数理解析研究所講究録
第2010巻 2016年 69-77

Quantum theory starting from transition probability

名古屋大学大学院情報科学研究科
岡村 和弥*

1 導入：遷移確率再考

本稿の目的 遷移確率を量子論の中心的概念として位置づける。

状態遷移（状態変化）の概念はN. Bohrによって導入され，Planckが提唱した量子仮説にはじまる量子物理学の発展に決定的な役割を果たした。Diracは1927年に放射性原子のエネルギー固有値間の遷移確率を，現代的には光の量子光学的モデルにより導出した。von Neumann [13, pp.254–294] は1932年に量子力学の統計的命題により遷移確率へのDirac流アプローチを正当化した。尚，N. BohrとDiracの研究の間には，Einsteinによる遷移確率の導入およびBornによる波動関数（の絶対値の2乗）の確率解釈の提唱がなされている。これらの先行研究から,「量子系における状態遷移は非決定的であり，遷移確率を伴う」という事実が確立した。遷移確率を指定することが考察している系の動力学を理解する上で第一歩となる。それ故に数多の系で遷移確率が研究されている。

本稿で登場するHilbert空間は全て可分であるとする。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ でHilbert空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素の全体，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ で密度作用素の全体，$\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上のトレース族作用素の全体を表す。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\times\mathbb{R}_{>0}$ の有限部分集合 $\mathfrak{F}$ に対し，密度作用素 ρ の開近傍 $O_\rho(\mathfrak{F})$ を

$$O_\rho(\mathfrak{F}) = \bigcap_{(A,\varepsilon)\in\mathfrak{F}} O_\rho(\{(A,\varepsilon)\}),$$
$$O_\rho(\{(A,\varepsilon)\}) = \{\rho'\in\mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid |\mathrm{Tr}[\rho A]-\mathrm{Tr}[\rho' A]|<\varepsilon\}. \tag{1}$$

で定義する。この近傍の全体から生成される位相を $\mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ で表す。この位相はFell [7] により数学的に研究され，HaagとKastler [8] により物理の文脈に導入された。更に，$\mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ から生成されるBorel集合族（σ-代数）を $\mathcal{B}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ で表す。

本稿では以下の3公理を仮定する。

公理 1 (物理量と状態). 物理系Sの物理量はある*Hilbert*空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素のなす*von Neumann*代数 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に付随する自己共役作用素で記述され，一方，系の置かれた実験設定および物理的状況は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の規格化された正規正値線型汎関数（もしくはそれと一対一対応する密度作用素）である状態により記述される。

*okamura@math.cm.is.nagoya-u.ac.jp

公理 2 (Borel 統計公式). 系 S の状態が密度作用素 ρ で与えられるとき，物理量 A のスペクトルが *Borel* 集合 Δ 内に値をとる確率は

$$\Pr\{A \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[\rho E^A(\Delta)] \tag{2}$$

で与えられる。

公理 3 (合成系). *2* つの系 $\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_2$ の物理量がそれぞれ *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ 上の有界線型作用素のなす *von Neumann* 代数に付随する自己共役作用素で記述されるとする。このとき，$\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_2$ の合成系 $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ の物理量はテンソル積 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の *von Neumann* 代数のテンソル積 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1) \overline{\otimes} \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_2) \cong \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ に付随する自己共役作用素で記述される。そして，$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ の置かれた実験設定および物理的状況は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ 上の規格化された正規正値線型汎関数（もしくはそれと一対一対応する密度作用素）で記述される。このとき，$\mathbf{S}_1$ の物理量 A は $A \otimes 1$ と，$\mathbf{S}_2$ の物理量 B は $1 \otimes B$ と同一視される。また，$\mathbf{S}_1$ の状態が ρ_1 であり $\mathbf{S}_2$ の状態が ρ_2 であるときの，合成系 $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ の状態は $\rho_1 \otimes \rho_2$ で与えられる。

以上の 3 公理のもとで，遷移確率概念を仮説として導入する。

仮説 1 (遷移確率). 遷移確率 $\Pr\{\cdot \leftarrow \cdot\}$ とは $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 上の *Borel* 確率測度の集合 $\mathbb{P}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ への写像である：

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni \rho \mapsto \Pr\{\cdot \leftarrow \rho\} \in \mathbb{P}(\mathcal{S}(\mathcal{H})). \tag{3}$$

1 つの実験状況での状態遷移は遷移確率に従う。

遷移確率の具体例として，時間発展がユニタリー作用素 U で記述される場合がある：

$$\Pr\{\Delta \leftarrow \rho\} = \delta_{U\rho U^*}(\Delta) = \begin{cases} 1, & (\text{if } U\rho U^* \in \Delta) \\ 0, & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{4}$$

遷移確率と呼ぶ限り，遷移後の状態に応じて遷移確率を付与する者でなければならない。それ故に，本稿では遷移後の状態を根源事象 (elememtary event) として，遷移確率を状態空間の上の確率測度として捉えることにした。特に，与えられた状態に応じて状態空間の上の確率測度が定まるようにした点が古典的（測度論的）な確率論と類似の議論が意味を持つことを示唆しており重要である。次章以降は物理的に実現可能な遷移確率を定める試みについて議論していく。

先行研究 [3, 26, 23] において，いくつかの一般化遷移確率 (generalized transition probability) が考案されており現在でも研究が続いている [11]。Uhlmann の遷移確率 $P_U : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to [0,1]$ は次で定義される [26]：任意の $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対し，

$$P_U(\rho_1, \rho_2) = \inf_{(\mathcal{K}, \Omega_{\rho_1}, \Omega_{\rho_2})} |\langle \Omega_{\rho_1} | \Omega_{\rho_2} \rangle|^2. \tag{5}$$

ただし下界は 3 つ組 $(\mathcal{K}, \Omega_{\rho_1}, \Omega_{\rho_2})$ － $\mathcal{K}$ は Hilbert 空間，$\Omega_{\rho_1}, \Omega_{\rho_2} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ は単位ベクトルで $\rho_j = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}} |\Omega_{\rho_j}\rangle\langle\Omega_{\rho_j}|$, $j = 1, 2$（$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ に対する部分トレース）を満たすもの－を走る。他にも Cantoni の遷移確率 [3, 4] や Raggio の遷移確率 [23, 24] が知られている。こ

れら 3 つの一般化遷移確率は Bohr や Dirac の意味での遷移確率の表式を角谷 [9] と Bures [2] に倣い任意の状態の対に対し一般化したものであるが，どれも仮説 1 の意味での遷移確率ではない。尚，Uhlmann の遷移確率と Cantoni の遷移確率は一致する [1]。とはいえ，Uhlmann の遷移確率はある意味“正しい”定式化であったことを次でみる。

2 先行研究：一般化遷移確率と射影仮説

一般化遷移確率，中でも Uhlmann の遷移確率について本章では議論する。詳しく議論する前に，予め結論を述べよう：

Uhlmann の遷移確率は射影仮説が機能する範囲の状態遷移の記述に有用な概念である。

測定に纏わる考察で量子力学成立間もない頃から決定的な役割を果たした考察は，**測定器から出力される測定値ごとに測定後の状態が定まる**ということである。状態の統計的位置づけおよび測定データの統計的処理を踏まえれば大変自然である。現代的な量子測定理論が整備される以前に，以下で述べる特殊な状況を除いてその重要性および正確な位置づけが意識されていたとは言えないが。仮説として以下のように纏められる：

仮説 2. A を測定する離散的物理量であるとする。任意の準備された状態（密度作用素）ρ と出現したスペクトル $a \in \mathbb{R}$ で $\Pr\{A \in \{a\} \| \rho\} > 0$ を満たすものに対し，測定後の状態 $\rho_{\{A=a\}}$ が定まる。このときの遷移確率は，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ に対し，

$$\Pr\{\Delta \leftarrow \rho\} = \sum_{a \in Sp(A;\rho)} \mathrm{Tr}[\rho E^A(a)]\, \delta_{\rho_{\{A=a\}}}(\Delta) \tag{6}$$

で与えられる。ここで，$Sp(A;\rho) = \{a \in Sp(A) \mid \mathrm{Tr}[\rho E^A(a)] > 0\}$ である。

勿論，この仮説は測定後の状態が測定値ごとに定まるべきであるという観察の範疇を超えないわけで，物理過程として踏み込んだものではない。そこで，von Neumann [13] は次の仮説を導入した：

仮説 3 (反復可能性仮説 (repeatability hypothesis) [13, 22]). 系において物理量が 2 度続けて測定されたとき，各時刻で同じ値を得る。

この仮説は 1930 年前後においては標準的な仮定であった（[22] 参照)。

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の各射影作用素 P に対し，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の閉凸部分集合 F_P を

$$F_P = \{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid \mathrm{Tr}[\rho P] = 1\} \tag{7}$$

で定義する。$P = E^A(a)$ のとき，$F_{E^A(a)}$ を $F_{\{A=a\}}$ で表す。このとき，$F_{\{A=a\}}$ は A の固有値 a に対応した固有状態の集合である。反復可能性仮説は，各状態 ρ と $a \in \mathbb{R}$ で $\Pr\{A \in \{a\} \| \rho\} > 0$ なるものに対し，$\rho_{\{A=a\}} \in F_{\{A=a\}} = \{E^A(a)\}$ となることを主張している。

[13, 12] で言及されているように，反復可能性仮説は非退化離散物理量に対してはうまく機能するが，退化した離散物理量や連続物理量に対しては機能しない。反復可能性仮説より強く，そして一般化遷移確率，特に Uhlmann の遷移確率を用いた次の仮説を採用する。

仮説 4 (遷移確率). 離散物理量 A を状態 ρ で測定し固有値 a を得たとき，測定後の状態は $F_{\{A=a\}}$ の元 ω で *Uhlmann* の遷移確率 $P_U(\omega,\rho)$ を最大にするものであり，$\rho_{\{A=a\}}$ で表す。

上の仮説から次の仮説が得られる。

仮説 5 (Von Neumann-Lüders の射影仮説 [13, 12]). A を $\mathbf{S}$ の離散物理量であるとする。ρ が準備された状態で A の測定で出力 $a \in \mathbb{R}$ が現れたときの測定後の状態 $\rho_{\{A=a\}}$ は，$\Pr\{A \in \{a\} \| \rho\} > 0$ ならば

$$\rho_{\{A=a\}} = \frac{E^A(a)\rho E^A(a)}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(a)]} \tag{8}$$

で与えられる。

仮説 4 から仮説 5 を示す際，次の定理を用いる。

定理 1 (Raggio [25, p.333, Proposition]). P を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の射影とする。$\mathcal{H}$ 上の任意の射影 Q と任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対し，$\mathcal{TP}_U(F_Q \leftarrow \rho) = \sup_{\omega \in F_Q} P_U(\omega,\rho)$ とおく。このとき，$\mathcal{TP}_U(F_P \leftarrow \rho) = \mathrm{Tr}[\rho P]$ である。ここで，上界を与える $\rho_P \in F_P$ は $\mathrm{Tr}[\rho P] > 0$ のとき $\rho_P = \dfrac{P\rho P}{\mathrm{Tr}[\rho P]}$ であり，その他の場合は存在しない。

上の定理から，仮説 4 は Born 統計公式と整合的である。このとき，遷移確率は，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ に対し，

$$\Pr\{\Delta \leftarrow \rho\} = \sum_{a \in Sp(A;\rho)} \mathrm{Tr}[\rho E^A(a)]\, \delta_{\frac{E^A(a)\rho E^A(a)}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(a)]}}(\Delta) \tag{9}$$

で与えられる。写像 $R_\rho : \mathbb{R} \ni a \mapsto \rho_{\{A=a\}} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を

$$\rho_{\{A=a\}} = \begin{cases} \dfrac{E^A(a)\rho E^A(a)}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(a)]}, & (\text{if } \Pr\{A \in \{a\} \| \rho\} > 0) \\ \sum_{a \in \mathbb{R}} E^A(a)\rho E^A(a), & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{10}$$

で定義すると，R_ρ は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 値確率変数である。すなわち，$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 値単関数の列 $\{R_{\rho,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty} \|R_{\rho,n}(a) - R_\rho(a)\|_{\mathrm{Tr}} = 0$ が全ての $a \in \mathbb{R}$ に対して成立するものが存在する。特に，このとき R_ρ 自身が $\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{S}(\mathcal{H})$-値単関数である：任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，

$$R_\rho(a) = \sum_{a' \in Sp(A;\rho)} \chi_{\{a'\}}(a) \frac{E^A(a')\rho E^A(a')}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(a')]} + \chi_{\mathbb{R}\setminus Sp(A;\rho)}(a) \sum_{a' \in \mathbb{R}} E^A(a')\rho E^A(a'). \tag{11}$$

このとき，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ に対し，

$$\Pr\{\Delta \leftarrow \rho\} = \Pr\{A \in R_\rho^{-1}(\Delta) \| \rho\} \tag{12}$$

を得る。

現在では反復可能性仮説は一般には受け入れられておらず，反復可能性仮説によらない量子測定理論が確立している。最初の試みは Davies と Lewis による [6, 5]。彼らは反復可能性仮説（正確には，測定の一般論における前提として測定の反復可能性を課すこと）を放棄し，より融通のきく理論的枠組みを構築する提唱を行った。この提唱が契機となって先述の通り今現在の量子測定理論は反復可能性仮説によらずに確立した故，反復可能性仮説より強い仮説 4 はもはや一般論しては受け入れられない。

3 遷移確率と測定過程

仮説1の採用，すなわち，遷移確率を状態から状態空間上の Borel 確率測度への写像として扱うことにより（限定された状況ではあるが）状態遷移を見通しよく扱えることを前章でみた。その核心は遷移後の状態を根源事象として扱うことを可能にする試みにあった。とはいえ，任意に与えられた遷移確率が物理的に実現可能であるとは想定しない。したがって，物理的に実現可能な遷移確率のクラスを特定すべきであると考える。系のおかれた状況における状態遷移を確認する術をもつ実験状況の典型例と言えば（前章では離散物理量の場合に限られていたが）測定であろう。$\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ で出力変数（メーターとも呼ぶ）$\boldsymbol{x}$ をもつ測定器を表す。$\boldsymbol{x}$ は可測空間 $(X,\mathcal{F})$ に値をとるとする。一般的な測定において測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ が満たすべき条件は以下の仮説のように纏められる。

仮説 6. 可測空間 $(X,\mathcal{F})$ に値をとる出力変数 $\boldsymbol{x}$ をもつ測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ を用いて，我々は次の *2* 要素を指定できる：
(1) 任意の状態 ρ における出力変数 $\boldsymbol{x}$ の従う確率測度 $\Pr\{\boldsymbol{x}\in(\cdot)\|\rho\}$；
(2) 任意に状態 ρ が与えられたとき，各出力値 $\boldsymbol{x}=x$ における測定後の状態 $\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}$ の族 $\{\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}\}_{x\in X}$ であって，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$-値確率変数 $R_\rho : X\ni x\mapsto \rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ を任意の $\rho\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して定義するもの。

上の R_ρ が $\mathcal{S}(\mathcal{H})$-値確率変数であるとは，X 上の $\mathcal{F}$-可測な $\mathcal{S}(\mathcal{H})$-値単関数の列 $\{R_{\rho,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で任意の $x\in X$ に対して $\lim_{n\to\infty}\|R_{\rho,n}(x)-R_\rho(x)\|_{\mathrm{Tr}}=0$ を満たすものが存在するときをいう。上の仮説を踏まえ，遷移確率に対し次の仮説をおく。

仮説 7. 任意の遷移確率はある測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ によって実行される測定により実現される。このとき，任意の状態 ρ において，遷移確率 $\Pr\{\cdot\leftarrow\rho\}$ は出力変数 $\boldsymbol{x}$ の従う確率測度 $\Pr\{\boldsymbol{x}\in\cdot\|\rho\}$ および測定後の状態の族 $\{\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}\}_{x\in X}$ から定義される状態に値をとる確率変数 $R_\rho : X\ni x\mapsto\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ を用いて，任意の $\Delta\in\mathcal{B}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ に対し

$$\Pr\{\Delta\leftarrow\rho\}=\Pr\{\boldsymbol{x}\in R_\rho^{-1}(\Delta)\|\rho\} \tag{13}$$

と計算される。

現行の文脈において遷移確率 $\Pr\{\cdot\leftarrow\rho\}$ の台上の状態の識別可能性が最も重要である。仮説6および7に基づくとき，物理的に実現可能な測定のクラスの指定が次の焦点となるが，現代の量子測定理論では（完全正値）インストルメントがそのクラスを定めると考えられている。写像 $\mathcal{I}:\mathcal{F}\to P(\boldsymbol{T}(\mathcal{H}))$ は以下の2条件を満たすとき $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),X)$ に対するインストルメントと呼ばれる：
(1) 任意の $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ に対し，$\|\mathcal{I}(S)\rho\|_{\mathrm{Tr}}=\|\rho\|_{\mathrm{Tr}}$。
(2) 任意の $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ および互いに素な列 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ に対し，

$$\mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(\cup_{n=1}^{\infty}\Delta_n)\rho)A]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(\Delta_n)\rho)A]. \tag{14}$$

$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),X)$ に対するインストルメントの双対写像 $\mathcal{I}:\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\times\mathcal{F}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を，任意の $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ および $\Delta\in\mathcal{F}$ に対し，

$$\mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(\Delta)\rho)A]=\mathrm{Tr}[\rho\mathcal{I}(A,\Delta)] \tag{15}$$

で定義する。$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), X)$ に対するインストルメントの双対写像は次の3条件を満たす写像 $\mathcal{I}: \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ として特徴づけられる：
(i) 任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，写像 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \mathcal{I}(A, \Delta) \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の正規，正値かつ線型である。
(ii) $\mathcal{I}(1, S) = 1$。
(iii) 任意の $\rho \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ および互いに素な列 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対し，

$$\mathrm{Tr}[\rho\mathcal{I}(A, \cup_{n=1}^{\infty}\Delta_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Tr}[\rho\mathcal{I}(A, \Delta_n)]. \tag{16}$$

上の3条件を満たす写像とインストルメントは一対一で対応する。それ故，インストルメントの双対写像もインストルメントと呼ぶことにする。

測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ がある $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), X)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ で実現されるとき，次の定理により各出力値 $\boldsymbol{x} = x$ に対応した測定後の状態の族 $\{\rho_x\}_{x\in X}$ ー事後状態の族 (family of posterior states) と呼ばれるーの存在が保証される（詳細は [17, 14] 参照）：

定理 2 ([17, Theorem 4.3]). $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), X)$ に対する任意のインストルメント $\mathcal{I}$ および $\mathcal{H}$ 上の密度作用素 ρ に対し，$\mathcal{H}$ 上の密度作用素の族 $\{\rho_x\}_{x\in X}$ であって $\mathcal{S}(\mathcal{H})$-値確率変数 $X \ni x \mapsto \rho_x \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を定義し，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\int_{\Delta} \mathrm{Tr}[\rho_x A]\, d\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(x)\rho] = \mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(\Delta)\rho)A] \tag{17}$$

が成り立つものが存在する。

測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ がある $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), X)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ で実現されるとき，測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と物理量 Y の順で実行される任意の逐次測定に対し，$(\mathbb{R} \times S, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F})$ 上の結合確率測度 $\mathrm{Pr}\{(Y, \boldsymbol{x}) \in (\cdot)\|\rho\}$ は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ のアファイン関数である。ここで，$\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と Y の順で実行される逐次測定の $(\mathbb{R} \times S, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F})$ 上の結合確率測度 $\mathrm{Pr}\{(Y, \boldsymbol{x}) \in (\cdot)\|\rho\}$ は，任意の $\Delta_1 \in \mathcal{F}$ と $\Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\mathrm{Pr}\{(Y, \boldsymbol{x}) \in \Delta_2 \times \Delta_1\|\rho\} = \int_{\Delta_1} \mathrm{Pr}\{Y \in \Delta_2\|\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}\}\, d\mathrm{Pr}\{\boldsymbol{x} \in x\|\rho\} \tag{18}$$

で定義される。特殊な場合として，von Neumann-Lüders の射影仮説により与えられる離散物理量 A と一般の物理量 B の順で実行される逐次測定の結合確率分布は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ のアファイン関数である：任意の $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\mathrm{Pr}\{(B, A) \in \Delta_2 \times \Delta_1\|\rho\} = \sum_{a\in\Delta_1} \mathrm{Tr}[E^A(a)\rho E^A(a)E^B(\Delta_2)]. \tag{19}$$

測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と物理量 Y の順で実行される任意の逐次測定に対し定義される結合確率分布（測度）が $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ のアファイン関数であるという仮定は，この逐次測定に対応する $(\mathbb{R} \times S, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F})$ 上の正作用素値測度 (positive operator-valued measure) Π が存在して，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$ に対し

$$\mathrm{Pr}\{(Y, \boldsymbol{x}) \in \Delta\|\rho\} = \mathrm{Tr}[\rho\Pi(\Delta)] \tag{20}$$

を満たすことと等価である。すなわち，測定が考察している系の物理量に還元できる，或は，系の物理量に無関係でないことを保証する条件であると言える。これは大変自然な条件であると考えられるので，上の仮定を仮説として採用する。

仮説 8 (アファイン性). 測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と物理量 Y の順で実行される任意の逐次測定に対し，$(\mathbb{R}\times S, \mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{F})$ 上の結合確率測度 $\Pr\{(Y,\boldsymbol{x})\in(\cdot)\|\rho\}$ は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ のアファイン関数である。

このとき，定理 2 の逆でもある次の定理が成立する。

定理 3. 仮説 *6* を満たす測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ に対し，$\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ が仮説 *8* を満たすことと，任意の $\rho\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$, $\Delta\in\mathcal{F}$ および $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対し

$$\int_{\Delta}\mathrm{Tr}[\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}A]\,d\Pr\{\boldsymbol{x}\in x\|\rho\}=\mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(\Delta)\rho)A] \tag{21}$$

を満たす $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),X)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ が存在することは等価である。

これまでの議論では，遷移確率を確認する手段を備えた物理過程である測定を軸に，遷移後の状態（の族）を根源事象ではなく確率変数の値（値域）として扱うことでインストルメントの概念と自然に結びつくことを示した。測定でなくとも外部系の確率的要因が介在するときにはインストルメントにより状態遷移が記述できると期待される。それ故に，物理的に実現可能な遷移確率はインストルメントの理論でほぼ尽くされると考えられる。
より現実的なインストルメントを捉えるため，次の仮説を考える。

仮説 9 (自明拡張可能性 [19, 20]). $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で記述される系 $\mathbf{S}$ を測定する任意の測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と $\mathbf{S}$ と統計的に独立かつ $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と相互作用しない $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ で記述される系 $\mathbf{S}'$ に対し，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ によって記述される合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ を測定する測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}')$ で次の統計的性質を満たすものが存在する：任意の $\Delta\in\mathcal{F}$, $x\in X$, $\rho\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ および $\sigma\in\mathcal{S}(\mathcal{K})$ に対し，

$$\Pr\{\boldsymbol{x}'\in\Delta\|\rho\otimes\sigma\}=\Pr\{\boldsymbol{x}\in\Delta\|\rho\}, \tag{22}$$

$$(\rho\otimes\sigma)_{\{\boldsymbol{x}'=x\}}=\rho_{\{\boldsymbol{x}=x\}}\otimes\sigma,\quad a.e.. \tag{23}$$

この仮説はその名の通り合成系への拡張に対して，その自明性を要求するものである。この仮説を満たす測定器 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ と対応するインストルメントの完全正値性は等価であることがわかる [19, 20]。更には，$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),X)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ の完全正値性は，$\mathcal{I}$ を実現する測定過程 $\mathbb{M}=(\mathcal{K},\sigma,E,U)$ の存在と等価である [15, 16]，すなわち，任意の $\Delta\in\mathcal{F}$ と $\rho\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho\otimes\sigma)U^*(1\otimes E(\Delta))]. \tag{24}$$

ここで，測定過程 $\mathbb{M}=(\mathcal{K},\sigma,E,U)$ とは，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$，$\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の正規状態 σ，射影作用素値測度 (projection-valued measure, PVM) $E:\mathcal{F}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ および $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U からなる 4 つ組である。つまり，測定過程とは von Neumann の公理系と整合的な測定器の物理系としてのモデリングのことである。
本章の議論は以下の系としてまとめられる：

Corollary 4. 任意の遷移確率は *CP instrument* によって実現される。

4 一般の量子系への拡張

前章までの議論は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の σ-有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ での議論に（[14] の結果を用いれば）容易に拡張可能である：$\mathcal{M}_*$ で $\mathcal{M}$ 上の正規線型汎関数の全体，$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ で $\mathcal{M}$ 上の正規状態の全体を表す。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{M}$，$\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{M}_*$，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ に置き換えることでほぼ同じ議論が成り立つ。一般の σ-有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$。$\mathbb{M}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程であるとは，$\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ が前章の意味での測定過程であって，$\{\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(M, \Delta) \mid M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{M}$ を満たすことをいう。ただし，$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ は $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する CP instrument であって，任意の $X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(X, \Delta) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U^*(X \otimes E(\Delta))U(1 \otimes \sigma)]$ で定義される。

$(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ に対し，単位的（双正規）完全正値写像 $\Psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{M} \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S, \mathcal{I}) \to \mathcal{M}$ で，任意の $M \in \mathcal{M}$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，

$$\mathcal{I}(M, \Delta) = \Psi_{\mathcal{I}}(M \otimes [\chi_\Delta]) \tag{25}$$

を満たすものが常に存在する。$(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ が正規拡張性質（normal extension property, 以後 NEP）とは，単位的正規完全正値写像 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}} : \mathcal{M} \,\overline{\otimes}\, L^\infty(S, \mathcal{I}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}|_{\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S, \mathcal{I})} = \Psi_{\mathcal{I}}$ を満たすものが存在するときをいう。この性質に関して以下の定理が成り立つ。

定理 5 ([14, Theorem 3.4]).
$(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し次の条件は等価である：
(*i*) $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。
(*ii*) $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する *CP instrument* $\widetilde{\mathcal{I}}$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\widetilde{\mathcal{I}}(M, \Delta) = \mathcal{I}(M, \Delta) \tag{26}$$

を満たすものが存在する。
(*iii*) $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta)M = (id \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \tag{27}$$

を満たすものが存在する。

定理 5 から CP instrument が NEP をもつことと測定過程で記述可能であることが等価であることがわかり [14, Theorem 3.6]，一般の (σ-有限な) von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ において測定過程で記述可能な CP instrument のクラスを数学的に特徴づけることができた。加えて，NEP をもつ CP instrument が次の定理から改めて自然であるとわかる。

定理 6 ([14, Theorem 3.5]). $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し次の条件は等価である：
(*i*) $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。
(*ii*) 任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ に対して，$(\mathcal{I}, \rho)$ に対する強可測な事後状態の族 $\{\rho_X\}_{x \in X}$ が存在する。

この定理は定理 2 の拡張でもある。

参考文献

[1] H. Araki and G.A. Raggio, Lett. Math. Phys. **6**, 237–240 (1982).
[2] D. Bures, Trans. Amer. Math. Soc. **135**, 199–212 (1969).
[3] V. Cantoni, Commun. Math. Phys. **44**, 125–128 (1975).
[4] Cantoni の遷移確率 $P_C : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to [0,1]$ は，任意の $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対し，

$$P_C(\rho_1, \rho_2) = \inf_E \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\mu_1^E}{d\mu}(a) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\mu_2^E}{d\mu}(a) \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(a) \tag{28}$$

で定義される [3]。ここで，下界は全ての PVM $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を走る。そして，各 $j = 1, 2$ に対し，μ_j^E は，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し $\mu_j^E(\Delta) = \mathrm{Tr}[\rho_j E(\Delta)]$ で定義される $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度である。
[5] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, (Academic Press, London, 1976).
[6] E.B. Davies and J.T. Lewis, Commun. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970).
[7] J.M.G. Fell, Trans. Amer. Math. Soc. **94**, 365–403 (1960).
[8] R. Haag and D. Kastler, J. Math. Phys. **5**, 848–861 (1964).
[9] S. Kakutani, Ann. of Math. (2) **49**, 214–224 (1948).
[10] A.N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, (Springer, Berlin, 1933).
[11] C.-W. Leung, C.-K. Ng and N.-C. Wong, J. Math. Phys. **57**, 015212 (2016).
[12] G. Lüders, Ann. Physik **8**, 322–328 (1951); Ann. Phys. (Leipzig) **15**, 663–670 (2006), Translation and discussion by K.A. Kirkpatrick.
[13] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton UP, Princeton, 1955), [English translation of *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932)].
[14] K. Okamura and M. Ozawa, J. Math. Phys. **57**, 015209 (2016), arXiv:1501.00239 [math-ph].
[15] M. Ozawa, Conditional expectation and repeated measurements of continuous quantum observables, In; *Probability Theory and Mathematical Statistics*, (eds. K. Ito and J.V. Prohorov), Lecture Notes Math. **1021**, pp.518–525 (Springer, Berlin, 1983).
[16] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79–87 (1984).
[17] M. Ozawa, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21**, 279–295 (1985).
[18] M. Ozawa, J. Math. Phys. **34**, 5596–5624 (1993).
[19] M. Ozawa, Ann. Phys. (N.Y.) **259**, 121–137 (1997).
[20] M. Ozawa, Ann. Phys. (N.Y.) **331**, 350–416 (2004).
[21] M. Ozawa, Sugaku Expositions **27**, 195–221 (2014), arXiv:1201.5334 [quant-ph].
[22] M. Ozawa, Current Science **109**, 2006–2016 (2015), arXiv:1507.02010 [quant-ph].
[23] G.A. Raggio, Lett. Math. Phys. **6**, 233–236 (1982).
[24] Raggio の遷移確率 $P_R : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to [0,1]$ は任意の $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対し，

$$P_R(\rho_1, \rho_2) = \mathrm{Tr}[\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}] \tag{29}$$

で定義される [23]。
[25] G.A. Raggio, "Generalized transition probabilities and applications," In: *Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes*, Lecture Notes in Math. **1055**, (Springer, Berlin, 1984), pp.327–335.
[26] A. Uhlmann, Rep. Math. Phys. **9**, 273–279 (1976).