Sommerfeld[13]や Fukumoto[11]によって研究されているのであるが、いまひとつ決定打に欠けるうらみがある。そこには何か深い構造があって、これらの研究をもっと前に進められないだろうか。
・Kirchhoff 弾性棒問題の方程式と渦糸の方程式のようにある程度アナロジーが成り立っているようだが、方程式の係数の問題があり、同一性の判定が難しい。この意味でも方程式の同定法はないだろうか。
・Kirchhoff 弾性棒問題のヤコビの楕円関数解をシミュレーションに利用したが、偏微分方程式、境界値および初期値から解の関数を求め解を表示するという、シミュレーション方法は成り立たないのであろうか？
パンルヴェ方程式のようにハミルトニアンによってタイプが決まり、初期条件によって関数が決まるというのはもっとあってもよいと思う。

参考文献

[1] R. Rosenblum, W. Carlson, and E. Trippe, Journal of Visualization and Computer Animation **2**, 141-148 (1991).

[2] K. Anjyo, Y. Usami, and T. Kurihara, *Computer Graphics* **26,** 111-120, (1992)

[3] S. Hadap and M. Thalmann, *Eurographics 2001*, **20** (2001) 329-338

[4] O. Volino and N. Magnenat-Thalmann, in *ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology*, (2004).

[5] F. Bertails, B. Audoly, M-P. Cani, et al., S*IGGRAPH 06*, 2006.

[6] B. Choe, and H-S. Ko, *IEEE Trans. On Visualization and Computer Graphics* **11**, 160-170, (2005).

[7] I. Saitoh, in: *Proc. of ICNAAM 2006*, pp. 295–298, (2006).

[8] C. Moore, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 3675–3679 (1993).

[9] M. Berger, *J. Phys. Math. Gen.* **24**, 4027-4036 (1991).

[10] I. Saitoh, *AIP Conf. Proc.* 1479, 2306-2309 (2012)

[11] Y. Fukumoto, *Nagare* **24**, 327-340 (2005)

[12] L. Silberstein, *Ann. d. Phys.* **327**, 579-586 (1907).

[13] A. Sommerfeld, 変形体の力学第４章, 講談社

[14] Kawakubo,数理解析研究所講究録 1292 (2001), 136-145

[15] J. Suzuki and I. Saitoh, 情報処理学会 2013 年会予稿集