数理解析研究所講究録
第2010巻 2016年 105-115

調和振動子でできた開放系の時間発展

金沢大学・理工研究域　田村　博志
Hiroshi Tamura
Institute of Science and Engineering,
Kanazawa University

ABSTRACT

空洞輻射の中を、原子列が通過する様な物理系を模した数理モデルを扱う。空洞輻射として単一モードの電磁場（つまり調和振動子）を考え、原子は２準位のみを持つという設定のモデルは多くの人が論じている。これは非常に単純化したモデルに見えるが、その解析結果は具体的数式であらわに与えられる程簡単ではない。ここでは、より明白に扱えるモデルとして、原子も調和振動子とし、空洞と環境の間に相互作用のあるモデル（開放系）を考える。この種の問題では、密度行列の時間変化を与える master equation が物理的意味を持つ解を与えるか？という古くからの問題がある。この点を整理してから、双対空間での発展方程式の解を、Weyl operator の時間発展として具体的に与える。さらに、部分系の漸近挙動を考える。

この原稿は Valentin A. Zagrebnov 氏との共同研究に基づく論文 [TZ1][TZ2] の要点の日本語に依る解説である。

1　モデル

$\mathscr{F}$ を 1-mode Fock 空間とし、 a と a^* をそこでの消滅生成作用素とする。つまり、真空 Ω にたいし、$\{(a^*)^m\Omega\}_{m\geq 0}$ によって生成される線形空間 $\mathscr{F}_{\rm fin}$ の完備化が $\mathscr{F}$ であり、a, a^* は正準交換関係 (CCR)

$$[a, a^*] = \mathbb{1}, \quad [a, a] = 0, \quad [a^*, a^*] = 0 \quad \text{on} \quad \mathscr{F}_{\rm fin}$$

を満たす。$\mathscr{F}$ の N 個のコピー $\{\mathscr{H}_k\}_{k=0}^N$ を考える。ここで $N \in \mathbb{N}$ は十分大きいとする。これらのテンソル積 Hilbert 空間

$$\mathscr{H}^{(N)} = \bigotimes_{k=0}^{N} \mathscr{H}_k \tag{1.1}$$

を導入し、$\Omega_F = \Omega^{\otimes(N+1)}$ とおく。この空間に消滅生成作用素

$$b_k = \mathbb{1}\otimes\ldots\otimes\mathbb{1}\otimes a\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1},\quad b_k^* = \mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes a^*\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1} \tag{1.2}$$

を導入する。ここで、$k = 0,1,2,\ldots,N$ にたいし a 及び a^* は $k+1$ 番目の因子になっている。これらの非有界作用素は、代数的テンソル積 $\mathscr{H}_{\text{fin}}^{(N)} := \mathscr{F}_{\text{fin}}^{\otimes(N+1)}$ 上で、CCR

$$[b_k, b_{k'}^*] = \delta_{k,k'}\mathbb{1},\quad [b_k, b_{k'}] = [b_k^*, b_{k'}^*] = 0 \qquad (k,k' = 0,1,2,\ldots,N) \tag{1.3}$$

を満たす。

系の Hamiltonian として、時間依存する摂動を持つ

$$H_N(t) = E\,b_0^*b_0 + \epsilon\sum_{k=1}^{N} b_k^*b_k + \eta\sum_{k=1}^{N}\chi_{[(k-1)\tau,k\tau)}(t)\,(b_0^*b_k + b_k^*b_0) \tag{1.4}$$

を考える。ここで $t\in[0,N\tau)$ であり τ, E, ϵ は正の定数、そして $\chi_{[x,y)}(\cdot)$ は区間 $[x,y)\subset\mathbb{R}$ の定義関数であり、$H_N(t)$ は

$$\mathcal{D}_0 := \bigcap_{k=0}^{N}\mathrm{dom}(b_k^*b_k)\ \subset \mathscr{H}^{(N)} \tag{1.5}$$

を定義域とする自己共役作用素である。このモデル (1.4) は $E\,b_0^*b_0$ をエネルギーとする「空洞輻射」$\mathcal{S}$ と $\epsilon\sum_{k=1}^{N} b_k^*b_k$ をエネルギーとしてもつ「原子」の列 $\mathcal{C}_N = \mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2+\cdots+\mathcal{S}_N$ から成る系 $\mathcal{S}+\mathcal{C}_N$ で、1つづつ次々に原子が空洞内に入りそこで電磁場と相互作用する状況を表している。τ は1つの原子が空洞にいる時間である。Hilbert 空間 $\mathscr{H}_0$ は空洞輻射 $\mathcal{S}$ に対応し、$\mathscr{H}_k$ は k 番目の原子 $\mathcal{S}_k$ $(k = 1,\cdots,N)$ に対応している。[NVZ]

時間間隔 $[(n-1)\tau, n\tau)$ においては $\mathcal{S}_n$ のみが $\mathcal{S}$ と相互作用し、系は時間に依存しない Hamiltonian

$$H_n = E\,b_0^*b_0 + \epsilon\sum_{k=1}^{N} b_k^*b_k + \eta\,(b_0^*b_n + b_n^*b_0) \tag{1.6}$$

に支配されている。Hamiltonian を下に有界にするため条件

(H1)
$$\eta^2 \leqslant E\,\epsilon \tag{1.7}$$

を仮定する。

$\mathscr{H}^{(N)}$ 上のトレース族作用素全体のなす Banach 空間を $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H}^{(N)})$ とおく。この空間の双対は $\mathscr{H}^{(N)}$ 上の有界作用素全体となる：$\mathfrak{C}_1^*(\mathscr{H}^{(N)}) \simeq \mathcal{L}(\mathscr{H}^{(N)})$. この双対は双線形形式

$$\langle\phi\,|A\rangle_{\mathscr{H}^{(N)}} = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}^{(N)}}(\phi A)\quad \text{for}\quad (\phi, A)\in\mathfrak{C}_1(\mathscr{H}^{(N)})\times\mathcal{L}(\mathscr{H}^{(N)}) \tag{1.8}$$

から導かれる。$\mathfrak{C}_1(\mathscr{H}^{(N)})$ の元でトレースが1の正作用素はこの系の密度行列と呼ばれる。そして、各密度行列 ρ には $\mathcal{L}(\mathscr{H}^{(N)})$ 上の正規状態

$$\omega_\rho(\,\cdot\,) = \langle\rho\,|\,\cdot\,\rangle_{\mathscr{H}^{(N)}} \tag{1.9}$$

が対応する。

この系の熱浴内での発展を記述するモデルとして、Kossakowski-Lindblad-Davies (KLD) 型のマスター方程式 $\partial_t\rho(t) = L_\sigma(t)(\rho(t))$ を考える。ここで、

$$L_\sigma(t)(\rho) := -i\,[H_N(t), \rho] + \mathcal{Q}(\rho) - \frac{1}{2}(\mathcal{Q}^*(\mathbb{1})\rho + \rho\,\mathcal{Q}^*(\mathbb{1}))\,, \tag{1.10}$$

$t \in [0, N\tau)$ である。[AJP3, AF]　散逸を記述する作用素 $\mathcal{Q}$ の ρ への作用を

$$\mathcal{Q}(\rho) = \sigma_-\, b_0\, \rho\, b_0^* + \sigma_+\, b_0^*\, \rho\, b_0\ . \tag{1.11}$$

と設定し、よってその双対 $\mathcal{Q}^*$ の観測量 A への作用は

$$\mathcal{Q}^*(A) = \sigma_-\, b_0^*\, A\, b_0 + \sigma_+\, b_0\, A\, b_0^*\,. \tag{1.12}$$

となる。このモデルは、熱浴内の空洞輻射が（熱浴と直接相互作用していない）原子列と相互作用している系を意味する：$(\mathcal{S}+\mathcal{R})+\mathcal{C}_N$.

各時間間隔 $t \in [(k-1)\tau, k\tau)$ において $L_\sigma(t)(\rho)$ は

$$L_{\sigma,k}(\rho) := -i[H_k, \rho] + \mathcal{Q}(\rho) - \frac{1}{2}(\mathcal{Q}^*(\mathbb{1})\rho + \rho\mathcal{Q}^*(\mathbb{1}))\ . \tag{1.13}$$

となるので、このマスター方程式の Cauchy 問題の解 $\rho(t)$ は形式的に

$$\rho(t) = T^\sigma_{t,0}(\rho) := T^\sigma_{n,\nu(t)}\, T^\sigma_{n-1} \cdots T^\sigma_2\, T^\sigma_1(\rho) \tag{1.14}$$

と表される。ここで、$t = (n-1)\tau + \nu(t)$, $n \leqslant N$, $0 \leqslant \nu(t) < \tau$ であり $T^\sigma_{k,s} = e^{sL_{\sigma,k}}$, $T^\sigma_k = T^\sigma_{k,\tau}$　$(k = 1, 2, \cdots, n)$ とした。よって各時間間隔 $[(k-1)\tau, k\tau)$ 上の時間発展をまず考えることになる。これが、本稿の第一の目的である。つまり、我々の非有界な (1.13) をふさわしく定義して、それが Cauchy 問題の解を与える半群を生成することを示すことである。そのために次の仮定をおく：

(H2)
$$0 \leqslant \sigma_+ < \sigma_-\ . \tag{1.15}$$

これは、**(H1)** と共に以下の議論において重要な役割をする。また簡潔さのため、以下で $\mathscr{H}^{(N)}$ などにおける添字 N を省略する。

なお、H_k, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ が有界作用素である場合には KLD 型作用素 (1.13) は完全正、トレース保存、一様連続半群を生成することが知られている [Da1] が非有界の場合には対応する一般論は無い。

2　強連続半群

この節では、 Kato-Davies の議論 [Ka1], [Da2] に沿って作用素 (1.13) を拡張してそれがトレースを保存する強連続縮小半群の生成元となることを示す事が目標である。

そのために先ず Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ (1.1) の密部分集合 $\mathcal{D}_0$ (1.5) を定義域とする次の作用素について考える。

$$K_0 = \frac{\sigma_+}{2} b_0 b_0^* + \frac{\sigma_-}{2} b_0^* b_0 + i\left((E-\epsilon) b_0^* b_0 + \epsilon\,\hat{n}\right), \quad \hat{n} = \sum_{j=0}^{N} b_j^* b_j\,, \tag{2.1}$$

$$K_n = K_0 + i\,\eta(b_0^* b_n + b_n^* b_0) = \frac{1}{2}\,\mathcal{Q}^*(\mathbb{1}) + i\,H_n\,, \; n = 1, 2, \cdots, N\,. \tag{2.2}$$

ここで $E, \epsilon, \eta > 0$ と $\sigma_\pm$ は条件 **(H1)**, **(H2)** をみたす。

これらの作用素は m-accretive であることが確かめられるので、

Lemma 2.1 $-K_n$ は、$\mathscr{H}$ 上の強連続縮小半群（*SCCS*）$\{e^{-tK_n}\}_{t\geqslant 0}$ を生成する。

ここで、$\Phi : \mathfrak{C}_1(\mathscr{H}) \to \mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ を $\Phi(\rho) = (\mathbb{1}+\hat{n})^{-1}\rho(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1}$ と定義すると、$\widetilde{\mathscr{D}} = \Phi(\mathfrak{C}_1(\mathscr{H}))$ は $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ の密部分集合であり、$L_{\sigma,n}$ (1.13) を次のように $\widetilde{\mathscr{D}}$ 上の作用素として定義することが出来る。

$$\begin{aligned} L_{\sigma,n}(\Phi(\rho)) &= -K_n(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1}\rho(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1} - (\mathbb{1}+\hat{n})^{-1}\rho(K_n(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1})^* \\ &+\sigma_- b_0(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1}\rho(b_0(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1})^* + \sigma_+ b_0^*(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1}\rho(b_0^*(\mathbb{1}+\hat{n})^{-1})^*\,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ただし、$\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ である。

$\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ の自己共役元の全体からなる実 Banach 空間を V とし、$\mathscr{D} = \Phi(V)$ とおく。このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 2.2 各 $n = 1, 2\ldots, N$ に対し 作用素 $L_{\sigma,n}\restriction_{\mathscr{D}}$ の閉包は V 上のトレースを保存する *SCCS* $\{T_{n,t}^\sigma\}_{t\geqslant 0}$ の生成元である。

証明は [Ka1], [Da2] の議論に則してなされ、その詳細は [TZ1] を見て頂くことにするが、そのエッセンスは以下のとおりである。

$n = 1$ とする。作用素の族

$$S_t(\rho) = e^{-tK_1}\,\rho\,(e^{-tK_1})^* \qquad (t \geqslant 0,\; \rho \in V) \tag{2.4}$$

は、V 上の正の SCCS であり、その生成元 Z は、$\mathrm{dom}\,(Z) \supset \mathscr{D}$ かつ

$$Z(\rho) = -K_1\rho - \rho K_1^* \quad \text{for} \quad \rho \in \mathscr{D} \tag{2.5}$$

をみたす。$\mathrm{dom}\,Z$ を定義域とする Z-有界な作用素 J_- と J_+ で

$$J_-(\rho) = b_0\rho b_0^*\,, \quad J_+(\rho) = b_0^*\rho b_0 \qquad (\rho \in \mathscr{D}) \tag{2.6}$$

をみたすものが存在し、$\mathrm{dom}\,(Z)$ 上の作用素 $\hat{L} := Z + \sigma_- J_- + \sigma_+ J_+$ が定義される。問題は、$J := (\sigma_- J_- + \sigma_+ J_+)$ の相対 Z-bound が 1 のため、$\hat{L}$ の閉包をとる操作が単純でないことであるが、これを以下のように回避する。

V 上の SCCS R_s を

$$R_s(\rho) = e^{-s\hat{n}}\rho e^{-s\hat{n}} \qquad (s \geqslant 0\ ,\ \rho \in V)$$

と定義すると

$$R_s(S_t(\rho)) = S_t(R_s(\rho)) \qquad (\rho \in V\,) \tag{2.7}$$

が成立すると共に

$$\begin{aligned} J_+(R_s(\rho)) &= e^{2s} R_s(J_+(\rho))\,, \\ J_-(R_s(\rho)) &= e^{-2s} R_s(J_-(\rho)) \end{aligned} \tag{2.8}$$

も $\rho \in \mathscr{D}$ に対し成立する。よって、

$$(Z + \sigma_+ J_+ + \sigma_- J_-)R_s = R_s(Z + e^{2s}\sigma_+ J_+ + e^{-2s}\sigma_- J_-) \tag{2.9}$$

が $\mathrm{dom}\,(Z)$ 上で成り立つ。ここで、右辺第 2 因子の作用素は、$e^{2s}\sigma_+ J_+ + e^{-2s}\sigma_- J_-$ の相対 Z-bound が 1 より小さくなる（ここで **(H2)** を使った）のでそのまま閉である。これを利用して左辺第 1 因子の閉包の議論を行うことにより証明がなされる。

Remark 2.3 密度行列の集合 $\{\,\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{H})\,|\,\rho \geqslant 0, \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}\,\rho = 1\,\} \subset V$ は半群 $\{T^\sigma_{n,t}\}_{t\geqslant 0}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ の下で不変である。また、半群 $\{T^\sigma_{n,t}\}_{t\geqslant 0}$ は線形性により $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ 上に一意的に拡張される。

3　双対空間におけるダイナミクス

前節で与えた密度行列の時間発展を双対空間 $\mathfrak{C}_1^*(\mathscr{H}) \simeq \mathcal{L}(\mathscr{H})$ におけるダイナミクスに翻訳すると見易くなる。SCCS $\{T^\sigma_{n,t}\}_{t\geqslant 0}$ の双対 $\{T^{\sigma\,*}_{n,t}\}_{t\geqslant 0}$ は

$$\langle T^\sigma_{n,t}(\rho)\,|\,A\rangle_{\mathscr{H}} = \langle \rho\,|\,T^{\sigma\,*}_{n,t}(A)\rangle_{\mathscr{H}} \qquad \text{for} \quad (\rho, A) \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{H}) \times \mathcal{L}(\mathscr{H}) \tag{3.1}$$

で定まる。具体的な表式を得るため、A として Weyl 作用素

$$W(\zeta) = \exp\left[i\big(\langle\zeta, b\rangle + \langle b, \zeta\rangle\big)/\sqrt{2}\right] \qquad \big(\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}\big) \tag{3.2}$$

を考える。ここで、準双線形形式的表記

$$\langle\zeta, b\rangle := \sum_{j=0}^{N} \bar{\zeta}_j b_j, \qquad \langle b, \zeta\rangle := \sum_{j=0}^{N} \zeta_j b_j^* \tag{3.3}$$

を用いた。Weyl 作用素の線形結合全体の閉包として得られる $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ の部分空間を $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ とおく。（$\mathscr{H}$ 上の Weyl 代数）

以下、この節では Weyl 作用素に対する $\{T^{\sigma *}_{n,t}\}_{t\geqslant 0}$ の作用の具体的表示を与える。このため、$(N+1)\times(N+1)$ エルミート行列 J_n と X_n, Y_n を

$$(J_n)_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k=0 \ \text{or} \ j=k=n) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, \tag{3.4}$$

$$(X_n)_{jk} = \begin{cases} (E-\epsilon)/2 & (j,k)=(0,0) \\ -(E-\epsilon)/2 & (j,k)=(n,n) \\ \eta & (j,k)=(0,n) \\ \eta & (j,k)=(n,0) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, \tag{3.5}$$

$$Y_n = \epsilon I + \frac{E-\epsilon}{2} J_n + X_n \qquad (n=1,\cdots,N) \tag{3.6}$$

によって定義する。ここで、I は $(N+1)\times(N+1)$ 単位行列である。このとき、Hamiltonian (1.6) は

$$H_n = \sum_{j,k=0}^{N} (Y_n)_{jk} b_j^* b_k \,. \tag{3.7}$$

と書ける。

Theorem 3.1 $n=1,2,\ldots,N$ と $\zeta\in\mathbb{C}^{N+1}$ に対し

$$T^{\sigma *}_{n,t}(W(\zeta)) = \Gamma^{\sigma}_{n,t}(\zeta) W(U^{\sigma}_n(t)\zeta) \tag{3.8}$$

が成り立つ。ただし、

$$\Gamma^{\sigma}_{n,t}(\zeta) = \exp\Big[-\frac{1}{4}\,\frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+}\big(\langle\zeta,\zeta\rangle - \langle U^{\sigma}_n(t)\zeta, U^{\sigma}_n(t)\zeta\rangle\big)\Big], \tag{3.9}$$

$$U^{\sigma}_n(t) = \exp\Big[it\Big(Y_n + i\,\frac{\sigma_- - \sigma_+}{2} P_0\Big)\Big] \tag{3.10}$$

である。ここで P_0 は $(P_0)_{jk} = \delta_{j0}\delta_{k0}$ $(j,k=1,2,\ldots,N)$ を満たす $(N+1)\times(N+1)$ 行列とする。よって、k 区間分の時間発展は

$$T^{\sigma *}_{k\tau,0}(W(\zeta)) = \exp\Big[-\frac{\sigma_- + \sigma_+}{4(\sigma_- - \sigma_+)}\big(\langle\zeta,\zeta\rangle - \langle U^{\sigma}_1(\tau)\cdots U^{\sigma}_k(\tau)\,\zeta, U^{\sigma}_1(\tau)\cdots U^{\sigma}_k(\tau)\,\zeta\rangle\big)\Big]$$
$$\times\, W(U^{\sigma}_1(\tau)\cdots U^{\sigma}_k(\tau)\,\zeta) \tag{3.11}$$

で与えられる。ここで、*(1.14)* から $T^{\sigma *}_{k\tau,0} = T^{\sigma *}_1 T^{\sigma *}_2 \cdots T^{\sigma *}_k$ となる事に留意する。

Remark 3.2 散逸項の係数 $\sigma_\mp$ の寄与は、主に E に虚数を加えることである:

$$E \ \rightarrow\ E_\sigma := E + i\,\frac{\sigma_- - \sigma_+}{2}\,.$$

(H2) により $\mathrm{Im}(E_\sigma) > 0$ であり $\{U^{\sigma}_n(t)\}_{t\geqslant 0}$ は縮小行列の半群になる。.

この導出と $\{T^{\sigma}_{n,t}{}^{*}\}_{t\geqslant 0}$ の完全正と準自由性に関する議論については [TZ1] を参照して頂きたい。

Remark 3.3 行列 $U^{\sigma}_n(t)$ の具体的な表式は $U^{\sigma}_n(t) = e^{it\epsilon}V^{\sigma}_n(t)$ として

$$(V^{\sigma}_n(t))_{jk} = \begin{cases} g^{\sigma}(t)z^{\sigma}(t)\,\delta_{k0} + g^{\sigma}(t)w^{\sigma}(t)\,\delta_{kn} & (j=0) \\ g^{\sigma}(t)w^{\sigma}(t)\,\delta_{k0} + g^{\sigma}(t)z^{\sigma}(-t)\,\delta_{kn} & (j=n) \\ \quad \delta_{jk} & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3.12}$$

で与えられる。ここで、

$$g^{\sigma}(t) := e^{it(E_{\sigma}-\epsilon)/2}, \qquad w^{\sigma}(t) := \frac{2i\eta}{\sqrt{(E_{\sigma}-\epsilon)^2+4\eta^2}}\sin t\sqrt{\frac{(E_{\sigma}-\epsilon)^2}{4}+\eta^2}\,, \tag{3.13}$$

$$z^{\sigma}(t) := \cos t\sqrt{\frac{(E_{\sigma}-\epsilon)^2}{4}+\eta^2} + \frac{i(E_{\sigma}-\epsilon)}{\sqrt{(E_{\sigma}-\epsilon)^2+4\eta^2}}\sin t\sqrt{\frac{(E_{\sigma}-\epsilon)^2}{4}+\eta^2}\,. \tag{3.14}$$

とおいた。なお、関係式 $z^{\sigma}(t)z^{\sigma}(-t) - w^{\sigma}(t)^2 = 1$ が条件 $\sigma_{\pm} \geqslant 0$ の下で成立し、$|g^{\sigma}(t)|^2(|z^{\sigma}(t)|^2 + |w^{\sigma}(t)|^2) < 1$ 及び $z^{\sigma}(-t) \neq \overline{z^{\sigma}(t)}$ が、$0 \leqslant \sigma_+ < \sigma_-$ の下で成立する。

以後、下記の省略表現を用いる：

$$g^{\sigma} = g^{\sigma}(\tau)\,,\ w^{\sigma} := w^{\sigma}(\tau)\,,\ z^{\sigma} = z^{\sigma}(\tau)\,,\ \ U^{\sigma}_n := U^{\sigma}_n(\tau)\,,\ V^{\sigma}_n := V^{\sigma}_n(\tau)\,. \tag{3.15}$$

4　部分系の漸近挙動

互いに相関が無く等しい状態にある多くの原子から成る列が一つづつ次々と空洞内での電磁場（空洞輻射）と相互作用をして通過してゆく様な状況を考える。空洞内での相互作用を通じて、空洞通過後の原子は互いに相関を持つようになり、空洞内の電磁場の状態も、通過した原子と相関をもつようになる。しかし、長時間がたち多くの原子が空洞を通過していった後は、空洞輻射は実質的に空洞を通過して間もない原子とのみ相関を持ち、それらの状態は安定する事が期待される。原子は次々と空洞を通過していくので、ここでいう安定は、統計力学での大正準集団の様に、ミクロな粒子の交換をしながらもマクロな状態としては変化しないもの（動的平衡）のモデルとみなせる。この節では、この状況を見たい。

そのため、初期状態（を表す密度行列）$\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ を直積状態

$$\rho = \bigotimes_{k=0}^{N} \rho_k \qquad (\rho_k \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{H}) \quad k = 0, 1, \cdots, N) \tag{4.1}$$

とし、初期の原子状態を等しくおく：$\rho_1 = \cdots = \rho_N$. その時間発展は $\rho(t) = T^{\sigma}_{t,0}(\rho)$ (1.14), Theorem 2.2 で与えられる。

時刻 $t=k\tau\ (1\ll k<N)$ において、空洞 $\mathcal{S}$ と原子列 $\mathcal{C}=\mathcal{S}_1+\cdots+\mathcal{S}_N$ は

$$\mathcal{S}_N,\ldots,\mathcal{S}_{k+1},\,\mathcal{S},\,\mathcal{S}_k,\ldots,\mathcal{S}_{k-n+1},\,\mathcal{S}_{k-n},\ldots,\mathcal{S}_1\ . \tag{4.2}$$

の様に並んでいる。空洞 $\mathcal{S}$ と空洞を通過したばかりの n 個の原子 $\mathcal{S}_k,\ldots,\mathcal{S}_{k-n+1}$ をひとまとめにしてマクロな物体と考え、それを $\mathcal{S}_{\sim n}$ と書く事にする。$k\in\mathbb{N}$ が変わるとこの物体の構成粒子は入れ変わるが物体 $\mathcal{S}_{\sim n}$ の位置は空洞とその右の原子 n 個分の位置の所に止まったままである。或いは、空洞とその右にある長さ n 単位の窓から見える部分を観察していると考えても良い。

時刻 $t=k\tau$ において、この物体をなす部分（或いは窓から見える部分）$\mathcal{S}_{n,k}$ とそれ以外の部分 $\mathcal{C}_{n,k}$ に分割する：

$$\mathcal{S}_{n,k}=\mathcal{S}+\mathcal{S}_k+\mathcal{S}_{k-1}+\ldots+\mathcal{S}_{k-n+1}, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{C}_{n,k}=\mathcal{S}_N+\ldots+\mathcal{S}_{k+1}\quad+\mathcal{S}_{k-n}+\cdots+\mathcal{S}_1. \tag{4.4}$$

$\mathcal{S}_{\sim n}$ の時刻 $t=k\tau$ での状態を表すため、Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ を上の分割に対応して、２つの Hilbert 空間のテンソル積に分解する。

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_{\mathcal{S}_{n,k}}\bigotimes\mathscr{H}_{\mathcal{C}_{n,k}}\,.$$

ここで、

$$\mathscr{H}_{\mathcal{S}_{n,k}}=\mathscr{H}_0\bigotimes\Big(\bigotimes_{j=k-n+1}^{k}\mathscr{H}_j\Big),\qquad \mathscr{H}_{\mathcal{C}_{n,k}}=\mathscr{H}_{c_1}\bigotimes\mathscr{H}_{c_2}\,, \tag{4.5}$$

$$\mathscr{H}_{c_1}=\bigotimes_{j=1}^{k-n}\mathscr{H}_j\,,\quad \mathscr{H}_{c_2}=\bigotimes_{l=k+1}^{N}\mathscr{H}_l\,.$$

とした。今、全体 $\mathcal{S}_{n,k}+\mathcal{C}_{n,k}$ の密度行列が $\rho(t)$ であるので、部分系 $\mathcal{S}_{\sim n}$ を記述する縮約密度行列は部分トレース

$$\rho_{\mathcal{S}_{\sim n}}(k\tau)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_{\mathcal{C}_{n,k}}}(T^{\sigma}_{k\tau,0}\,\rho)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_{c_1}}\big(\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_{c_2}}(T^{\sigma}_{k\tau,0}\,\rho)\big)\ , \tag{4.6}$$

で与えられる。ここで、$\rho_{\mathcal{S}_{\sim n}}(k\tau)$ は空間 $\mathscr{H}_{\mathcal{S}_{n,k}}$ 上の密度行列であり、この空間は k が変わると別のものになるが、$\mathcal{S}_{\sim n}$ を一つの物体と考えたいので、$\rho_{\mathcal{S}_{\sim n}}(k\tau)$ が作用する空間も k に依らず一定のものと考えたい。そこで、全ての k に対して $\mathscr{H}_{\mathcal{S}_{n,k}}$ を $\mathscr{F}^{\otimes(n+1)}$ と同一視する。その同一視は、$t=k\tau$ のときの $\mathscr{H}_{\mathcal{S}_{n,k}}$ の成分の $\mathscr{H}_0$ や $\mathscr{H}_{k-l}$ が、$t=k'\tau$ のときの $\mathscr{H}_{\mathcal{S}_{n,k'}}$ の成分 $\mathscr{H}_0$ や $\mathscr{H}_{k'-l}$ にそれぞれ対応する様に行う。本稿ではこのあたりの具体的構成を述べないが、部分トレースをとる操作 (4.6) とこの同一視を合成した操作を、$R_{n,k}$ で表し、改めて、

$$\rho_{\mathcal{S}_{\sim n}}(k\tau)=R_{n,k}T^{\sigma}_{k\tau,0}\,\rho \tag{4.7}$$

によって $\mathcal{S}_{\sim n}$ の状態（を表す密度行列）の時間発展を定義し直す。また、$\mathscr{F}$ 上の自由発展を

$$\mathcal{T}\rho_1=e^{-i\epsilon\tau a^*a}\rho_1 e^{i\epsilon\tau a^*a} \tag{4.8}$$

として、導入する。ここで、$\rho_1 \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{F})$ である。これは、原子が空洞の外にいるときの時間発展を取り出したものになっている。(1.6)　また、$\mathscr{F}$ 上の Weyl 作用素を $\hat{w}(\theta) := \exp[i(\bar{\theta}a + \theta a^*)/\sqrt{2}]$　$(\theta \in \mathbb{C})$ と書くことにする。

以上の準備の下で、部分系の漸近挙動に関する結果を述べる事が出来る。
まず、$n = 0$ の場合。この時、$\mathcal{S}_{\sim n} = \mathcal{S}$ であり、条件 **(H1)**, **(H2)** に加えて
(4.1) における密度行列 ρ_1 が次の条件：

(H)　$D(\theta) = \prod_{l=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{\mathscr{F}}[\rho_1 \hat{w}((g^\sigma z^\sigma)^l \theta)]$　が、全ての　$\theta \in \mathbb{C}$　に対し収束し
写像　$\mathbb{R} \ni t \mapsto D(t\theta) \in \mathbb{C}$　が連続になる。

を満たす時、次の定理が成立する。

Theorem 4.1 $\mathscr{F}$ 上の密度行列 ρ_* で、$R_{0,1}T_1^{\sigma(1)}(\rho_* \otimes \rho_1) = \mathcal{T}\rho_*$ を満たすものが唯一存在し、それは次の性質をもつ。

(1)　$\omega_{\rho_*}(\hat{w}(\theta)) = \exp\Big[- \dfrac{|\theta|^2}{4} \dfrac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \Big(1 - \dfrac{|g^\sigma w^\sigma|^2}{1 - |g^\sigma z^\sigma|^2} \Big) \Big] D(g^\sigma w^\sigma \theta)$;

(2)　$R_{0,k}T_{k\tau,0}^{\sigma(k)}(\rho_* \otimes \rho_1^{\otimes k}) = \mathcal{T}^k \rho_*$ *for* $k > 1$;

(3)　任意の $\mathscr{F}$ 上の密度行列 ρ_0 に対し、

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{T}^{-k} R_{0,k} T_{k\tau,0}^{\sigma(k)}(\rho_0 \otimes \rho_1^{\otimes k}) = \rho_*$$

が、$\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 上の線形汎関数としての汎弱収束の意味で成立する。

Remark 4.2 つまり $\mathcal{S}$ の状態は、漸近的に $\mathcal{T}$ の下で自由発展する。これは、強制振動の類の現象だと解釈できる。ここで、$T_{k\tau,0}^{\sigma(k)}$ は $N = k$ とした時の *(1.14)* を意味する。

同じ条件の下で、$n > 0$ の場合の次の結果が得られる。

Theorem 4.3

$$\lim_{k\to\infty} (\mathcal{T}^{-k})^{\otimes(n+1)} \rho_{\mathcal{S}_{\sim n}}((n+k)\tau) = T_{n\tau,0}^{\sigma(n)}(\rho_* \otimes \rho_1^{\otimes n}) \tag{4.9}$$

が、$\mathscr{A}(\mathscr{F}^{\otimes(n+1)})$ 上の線形汎関数としての汎弱収束の意味で成立する。

Remark 4.4 ここもやはり、漸近的に $\mathcal{T}$ に関する自由発展になっている。さらに、$\mathcal{S}_{\sim n}$ の外の原子（$t = k\tau$ なら $\mathcal{S}_{k-n}$）との相関の影響が消える事が興味深い。また、本研究では離散時間 $t = k\tau$ $(k = 1, 2, \cdots)$ における部分系の状態のみを見ているが、連続時間 t に対して $\rho_{\mathcal{S}_{\sim n}}(t)$ は $\mathcal{T}$-自由な運動の周りに周期 τ で振動するような漸近挙動になるものと予想される。

参考文献

[AF] R. Alicki and M. Fannes, *Quantum Dynamical Systems*, Oxford University Press 2001.

[AJP1] *Open Quantum Systems I, The Hamiltonian Approach*, S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (Eds.), Lecture Notes in Mathematics **1880**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2006.

[AJP2] *Open Quantum Systems II, The Markovian Approach*, S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (Eds.), Lecture Notes in Mathematics **1881**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2006.

[AJP3] *Open Quantum Systems III, Recent Developments*, S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (Eds.), Lecture Notes in Mathematics **1882**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2006.

[BR1] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vol.1, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[ChF] A. M. Chebotarev and F. Fagnola, Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups, *J. Funct. Anal.* 118 (1993), 131-153 and Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups, *J. Funct. Anal.* 153 (1998), 382-404

[Da1] E.B.Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London 1976.

[Da2] E.B.Davies, Quantum dynamical semigroups and the neutron diffusion equation, *Rep.Math.Phys.*, **11** (1977) 169-188.

[Ka1] T. Kato, On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **6** (1954) 1-15.

[Ka2] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, (Corrected 2nd Edt) Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1995.

[NVZ] B. Nachtergaele, A. Vershynina, and V. A. Zagrebnov, Non-Equilibrium States of a Photon Cavity Pumped by an Atomic Beam, *Annales Henri Poincaré*, **15** (2014), 213-262.

[TZ] H.Tamura and V. A. Zagrebnov, Exactly soluble quantum model for repeated harmonic perturbation, J. Stat. Mech. (2015) P10005, DOI http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2015/10/P10005

[TZ1] Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov: Dynamical semigroup for unbounded repeated perturbation of an open system, J. Math. Phys. **57**(2), 023519(2016)

[TZ2] Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov: Dynamics of an Open System for Repeated Harmonic Perturbation, to appear in J. Stat. Phys.

[Za] V.A. Zagrebnov, *Topics in the Theory of Gibbs Semigroups*, KU Leuven University Press, Leuven 2003.