

直交多項式の漸近挙動と逆正弦法則 —〈量子古典対応〉の数理—

西郷甲矢人*
長浜バイオ大学

酒匂宏樹†
新潟大学

概要

本稿では、古典的な直交多項式の漸近挙動が逆正弦法則という確率論で重要な確率分布と普遍的なつながりを持っていることを示す。我々の議論の舞台は、量子確率論（非可換確率論もしくは代数的確率論ともよばれる）の基本概念のひとつである「相互作用フォック空間」である。相互作用フォック空間とは、端的にいうならば、一般化された正準交換関係をみたす生成消滅演算子のシステムである。「量子数無限」の極限において、この交換関係が「漸近的に消える」という現象が一切の核心にある。すなわち、「量子古典対応」の数理が、確率論と直交多項式の理論をつないでいると見ることができるのである。さらにこの「漸近的な消え方」を少し一般化してみると、一見逆正弦法則と似ても似つかない（しかし実は深く関連した）、ひとつのパラメータ c で特徴づけられた離散的な分布が現れるが、これは量子ウォークという研究分野で知られていたものであった。本稿で概観するこれらの結果は、上に述べたような量子古典対応の数理が、数学の諸分野を横断する原理となりうることを予感させる。（省略した証明については論文 [14] を参照のこと。結果もすべてこの論文に基づくものである）

*E-mail: h_saigoh@nagahama-i-bio.ac.jp

†E-mail: sako@ie.niigata-u.ac.jp

1 前口上

量子場の数理において「生成消滅演算子」が果たす基本的な役割はよく知られている。いわゆる正準交換関係を少し一般化したような交換関係をもつ「生成消滅演算子」(および「維持演算子」)の三つ組(とそれが作用する前ヒルベルト空間)のなすシステムが、本稿の主役＝「相互作用フォック空間」である。

そもそも相互作用フォック空間は、そもそもは相互作用する場の数理解析への量子確率的アプローチにおいて定式化されたが[2, 3]、のちに実軸上の(すべての次数のモーメントが有限な)確率測度に関する直交多項式の理論との関係が発見された[1]。直交多項式に関する有名な「三項間漸化式」を、掛け算作用素の分解として見直すことで、古典的な確率変数を(互いに非可換な)三つの作用素へと分解することができ、それが生成・維持・消滅演算子に対応するわけである。この分解の手続きは量子分解とよばれている[9, 10]。

相互作用フォック空間と量子分解の手法を用いて、西郷[13]はエルミート多項式(ガウス分布に関する直交多項式)の漸近挙動をとらえる簡単な代数的・組合せ的な手法を導入した。ここでガウス分布とは $d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ を指す。

エルミート多項式を $\{H_n\}$ と表そう。このとき、その三項間漸化式に着目すると、対応する「生成消滅演算子」が量子調和振動子(一点上の量子場)と同じく正準交換関係をみたすことがわかる。また、測度 $H_n^2 \mu$ は量子調和振動子(一点上の自由場)のエネルギー固有状態に対応する確率測度となる。これらの確率測度を適当に正規化して極限をとると、その極限分布は

$$d\mu_{As}(x) = \frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}, \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}).$$

となる。実は、この測度 μ_{As} は確率論において有名な「逆正弦法則」という確率測度なのである。(なお逆正弦法則は、ブラウン運動との著しい関係において特に有名である。これはポール・レヴィ[12]の偉大な発見の一つである。[8, 15, 16]も参照のこと)。一見、この分布と調和振動子との関係は唐突に思えるかもしれないが、物理的に考えると自然である。というのも、「量子古典対応」の観点からするならば、「量子数無限」の極限で量子調和振動子は古典的な調和振動子に「なるべき」であるし(そうでなければ量子「調和振動子」という名は不適切であろう!)、そして

古典的な調和振動子の位置をランダムなタイミングで写真にとるならば、写真にうつる位置の確率分布が上の逆正弦法則に一致する（このことは微積分の簡単な例題に帰着する）。論文 [13] の主眼は、この「量子古典対応」の数理的な背景が、「スケールに比した演算子の非可換性の消失」として代数的にきわめて簡単に捉えられることを示したことであった。

本稿においては、論文 [13] における手法と結果を一般の相互作用フォック空間に拡張することによってなにごわがるかを概観する。結果は大きく二つである。

まず第一の結果は、正準交換関係の場合を含む、ある「漸近的な可換性条件」条件 (RAC1) を満たす相互作用フォック空間において、同じように「古典極限」（後で定義する）としての逆正弦法則が現れることである。その系として、いわゆる「古典的」な直交多項式（エルミート多項式、ヤコビ多項式、ラゲール多項式など、「有名」な多項式を含むクラス）の漸近挙動が普遍的なかたちで逆正弦法則とつながっていることが導かれる。

「漸近的な可換性条件」はさらに緩めることが可能であるが、その緩められた条件 (RAC2) に関するものが第二の結果である：(RAC2) をみたすような相互作用フォック空間に関しては、ある実パラメータ c で特徴づけられる確率分布の族が「古典極限」となる。ここで $c=0$ は (RAC1) に対応し、逆正弦法則に対応する。 $c \neq 0$ の場合、ベッセル関数を用いて表現できる離散的な分布が現れるが、実はこれは量子ウォークの理論 [11] にも現れるものなのである！

2 基本概念

2.1 代数的確率空間

（通常の、測度論的な）確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) に対して、その上のある種の確率変数がなす（複素係数の）「可換代数」と、確率変数の期待値を与える「線型汎関数」の対を考えることができる。具体的には、

$$\left(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), \int_\Omega \cdot dP \right),$$

ないしは

$$\left(\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), \int_\Omega \cdot dP \right).$$

を考えればよい。そして、逆にこのような「可換代数とその上の線形汎関数の対」を出発点として確率論を展開することが可能であることが知られている。この状態をふまえて、「非可換とは限らない代数とその上の線形汎関数の対」＝「代数的確率空間」を出発点として確率論を拡張しようというのが、量子確率論の出発点である。

Definition 2.1. 複素係数の代数 A のうえに写像 $x \in A \mapsto x^* \in A$ が定義されており、任意の $X, Y \in A$ および $\alpha \in \mathbb{C}$ に関して以下の性質

$$(X^*)^* = X, \quad (\alpha X)^* = \bar{\alpha} X^*, \quad (X + Y)^* = X^* + Y^*, \quad (XY)^* = Y^* X^*,$$

をみたすとき、 A を $*$ -代数とよぶ。

Definition 2.2. A を (単位元をもつ) $*$ -代数とする。以下の条件をみたす線形汎関数 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の状態とよぶ。

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X^* X) \geq 0, \quad \text{for } X \in A.$$

Definition 2.3. $*$ -代数とその上の状態の対 (A, φ) を代数的確率空間とよぶ。 A の元を (A, φ) の代数的確率変数と呼ぶ。

ここで、状態 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ 、代数的確率変数 $X \in A$ および実軸上の確率測度 μ の三者関係に関する記法 (「状態 φ において、代数的確率変数 X はある確率法則 μ に従う」) をひとつ準備しておこう:

Notation 2.4. $\varphi(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m d\mu(x)$ for all $m \in \mathbb{N}$ なるとき、 $X \sim_{\varphi} \mu$ と表す。(モーメントを使った定義であることに注意)

2.2 相互作用フォック空間

いよいよ相互作用フォック空間を定義する (記法は通常のそれと異なっているが、これはのちに定義される「両側相互作用フォック空間」との平仄をあわせるためと、筆者らの趣味によるものにすぎない)。

Definition 2.5 (ヤコビ列). 以下の条件をみたす数列の対 $(\{\omega_{n+1/2}\}, \{\alpha_n\})$ をヤコビ列とよぶ。

- if $\{\omega_{n+1/2}\}$ は正の半整数でパラメトライズされた正数列: $0 < \omega_{1/2}, \omega_{3/2}, \omega_{5/2}, \dots$

- if $\{\alpha_n\}$ は自然数でパラメトライズされた実数列: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$

なお、通常は [10, Definition 1.24], $\{\omega_{n+1/2}\}$ 上のようなものを「無限型」のヤコビ列と呼ぶが、本稿ではこの型のみを扱うので、単にヤコビ列とよぶことにする。

Definition 2.6 (相互作用フォック空間). $(\{\omega_{n+1/2}\}, \{\alpha_n\})$ をヤコビ列とする。相互作用フォック空間 $\Gamma_{\omega, \alpha}$ とは以下の構造 $(\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}, A, B, C)$ が付与された前ヒルベルト空間 $\Gamma(\mathbb{C})$ のことである。

- 以下をみたす固定されたベクトル列 $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \Gamma(\mathbb{C})$
 - $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = 0$ if $m \neq n$ かつ $\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle = 1$,
 - $\Gamma(\mathbb{C})$ は $\{\Phi_n\}$ によって張られる,
- 作用素 $A, B, C: \Gamma(\mathbb{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{C})$ は以下のように定義される作用素。
 - $A\Phi_0 = 0, A\Phi_n = \sqrt{\omega_{n-1/2}} \Phi_{n-1}$.
 - $B\Phi_n = \alpha_n \Phi_n$.
 - $C\Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1/2}} \Phi_{n+1}$.

作用素 A は生成作用素 (生成演算子)、 B は維持作用素 (維持演算子)、 C は消滅作用素 (消滅演算子) とよばれる (なお、この記法もまったく一般的ではない。 A は生成 (*annihilation*)、 C は消滅 (*creation*) の頭文字からとった。 B にあたる言葉をでっち上げようとしたが失敗した)。

Definition 2.7. みっつの作用素の和 $X = A + B + C$ は以下のような対称三重対角行列によって表される:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\omega_{1/2}} & 0 & \cdots \\ \sqrt{\omega_{1/2}} & \alpha_1 & \sqrt{\omega_{3/2}} & \ddots \\ 0 & \sqrt{\omega_{3/2}} & \alpha_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

この行列をヤコビ行列とよぶ。また、数列 $\langle X^m \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ をヤコビ行列 X のモーメント列とよぶ。

アカルディとボジェイコは、モーメント有限な任意の実軸上の確率測度 μ に対し、そのモーメント列 $M_m = \int_{\mathbb{R}} x^m d\mu(x)$ が、ある相互作用フォック空間上に作用するヤコビ行列によって $\langle X^m \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ と書けることを示した [1, Section 5]。

A を A, B, C および恒等作用素 id で生成される複素係数の代数としよう。もちろん積や線形構造は線型作用素の合成 (行列の積) と和によって定める。The multiplication and the linear structure are defined by the usual matrix calculations. $*$ -演算も通常と同様に定める。転置として定める。通常の「ダガー」と同様に定める：すなわち $\{A = C^*, B = B^*, C = A^*\}$ という関係式によって定める。すると、 $*$ -代数ができあがる。

ここで作用素 A, B, C が線形空間 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n$ の上に作用していることを思い出そう。いま、 φ_k を、 $\varphi_k(\cdot) := \langle \cdot, \Phi_k, \Phi_k \rangle$ によって定まる状態としよう (「下から k 番目のエネルギー固有状態」に対応)。すると、 $\{(A, \varphi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ は k でパラメトライズされた代数的確率空間の列となる。この列 $\{(A, \varphi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ の漸近的な振る舞いこそが、本稿の主題である。

2.3 相互作用フォック空間と直交多項式

前口上でも簡単に述べたが、相互作用フォック空間の理論は直交多項式の話に翻訳すると面白い解釈をもつことになる。 μ を実軸上の、有限なモーメントをもつ確率測度とする。すると、多項式のなす空間はヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ に含まれる。例のごとくグラム・シュミットの直交化法を適用すれば、モーメント列を使って直交多項式が定義できる。

$\{p_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ を μ の (最高次の係数が 1 の) n 次直交多項式としよう。すると、ある数列 $\alpha_n, \omega_{n-1/2}$ が存在して以下のいわゆる「三項間漸化式」

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ xp_0(x) &= p_1(x) + \alpha_0 p_0(x), \\ xp_n(x) &= p_{n+1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \omega_{n-1/2} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 μ の台が無限集合であれば、 $\omega_{n-1/2}$ が常に正であることを示すのは難しくない。したがってわれわれは、確率測度 μ からヤコビ列 $(\{\omega_{n+1/2}\}, \{\alpha_n\})$ を得たわけである。

P_n を「正規化された」直交多項式、すなわち $p_n / \|p_n\|_2$ としよう。等長作用素 $U : \Gamma_{\omega, \alpha} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu) : \Phi_n \mapsto P_n$ は $U^* x U = A + B + C$ をみたすこ

とが知られている。ここで x は $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ 上の掛け算作用素を表す（証明については See [10, Theorem 1.51] を参照）。このことは、測度論的な確率変数が非可換な代数的確率変数の和へと分解できるということをいっている。このアイデアは量子分解とよばれている [9] (see also [10, Section 1.5])。等式 $U^*xU = A + B + C$ より、 $A + B + C \sim_{\varphi_n} |P_n(x)|^2 \mu(dx)$ が導かれる。

Remark 2.8. 任意の代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の代数的確率変数 $X \in \mathcal{A}$ が $X = X^*$ をみたすならば、ある実軸上の μ が存在して $X \sim_{\varphi} \mu$ となることを証明することができる。なお一意性は常にはなりたたない（モーメント問題）。

3 古典極限の概念：調和振動子の例を手掛かりに

いよいよ本稿における「量子古典対応」の意味を明らかにするために、「古典極限」の概念を導入しよう。まずは指針をうるために、相互作用フォック空間のもっとも単純な例である「調和振動子」に注目する。これは、ヤコビ列が $\omega_{n+1/2} = n + 1, \alpha_n = 0$ に対応する相互作用フォック空間にほかならない。このとき、

$$X := A + B + C = A + C$$

は物理的にいえば調和振動子の「位置」をあらわし、

$$X \sim_{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

となる。つまり、 $n = 0$ に対応する状態に関しては、位置の確率分布はガウス分布となるということである。これは、量子論でよく知られていることである。

こんどは、 n が大きくなっていくと対応する確率分布はどうなるか、という問題を考えてみよう。これは量子論でいう「古典極限」を考えることに対応し、量子論と漸近解析の基礎的な問題のひとつであるが（たとえば [7, Section 3.6] 参照）、西郷 [13, Section 3] はこれを量子確率論的な視点から考察し、きわめて簡単な代数的な方法で極限分布（適当な正規化をしたときの弱収束の意味で）を導いた。その極限分布こそ逆正弦法則である。

Theorem 3.1 (Theorem 3.1 in [13]). $\Gamma_{\omega, \alpha} := (\Gamma(\mathbb{C}), A, B \equiv 0, C)$ を量子調和振動子とする。「位置」 $X := A + C$ に対し、 μ_n を

$$\frac{X}{\sqrt{2k+1}} \sim_{\varphi_k} \mu_k.$$

みたす実軸上の確率分布として定義する。このとき、 μ_n は逆正弦法則 μ_{A_0} に弱収束する。

ここで $\sqrt{2k+1}$ は分散を 1 にするための因子にすぎない。逆正弦法則が古典的な調和振動子の時間平均での振る舞いをあらわすことは簡単にわかるので（実際、速度と確率が反比例することから微積分の計算にもちこめばよい）、上の定理は調和振動子に関する「量子古典対応」であると言えよう。

以上にふまえて、相互作用フォック空間に対する「古典極限分布」の概念を定義しよう。それは、状態 φ_n のもとでの X の分布が（正規化を施したのちに）収束する先の分布のことである。ここで、技術的な理由から、収束の意味としては「モーメント収束」をとっておく。モーメント収束とは、すべてのモーメントが収束することを指し、量子確率論のアプローチからも証明がしやすい。しかも、モーメント収束先の分布が逆正弦法則のようにモーメント問題決定的（すなわちそのモーメントをもつ唯一の確率分布であること。コンパクト台をもてば必ずそうなる）でありさえすれば、そこから弱収束もしたがうからである。

Definition 3.2 (古典極限分布). $\Gamma_{\omega, \alpha} := (\Gamma(\mathbb{C}), A, B, C)$ を相互作用フォック空間としよう。「位置」 X be $A + B + C$ に対し、実軸上の確率分布 μ_n を

$$\frac{X - \alpha_n}{\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}} \sim_{\varphi_n} \mu_n.$$

をみたす分布とする。このとき、実軸上の確率分布 μ が $\Gamma_{\omega, \alpha}$ の古典極限分布であるとは、 μ_n が μ にモーメント収束することである。

なお、上のように、 $-\alpha_n$ and $1/\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}$ というファクターをつけることで、分布は平均 0 かつ分散 1 に正規化される。

Remark 3.3. 古典極限分布が存在するかどうかはヤコビ列による。多くの面白い（歴史的に注目されてきた）例に関しては、その極限は存在する——逆正弦法則がそれである（5.4 を見よ）。、いっぽう、古典極限分布の一意性も重要な問題であり、それがモーメント問題にほかならない。

もし古典極限分布がモーメント問題決定的（したがって一意的）であるならば、モーメント収束から弱収束が導かれることになる（なお、途中の分布がモーメント問題決定的である必要はなく、収束先さえ決定的ならばよい。[6, Theorem 4.5.5.] 参照のこと）。

直交多項式の観点から言えば、この「古典極限分布」とは、「直交多項式の二乗ともとの確率分布との積」が与える確率分布の極限にほかならない。たとえば、調和振動子すなわちガウス分布の場合に関していえば、定理 3.1 の系として次のことが従う：

P_k を（正規化された） k 次エルミート多項式とする。

このとき、 $|P_k(x)|^2 \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx$ はまた確率分布となりその分散は $2k+1$ となるが、これを正規化した列

$$\sqrt{2k+1} \left| P_k(\sqrt{2k+1}x) \right|^2 \frac{\exp(-(2k+1)x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx$$

は逆正弦法則 $\mu_{As}(dx) = \frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ に弱収束する。

しかし実をいえば、以下に見るように、これは決してエルミート多項式特有の現象ではないのである！

4 両側相互作用フォック空間

量子古典対応の数理を一般の相互作用フォック空間において考えるため—いいかえれば一般の直交多項式系の対応する漸近挙動について考えるため—これから「上にも下にも無限な」相互作用フォック空間＝「両側相互作用フォック空間」を導入する。

その着想を直感的にのべてみよう。通常相互作用フォック空間には「底」＝「真空」（つまり Φ_0 ）がある。その「真空」に対応するベクトルに生成作用素をかけていって基底がえられる。順次かけていくことを「無限につづく階段をのぼる」がごとくに考えるとすれば、量子古典対応というのは、「非常な みからの眺め」を考えることにほかならない。その雲中からの眺めを想像すれば、「上にも下にも無限な」階段の「ように」見えるに違いない。してみると、「上にも下にも無限な」相互作用フォック空間＝「両側相互作用フォック空間」を考えることで、量子古典対応の数理を見通しよく整理できるに違いない。そして実際そうなのである。（なお、われわれは最近、「両側相互作用フォック空間」の利用法は、量子古

典対応のみに限るものではないだろうと考えている。あとでのべる量子ウォークの数理との衝撃的な出会いは、おそらくそれを強く示唆するものであろう。)

では、「両側ヤコビ列」に引きつづいて「両側相互作用フォック空間」を定義しよう。

Definition 4.1 (両側ヤコビ列).

$$\omega = \left\{ \omega_m \geq 0 \mid m = \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\},$$

$$\alpha = \{ \alpha_n \in \mathbb{R} \mid n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots \}.$$

を、以下の二条件をみたす両側に無限な実数列とする：

(1) ある自然数 N が存在して

- $m < N$ ならば $\omega_m = 0$,
- $m > N$ ならば $\omega_m > 0$,
- $n < N$ ならば $\alpha_n = 0$.

(2) 任意の半整数 $m = \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ に対して $\omega_m > 0$.

このとき、対 (ω, α) を両側ヤコビ列という。

Definition 4.2 (両側相互作用フォック空間). (ω, α) を両側ヤコビ列とする。両側相互作用フォック空間 $\Gamma_{\omega, \alpha}$ とは以下の条件をみたす四つ組 $(\Gamma(\mathbb{C}), A, B, C)$ のことである： $\Gamma(\mathbb{C}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n$ は内積が $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ によって定められる前ヒルベルト空間、 A, B, C はそれぞれ

- $A\Phi_n = \sqrt{\omega_{n-1/2}} \Phi_{n-1}$.
- $B\Phi_n = \alpha_n \Phi_n$.
- $C\Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1/2}} \Phi_{n+1}$.

によって定められる作用素。それぞれを生成作用素、維持作用素、消滅作用素とよぶ。

次は両側ヤコビ行列：

Definition 4.3. みっつの作用素の和 $X = A + B + C$ は (両側に無限な) 三重対角行列 $X = [X_{m,n}]_{m,n \in \mathbb{Z}}$ によって表される: ここで各成分は

$$X_{m,n} = \begin{cases} \sqrt{\omega_{n-1/2}}, & m = n - 1, \\ \alpha_n, & m = n, \\ \sqrt{\omega_{n+1/2}}, & m = n + 1, \\ 0, & |m - n| \geq 2. \end{cases}$$

与えられる。この作用素 X を両側ヤコビ列 (ω, α) に対する両側ヤコビ行列とよぶ。

両側ヤコビ行列 X は代数的確率変数であり、状態 $\langle \cdot, \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ のもとでのモーメントはその行列要素によって以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \langle X^1 \Phi_0, \Phi_0 \rangle &= \alpha_0, \\ \langle X^2 \Phi_0, \Phi_0 \rangle &= \omega_{-1/2} + \alpha_0^2 + \omega_{-1/2}, \\ \langle X^3 \Phi_0, \Phi_0 \rangle &= \omega_{-1/2} \alpha_{-1} + 2\omega_{-1/2} \alpha_0 + \alpha_0^3 + 2\omega_{1/2} \alpha_0 + \omega_{1/2} \alpha_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

一般に、次の補題がいえる。

Lemma 4.4. X^k の行列要素は、 $\{\sqrt{\omega_{n+1/2}}\} \cup \{\alpha_n\}$ の多項式によって書ける。

実をいうと、モーメント $\langle X^k \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ は「 $\{\omega_{n+1/2}\} \cup \{\alpha_n\}$ の多項式で」書くこともできるのだが、上のような弱い形でも、下の補題を示すには十分である:

Lemma 4.5. $\{(\omega^{(k)}, \alpha^{(k)})\}_k$ を両側ヤコビ列の列とし、 (ω, α) を両側ヤコビ列とする。 $X^{(k)}$ および X を $(\oplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n)$ 上に作用する) 対応する両側ヤコビ行列とする。 $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n+1/2}^{(k)} = \omega_{n+1/2}$ と $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)} = \alpha_n$ が任意の整数 n について成り立つならば、以下のようにモーメントが収束する: $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle (X^{(k)})^m \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \langle X^m \Phi_0, \Phi_0 \rangle$.

以上によって議論の舞台が整った。

5 古典極限としての逆正弦法則

5.1 相対的漸近可換性その1 : (RAC1)

すでにみたように、調和振動子における量子古典対応の数理の核心は、「スケールに比して作用素たちの非可換性が消える」ことにあった。そこで、この条件を定式化してみよう。あとでより一般化されるので、ここではその条件を「相対的漸近可換性その1」という意味で (RAC1) と名付けて定式化する。

Definition 5.1. 相互作用フォック空間が (RAC1) をみたすとは、交換子 $[A, C]$ と $[A, B]$ とが以下の意味で漸近的に零となることである：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AC - CA}{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}} \Phi_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AB - BA}{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}} \Phi_n = 0.$$

この定義がわれわれの定式化したいものと整合していることは、 $\langle \cdot, \Phi_n, \Phi_n \rangle$ が第 n 番目の状態を表していることからわかるだろう、なお、 $\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}$ は代数的確率変数 $X = A + B + C$ の、状態 $\langle \cdot, \Phi_n, \Phi_n \rangle$ における分散にほかならない。

上の定義は、次のようにも言い換えられる。

Lemma 5.2. 条件 (RAC1) は以下と同等である：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1/2}}{\omega_{n-1/2}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}} = 0.$$

量子調和振動子では、上の条件が満たされているが、ほかにも多くの面白い相互作用フォック空間（面白い直交多項式に対応）が上の条件をみたす。以下の主定理は、したがって、量子調和振動子の場合の「量子古典対応」すなわち定理 3.1 の、ひとつの適切な一般化である。

5.2 主定理：古典極限としての逆正弦法則

Theorem 5.3. $\Gamma_{\omega, \alpha} := (\Gamma(C), A, B, C)$ を、(RAC1) をみたす相互作用フォック空間とする。このとき、3.2の意味での古典極限分布が存在し、それは逆正弦法則 $\frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ にほかならない。

Proof. $(\{\omega_{n+1/2}\}, \{\alpha_n\})$ を (片側) ヤコビ列とし、(RAC1) が成り立っているとしよう。 k 番目の状態 $\langle \cdot, \Phi_k, \Phi_k \rangle$ に関して正規化された、 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n$ 上に作用する代数的確率変数

$$X^{(k)} = \frac{X - \alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}$$

を考える。行列要素は、

$$X_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\omega_{n-1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}, & m = n - 1, \\ \frac{\alpha_n - \alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}, & m = n, \\ \frac{\omega_{n+1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}, & m = n + 1, \\ 0, & |m - n| \geq 2. \end{cases}$$

となる。 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n$ に作用する $X^{(k)}$ を「高みから眺める」ため、添え字 $m, n = 0, 1, \dots, k, \dots$ を $m, n = -k, -k+1, \dots, 0, \dots$ に取り換えて、舞台を両側相互作用フック空間 $\Gamma^{(k)} = \bigoplus_{n=-k}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n$ に移す。状態 $\langle \cdot, \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ のもとで、以下のような行列要素をもつ代数的確率変数 $\widetilde{X}^{(k)}$ を考えよう：

$$\widetilde{X}_{m,n}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\omega_{n+k-1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}, & m = n - 1, \\ \frac{\alpha_{n+k} - \alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}, & m = n, \\ \frac{\omega_{n+k+1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}, & m = n + 1, \\ 0, & |m - n| \geq 2. \end{cases}$$

Lemma 5.2 の最初の条件より、 $\{\omega_{n+k+1/2}\}_{n=-k}^{\infty}$ は 1 となる。これより各 n については、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{X}_{n-1,n}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{X}_{n+1,n}^{(k)}.$$

いっぽう Lemma 5.2 の第二の条件より、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}} = 0$ とな

り、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+k+1/2}}{\omega_{k+1/2}} = 0$ 、これより各 n に対しては $\lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{X}_{n,n}^{(k)} = 0$ となる。

ここで Lemma 4.5 の出番となる。 \widetilde{X} を以下の様な、 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上に作用す

る両側無限行列で表される代数的確率変数としよう：

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & 1/\sqrt{2} & & & \\ & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & & \\ & & 1/\sqrt{2} & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ここで0は $\langle \cdot, \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ という行列要素の位置を表している。ここでLemma 4.5を用いれば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle (X^{(k)})^m \Phi_k, \Phi_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle (\tilde{X}^{(k)})^m \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \langle (\tilde{X})^m \Phi_0, \Phi_0 \rangle.$$

このようにして、古典極限が \tilde{X} によって記述できることがわかった。あとは、その分布の正体を明らかにするだけである。

論文 [13] のように純粹に組合せ論的な方法によることも可能だが、ここでは後で必要となる議論の雛形とするため、 \mathbb{Z} と $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ のフーリエ双対性に訴えてみよう。

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ をフーリエ変換とする。 $\{n\} \subset \mathbb{Z}$ の特性関数 δ_n を両側相互作用フォック空間の完備化の上のベクトル Φ_n と同一視しよう。フーリエ変換 \mathcal{F} は、 $\mathcal{F}(z^n) = \Phi_n$ によって規定でき(ここで z^n は関数 $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}$ を表す)、 \mathcal{F} (を制限したもの)は \mathbb{T} の(負の整数の次数も許した)多項式関数たち全体と両側相互作用フォック空間との間の全射な等距離写像を与えることになる。

\tilde{X} は作用素として Φ_n を $\frac{\Phi_{n-1}}{\sqrt{2}} + \frac{\Phi_{n+1}}{\sqrt{2}}$ に移すから、そのフーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}\tilde{X}\mathcal{F}$ は z^n を

$$\frac{z^{n-1}}{\sqrt{2}} + \frac{z^{n+1}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) z^n = \sqrt{2}\operatorname{Re}(z)z^n$$

に移す。これは、作用素 $\mathcal{F}^{-1}\tilde{X}\mathcal{F}$ が関数 $\mathbb{T} \ni z \mapsto \sqrt{2}\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ による掛け算作用素であることを意味する。

したがって、

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left(\tilde{X} \right)^m \Phi_0, \Phi_0 \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \left\langle \left(\sqrt{2} \operatorname{Re}(z) \right)^m 1, 1 \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\sqrt{2} \operatorname{Re}(z) \right)^m d(\text{ハール測度}) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2} \operatorname{Re}(e^{it}) \right)^m \frac{dt}{2\pi} \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} \left(\sqrt{2} \cos t \right)^m \frac{dt}{\pi}.
 \end{aligned}$$

ここで $\sqrt{2} \cos t$ を x と置換すれば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \left(X^{(k)} \right)^m \Phi_k, \Phi_k \right\rangle = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^m \frac{dx}{\pi \sqrt{2-x^2}}.$$

これが示すべきことであった。 □

Remark 5.4. 上の定理より、いろいろな興味深いケースに関して、逆正弦法則が古典極限分布となることがわかる。いくつかの例をあげてみよう。

- (1) 一様分布 $\frac{\chi_{[-1,1]} dx}{2}$ に対応する相互作用フォック空間はヤコビ列

$$\omega_{n+1/2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \alpha_n = 0.$$

で与えられる。

- (2) 指数分布 $\chi_{[0,\infty)} e^{-x} dx$ に対しては、ヤコビ列

$$\omega_{n+1/2} = (n+1)^2, \quad \alpha_n = 2n+1.$$

が対応する。

- (3) q -ガウス分布 ($-1 < q \leq 1$) はヤコビ列

$$\omega_{n+1/2} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n, \quad \alpha_n = 0.$$

に対応する確率分布である。 $q = 1$ のときが通常のガウス分布であり、 $q = 0$ のときが自由確率論・ランダム行列の理論等に現れるウィグナーの半円則 $\frac{\sqrt{4-x^2} dx}{2\pi}$ である。

Lemma 5.2 より、上記の分布に対応する相互作用フォック空間はすべて (RAC1) をみたす。

Remark 5.5. 逆正弦法則は決定的モーメント問題の解であるから、定理におけるモーメント収束から弱収束が従う。

Theorem 5.3 からは、直交多項式の漸近挙動についての次の事実が従う：

Corollary 5.6. μ を (RAC1) をみたすヤコビ列 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ に対応する確率測度とし、 P_n をその規格化された n 次の直交多項式としよう。 μ_n を $\mu_n(dx) := |P_n(\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}x)|^2 \mu(\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}dx)$ と定義すれば、 μ_n は逆正弦法則 μ_{As} に弱収束する。

この定理と、上の remark から、ルジャンドル多項式（一様分布に対応）、ラゲール多項式（指数分布に対応）、 q -エルミート多項式（ $-1 < q \leq 1$ 、 q -ガウス分布に対応）などの漸近挙動が逆正弦法則を用いて統一的に理解できるようになる。

6 新種の古典極限の発見

6.1 相対的漸近可換性その 2 : (RAC2)

では、より一般の場合についてはどうだろうか？ A, B, C についての漸近可換性のより弱い条件 (RAC2) を定義してみよう。(RAC2) をみたすが (RAC1) を満たさないような場合には、われわれが「離散逆正弦法則」とよぶ新種の古典極限が現れてくることとなる。

Definition 6.1. 相互作用フォック空間が (RAC2) をみたすとは、 $[A, C]$ が漸近的に零となり $[A, B]$ が漸近的にスカラー倍となること、すなわち

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AC - CA}{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}} \Phi_n = 0$ and
- ある実数 r が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(AB - BA) - rA}{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}} \Phi_n = 0.$$

をみたすことである。

(RAC1)の場合と同様、次の言い換えが成り立つ：

Lemma 6.2. 条件(RAC2)は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1/2}}{\omega_{n-1/2}} = 1$ かつ $\left\{ \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}} \right\}_n$ が収束することと同値である。

以後、この $\left\{ \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}} \right\}_n$ の収束先を c と書く。

Example 6.3. ● (RAC1) をみたす相互作用フォック空間は (RAC2) をみたす。($c = 0$ の場合に当たる。)

- ヤコビ列 $\omega_{n+1/2} = 1/2, \alpha_n = cn$ で定義される相互作用フォック空間 $\Gamma_{\omega, \alpha}$ は (RAC2) をみたす。このときヤコビ行列は

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 1/\sqrt{2} & c & 1/\sqrt{2} & \cdots \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 2c & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

となる。

6.2 古典極限の同定

(RAC2) をみたす相互作用フォック空間を考察しよう。代数的確率変数 $\frac{X - \alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}}$ を $X^{(k)}$ と書くことにする。以下が成り立つ：

Lemma 6.4. 任意の整数 m, n に対し

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle X^{(k)} \Phi_{k+m}, \Phi_{k+n} \rangle = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & m = n - 1, \\ cn, & m = n, \\ 1/\sqrt{2}, & m = n + 1, \\ 0, & |m - n| \geq 2. \end{cases}$$

が成立する。

あとは前節とまったく同様なストーリーである。 $X^{(k)}$ の漸近挙動を調べることは、前節と同様に考えることで、要するに次の代数的確率変数 \tilde{X} を調べることに帰着する：

という作用素と見なせる。これはさらに、

$$\begin{aligned} & M \left[\frac{e^{-it}}{\sqrt{2}} \right] + \frac{c}{i} \frac{d}{dt} + M \left[\frac{e^{it}}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{c}{i} M \left[\exp \left(-i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] \circ \frac{d}{dt} \circ M \left[\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] \\ &= M \left[\exp \left(-i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] \circ \left(\frac{c}{i} \frac{d}{dt} \right) \circ M \left[\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right]. \end{aligned}$$

と計算できる。この計算は、ローラン多項式に作用させれば（もっといえば単項式でよい）たしかめられる。

$\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right)$ はの絶対値は1であり、フーリエ係数から以下のように確率測度を構成できる：まず $a_n(c)$ をフーリエ係数として

$$\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(c) e^{int}.$$

によって定義する。これにより、以下のような確率測度を定義する。

Definition 6.5. $x \in \mathbb{R}$ に対し、 δ_x は x に集中した確率測度（デルタ測度）を表す。このとき実軸上の確率測度

$$\mu_c = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(c)|^2 \delta_{cn}$$

を離散逆正弦法則とよぶ。

Theorem 6.6. $\Gamma_{\{\omega_n\}, \{\alpha_n\}}$ を条件 (RAC2) は満たすが (RAC1) は満たさない相互作用フォック空間とし、実数 c を $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n-1/2} + \omega_{n+1/2}}}$ で定義する。このとき、古典極限は離散逆正弦法則となる。すなわち、各自然数 m に対し

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X - \alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}} \right)^m \Phi_k, \Phi_k \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu_c(dx).$$

となる。

Proof. (6.1) より、以下を示せばよい：

$$\langle \tilde{X}^k \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu_c(dx).$$

これを示すため、フーリエ変換を用いて左辺を変形していくと、

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(M \left[\frac{e^{-it}}{\sqrt{2}} \right] + \frac{c}{i} \frac{d}{dt} + M \left[\frac{e^{it}}{\sqrt{2}} \right] \right)^m 1, 1 \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\ &= \left\langle \left\{ M \left[\exp \left(-i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] \circ \left(\frac{c}{i} \frac{d}{dt} \right) \circ M \left[\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] \right\}^m 1, 1 \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\ &= \left\langle M \left[\exp \left(-i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] \circ \left(\frac{c}{i} \frac{d}{dt} \right)^m \circ M \left[\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right] 1, 1 \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\ &= \left\langle \left(\frac{c}{i} \frac{d}{dt} \right)^m \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right), \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right) \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \end{aligned}$$

となる。ここで $\exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right)$ のフーリエ展開を用いれば、

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{c}{i} \right)^m \frac{d^m}{dt^m} \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right), \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(c) e^{int} \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_n(c)} \left\langle \left(\frac{c}{i} \right)^m \frac{d^m}{dt^m} \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right), e^{int} \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \end{aligned}$$

となる。部分積分を用いれば、さらに

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_n(c)} \left\langle \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right), \left(\frac{c}{i} \right)^m \frac{d^m}{dt^m} e^{int} \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (cn)^m \overline{a_n(c)} \left\langle \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \sin t}{c} \right), e^{int} \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (cn)^m |a_n(c)|^2. \end{aligned}$$

と変形できる。これは $\int_{\mathbb{R}} x^m \mu_c(dx)$ に他ならない。 \square

実は、この分布はモーメント問題決定的であることもわかるので、上の定理でのモーメント収束は実際には「弱収束」でもある。

また、さらにもう少し計算を進めると、離散的逆正弦法則のより具体的な表示も得られる：

Theorem 6.7. 離散逆正弦法則 μ_c は $c\mathbb{Z}$ を台に持つ。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、重み $\mu_c(\{cn\})$ および $\mu_c(\{-cn\})$ は以下のように与えられる：

$$\mu_c(\{cn\}) = \mu_c(\{-cn\}) = \frac{1}{2^n c^{2n}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(\sqrt{2}c)^{2l}} \frac{1}{(n+l)!!} \right)^2 = \left\{ J_n \left(\frac{\sqrt{2}}{c} \right) \right\}^2.$$

ここで J_n は次の第1種ベッセル関数を表す。

Remark 6.8. ベッセル関数との関係については、Prof. Marek Bożejko および Prof. Wojciech Młotkowski 両氏の指摘により発見された。ここに記して感謝する。

実は、この離散逆正弦法則は、「 \mathbb{Z} 上の連続時間量子ウォーク」の時刻 $t = \frac{1}{c}$ での分布 [11] と本質的に同じものである。我々の結果は、量子確率論と量子ウォークの理論との隠れた結びつきを示唆している。

最後に、 $c \rightarrow 0$ としたときの μ_c の極限について議論しよう。

μ_c の m 次モーメントは

$$\left\langle \left(\frac{e^{-it}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{it}}{\sqrt{2}} + \frac{c}{i} \frac{d}{dt} \right)^m, 1, 1 \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})}.$$

与えられるから、 c を 0 に近づけると、離散逆正弦法則のモーメントは

$$\left\langle \left(\frac{e^{-it}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{it}}{\sqrt{2}} \right)^m, 1, 1 \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} = \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{2} \cos t)^m \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^m \frac{dx}{\pi \sqrt{2-x^2}}.$$

に収束する。これは逆正弦法則のモーメントに他ならない。逆正弦法則はモーメント問題決定的なので、モーメント収束は弱収束を導く。以上より以下の定理を得る：

Theorem 6.9. $c \rightarrow 0$ のとき、離散逆正弦法則 μ_c は逆正弦法則 $\frac{dx}{\pi \sqrt{2-x^2}}$ に弱収束する。

この定理は、我々の名付けた「離散逆正弦法則」と逆正弦法則とを関係づける基本的なものであるとともに、ここから「連続時間量子ウォーク」の極限分布が逆正弦法則となる [11] という事実への簡単な証明が得られるという意味でも興味深い。

参考文献

- [1] L. Accardi and M. Bożejko, *Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 663-670.
- [2] L. Accardi and Y. G. Lu, *The Wigner Semicircle Law in Quantum Electro Dynamics*, *Commun. Math. Phys.*, **180**(1996), 605-632.
- [3] L. Accardi, Y. G. Lu and I. Volovich, *Interacting Fock spaces and Hilbert module extensions of the Heiseiberg commutation relations*, *Publ. IAS(Kyoto)* (1997).
- [4] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Translated by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965,
- [5] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, 1978.
- [6] K. L. Chung, *A Course in Probability Theory*, Harcourt, Brace & World, Inc., 1968.
- [7] H. Ezawa, *Asymptotic analysis* (in Japanese) Iwanami-Shoten, 1995.
- [8] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications* **2** (2nd edn.), John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [9] Y. Hashimoto, *Quantum decomposition in discrete groups and interacting Fock space*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **4** (2001), 277-287.
- [10] A. Hora and N. Obata, *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, 2007.
- [11] N. Konno, *Limit theorem for continuous-time quantum walk on the line*, *Phys. Re. E.* **72**, 026113.
- [12] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

- [13] H. Saigo, *A new look at the Arcsine law and "Quantum-Classical Correspondence"*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **15**, no. 3 (2012), 1250021.
- [14] H. Saigo and H. Sako, *The Arcsine law and an asymptotic behavior of orthogonal polynomials*, arXiv preprint arXiv:1407.0792
- [15] K. M. Schmidt and A. Zhigljavsky, *A characterization of arcsine distribution*, *Statistics and Probability Letters*, **79**(24) (2009), 2451.
- [16] J. L. Ullman, *A criterion for arcsine distribution*, *J. Math. Mech.* **16** (1967) 1165-1176.
- [17] W. Van Assche, *Asymptotics for orthogonal polynomials*, *Lecture Notes in Mathematics* **1265**, Springer, 1987.