

## Cellular automaton and matrix over words

東洋大学 総合情報学部 佐藤 忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts

Toyo University

### 1. まえがき

一次元セルオートマトンを議論するとき、局所関数を有向グラフで表現してその状態遷移行列を考え、その代数構造を調べることは重要である。この状態遷移行列の各要素はシンボルである。 $Q$  をシンボルからなる有限集合とすると  $Q$  上の行列である。この行列の固有値、固有ベクトルを求めるためにはモノイド  $Q^*$  から複素数体  $\mathbb{C}$  上の代数  $R(Q)$  を定義する必要がある。本論文ではワード上の行列の転置を定義することにより、複素数体  $\mathbb{C}$  上の行列の自然な拡張である  $R(Q)$  上の行列のスペクトル分解を考える。

### 2. 諸定義と基本的性質

1次元セルオートマトンは  $\langle Z, Q, n, f \rangle$  の4組で与えられる。ここで  $Z$  はセルが配置されているセル空間、 $Q$  は各オートマトンの状態を表す有限集合、 $n$  は近傍の個数 (スコープ幅)、 $f: Q^n \rightarrow Q$  は局所関数。写像  $c: Z \rightarrow Q$  を様相といい、各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数  $f$  で一斉に変換すると新しい様相  $c'$  は次式で与えられる。

$$\forall i \in Z, c'(i) = f(c(i), c(i+1), \dots, c(i+|N|-1))$$

$c \rightarrow c'$ なる対応を  $f_\infty(c) = c'$  と書く。  $f_\infty$  とシフト写像との合成を並列写像

という。このとき次の関係が成立する。

並列写像は単射である  $\Leftrightarrow$  並列写像は逆変換を持つ

$Q$  をシンボルからなる有限集合とし、 $Q^*$  を  $Q$  上の長さ 0 以上のワードの集合とする。  $w \in Q^*$  に対して  $|w|$  はワードの長さを表す。  $w_1, w_2 \in Q^*$  に対

して加法、乗法を次のように定義する。  $w_1 + w_2 \Leftrightarrow w_1$  または  $w_2$  とする。

加法の単位元を 0 で表し  $-w$  を加法における逆元とする。加法はアーベル群である。乗法はワードの接続、乗法の単位元はヌルワード 1 である。乗法は結合

の法則を満たし、更に加法との分配の法則を満たす。従って  $Q$  から非可換環

$R(Q)$  が自然に定義される。  $\forall a \in Q$  に対して  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  となる  $a^{-1}$

を定義する。  $C$  を複素数体とする。  $C$  の元の長さは 0 である。  $\forall w \in Q^*$  に対

して  $w$  を反転させたワードを  ${}^t w$  で表す。  $\forall r \in C, \forall w \in Q^*$  に対して

${}^t(rw)$  を反転させたワードを  ${}^t(rw) = \bar{r}{}^t w$  と定義する。ここで  $\bar{r}$  は  $r$  と共役な複

素数である。  $\forall r_1, r_2 \in C, \forall w_1, w_2 \in Q^*$  に対して  ${}^t(r_1 w_1 + r_2 w_2) = {}^t(r_1 w_1) + {}^t(r_2 w_2)$

と定義し、2つの列ベクトル  $u, v$  に対して内積を  $\langle u, v \rangle = {}^t u v$  と定義する。

$z, w \in R(Q)$  に対して  $w = z^n$  のとき  $z = w^{1/n}$  と表す。  $M_{m,n}(Q)$  で  $R(Q)$

上  $m \times n$  の行列の集合を表し、  $M_n(Q)$  で  $R(Q)$  上  $n \times n$  の行列の集合を表す。

$A = \{w_{i,j}\} \in M_{m,n}$  に対して  ${}^t A = \{{}^t w_{j,i}\}$  と定義する。

性質 1. 次の命題が成立する。

- (1)  $w \in R(Q)$  に対して  ${}^t(w^{1/n}) = ({}^t w)^{1/n}$
- (2)  $w \in R(Q)$  が逆元をもつとき  ${}^t(w^{-1}) = ({}^t w)^{-1}$
- (3)  $\forall A, B \in M_n(Q)$  に対して  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

局所関数  $f(x_1, \dots, x_n): Q^n \rightarrow Q$  の有向グラフを次のように作る。

$Q^{n-1}$  をノードの集合とし、ノード  $x_1 \cdots x_{n-1}$  からノード  $x_2 \cdots x_n$  へのエッジには  $f(x_1, \dots, x_n)$  を付ける。この有向グラフの遷移行列を  $A(f)$  と書く。

### 3. 遷移行列の固有値と固有ベクトル

非ゼロの列ベクトル  $\mathbf{v}$  に対して  $A\mathbf{v} = \mathbf{v}\lambda$  のとき  $\lambda$  を  $A$  の固有値、 $\mathbf{v}$  を列固有ベクトルと言う。また非ゼロの行ベクトル  $\mathbf{v}$  に対して  $\mathbf{v}A = \lambda\mathbf{v}$  のとき  $\lambda$  を  $A$  の固有値、 $\mathbf{v}$  を行固有ベクトルと言う

例 1.  $f(x, y, z) = x + y \pmod{2}$  をスコープ幅 3 の線形局所関数とする。

$0 \leftrightarrow a, 1 \leftrightarrow b$  で符号化すると状態遷移行列は

$$A_f = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}, \quad f_\infty \text{ は 2 対 1 写像である。}$$

$A_f$ の固有値は $a+b, a-b, 0$ である。 $a+b$ に対する列固有ベクトルを $v_1$ とし、行固有ベクトルを ${}^t u_1$ とする。 $a-b$ に対する列固有ベクトルを $v_2$ とし、行固有ベクトルを ${}^t u_2$ とする。 $0$ に対する2つの列固有ベクトルを $v_3, v_4$ 、行固有ベクトルを ${}^t u_3, {}^t u_4$ として以下のようにとる。

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ b \\ -a \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1, 1), \quad {}^t u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, -1, -1)$$

$${}^t u_3 = (a^{-1}, 0, -b^{-1}, 0), \quad {}^t u_4 = (0, b^{-1}, 0, -a^{-1})$$

これらの固有ベクトルの間には次式が成立する。

$${}^t u_1 v_1 = \langle u_1, v_1 \rangle = a+b, \quad {}^t u_2 v_2 = \langle u_2, v_2 \rangle = a-b$$

$${}^t u_1 v_2 = \langle u_1, v_2 \rangle = 0, \quad {}^t u_2 v_1 = \langle u_2, v_1 \rangle = 0$$

$$A_f = v_1 {}^t u_1 + v_2 {}^t u_2 \quad (1)$$

したがって任意の正の整数 $n$ に対して

$$A_f^n = v_1 {}^t u_1 (a+b)^{n-1} + v_2 {}^t u_2 (a-b)^{n-1}$$

$$\therefore \text{tr} A_f^n = (a+b)^n + (a-b)^n = 2(a^n + \dots)$$

このことから $f_\infty$ は2対1写像である。

(1) 式は一種のスペクトル分解であるが行および列固有ベクトルが正規直交系をなしていない。これを正規直交系にしたい。このとき次の定理が成立する。

定理 1.  $A \in M_n(\Sigma)$  が  $n$  個の列固有ベクトル  $v_1, \dots, v_n$  を持つとき

$P = (v_1, \dots, v_n) \in M_n(\Sigma)$  が正則なら  $A$  は次式のようにスペクトル分解される。

$$A = \sum_{i=1}^n v_i \lambda_i {}^t u_i$$

ここで  $Av_i = v_i \lambda_i (1 \leq i \leq n)$ ,  $\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} \equiv (v_1, \dots, v_n)^{-1}$  とおく。

$$\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_1, v_n \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle \end{pmatrix} = I$$

$$(v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} = v_1 {}^t u_1 + \dots + v_n {}^t u_n = I$$

例 2.  $A_f = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}$  の正規直交系によるスペクトル分解

$A_f$  の列固有ベクトルを  $v_1, \dots, v_n$  次のように選んで行列  $(v_1, \dots, v_n)$  を作る

$$(v_1 \cdots v_4) = \begin{pmatrix} a & a & 1 & 0 \\ b & -b & -1 & 0 \\ b & b & 0 & 1 \\ a & -a & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = a+b, \quad \gamma = a-b \quad \text{と} \text{お} \text{い} \text{て}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_4 \end{pmatrix} \equiv (v_1 \cdots v_4)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\lambda^{-1} \\ \frac{1}{2}\gamma^{-1} & \frac{1}{2}\gamma^{-1} & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} \\ 1 - \frac{a}{2}(\gamma^{-1} + \lambda^{-1}) & -\frac{a}{2}(\gamma^{-1} + \lambda^{-1}) & \frac{a}{2}(\gamma^{-1} - \lambda^{-1}) & \frac{a}{2}(\gamma^{-1} - \lambda^{-1}) \\ -\frac{b}{2}(\gamma^{-1} + \lambda^{-1}) & -\frac{b}{2}(\gamma^{-1} + \lambda^{-1}) & 1 + \frac{b}{2}(\gamma^{-1} - \lambda^{-1}) & \frac{b}{2}(\gamma^{-1} - \lambda^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_f = v_1 \lambda' u_1 + v_2 \gamma' u_2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} (a+b) \left( \frac{1}{2}\lambda^{-1}, \frac{1}{2}\lambda^{-1}, \frac{1}{2}\lambda^{-1}, \frac{1}{2}\lambda^{-1} \right) + \begin{pmatrix} a \\ -b \\ b \\ -a \end{pmatrix} (a-b) \left( \frac{1}{2}\gamma^{-1}, \frac{1}{2}\gamma^{-1}, -\frac{1}{2}\gamma^{-1}, -\frac{1}{2}\gamma^{-1} \right) \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \begin{pmatrix} a \\ -b \\ b \\ -a \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例3.  $g(x, y) = 2x + y \pmod{3}$  をスコープ幅2の線形局所関数とする。

$0 \leftrightarrow a, 1 \leftrightarrow b, 2 \leftrightarrow c$  で符号化すると状態遷移行列  $A_g$  は

$$A_g = \begin{pmatrix} a, b, c \\ c, a, b \\ b, c, a \end{pmatrix}, \quad g_\infty \text{ は 3 対 1 写像である。}$$

$A_g$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とすると

$$\lambda_1 = a + b + c, \quad \lambda_2 = a + be^{i2\pi/3} + ce^{i4\pi/3}, \quad \lambda_3 = a + be^{i4\pi/3} + ce^{i2\pi/3}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  の固有ベクトルをそれぞれ  $v_1, v_2, v_3$  で表すと

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i2\pi/3} \\ e^{i4\pi/3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i4\pi/3} \\ e^{i2\pi/3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_i, v_j \rangle \equiv {}^t v_i v_j = \delta_{i,j}, \quad P \equiv (v_1, v_2, v_3), \quad {}^t P P = I$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad A = P \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

例4.  $h(x, y) = x + y \pmod{3}$  をスコープ幅2の線形局所関数とする。

$0 \leftrightarrow a, 1 \leftrightarrow b, 2 \leftrightarrow c$  で符号化すると状態遷移行列  $A_h$  は

$$A_h = \begin{pmatrix} a, b, c \\ b, c, a \\ c, a, b \end{pmatrix}, \quad h_\infty \text{ は 3 対 1 写像である。}$$

$$\lambda_1 = a+b+c, \quad \lambda_2 = a + b e^{i2\pi/3} + c e^{i4\pi/3}, \quad \lambda_3 = a + b e^{i4\pi/3} + c e^{i2\pi/3}$$

とおくと  $A_h$  の3つの固有値は  $\lambda_1, \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}, -\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}$  である。このとき  ${}^t(\lambda_1) = \lambda_2,$

${}^t(\lambda_2) = \lambda_1,$  したがって  ${}^t \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$  が成立する。そして、それぞれの列固有ベ

クトルを以下のように  $v_1, v_2, v_3$  とすると

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + 1 \\ e^{i2\pi/3} \lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + e^{i4\pi/3} \\ e^{i4\pi/3} \lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + e^{i2\pi/3} \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + 1 \\ -e^{i2\pi/3} \lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + e^{i4\pi/3} \\ -e^{i4\pi/3} \lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + e^{i2\pi/3} \end{pmatrix},$$

このとき  $\langle v_i, v_j \rangle \equiv {}^t v_i v_j = \delta_{i,j}$  なので  $P \equiv (v_1, v_2, v_3)$  とおくと

${}^t P P = I$  が成立する。したがって、次式が成立する。

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \therefore A = P \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \end{pmatrix} P$$

${}^t A = A$  であり、 $A$  は対称行列である。

注意 1. 複素数対上のエルミット行列の固有値は実数であるが、非可換環上の対称行列の固有値は必ずしも実数値になるとは限らない。

参考文献

佐藤、「単射であるセルラーオートマトンの性質について」

RIMS 1915, 158-160, 2014