

Fröhlich 模型における相関不等式

宮尾 忠宏
北海道大学理学部数学科

1 導入

$L \in \mathbb{N}$ とする. 一辺の長さが L の超立方格子 $\Lambda = [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$ を考える. Λ の各格子点にはスピンのあり, 互いに相互作用しているとする. スピン配位 $\sigma \in \{\sigma_x\}_{x \in \Lambda} \in \{\pm 1\}^\Lambda$ が与えられたとき, 相互作用系の取るエネルギーは

$$H(\sigma) = - \sum_{x, y \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y \tag{1.1}$$

で与えられるとしよう. この模型は強磁性の起源を探るために, Lenz により導入され [12], その研究を手伝った博士課程の学生 E. Ising に因んで, 今日では, イジング模型と呼ばれる. イジング模型は, 臨界現象の研究において重要な役割を演じてきた.

Griffiths はイジング模型の厳密解析において, 熱期待値に関する有名な不等式を発見した [7, 8, 9, 10]. その不等式は Kelly と Sherman により, 次のような形に洗練化された [11]: $A \subset \Lambda$ とする. A 上のスピン変数 $\sigma_A = \prod_{x \in A} \sigma_x$ の熱期待値を

$$\langle \sigma_A \rangle = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^\Lambda} \sigma_A e^{-\beta H(\sigma)} / Z_\beta, \quad Z_\beta = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^\Lambda} e^{-\beta H(\sigma)} \tag{1.2}$$

で定義する. Griffiths の不等式とは (主に) 次の二つを指す:

- 第1不等式: $\langle \sigma_A \rangle \geq 0$.
- 第2不等式: $\langle \sigma_A \sigma_B \rangle \geq \langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle$.

今日, Griffiths の不等式は, イジング模型の厳密解析においてなくてはならない基本的な不等式である [10]. この事実から, これらの不等式はイジング模型における相関概念の本質を表していると考えられる. 従って, 他の模型においても Griffiths の不等式が成立するかどうかを調べることは, 相関という概念の模型に依らない性質を把握する試みと言い換えることができるだろう. このような研究の重要な一歩は, Ginibre によりなされた [6]. 彼は, Griffiths の不等式の大枠を構成した. この枠組みはこれまでに広く知られており, 古典的 rotor 模型における Griffiths の不等式の構成の際などに応用された [21]. しかしながら, 量子模型において Griffiths の不等式が成立するかどうかは, よくわかっていなかった.

最近, 著者は Griffiths の不等式を作用素不等式の観点から研究し, 様々な量子模型においても Griffiths の不等式が成立していることを明らかにした [17]. 例えば, Hubbard 模型における有名な Lieb の定理や [13, 18, 23, 25], 相転移の厳密理論における強力な手法である鏡映正値性は [2, 4], 作用素論的相関不等式の理論の視点から見ると Griffiths の不等式と見なすことができる. このように作用素論的相関不等式の理論は, モデルに依らない普遍的な相関構造を記述できる.

元来、この作用素論的相関不等式の理論は、非可換 Perron-Frobenius の定理の研究の中で発展してきた [3, 14, 15, 16]. このことからわかるのは、Griffiths の不等式が成立する理由と、作用素の最大固有値に関する Perron-Frobenius の定理は、根源的なところで繋がっているということである。一方で、Perron-Frobenius の定理の数理解物理学における有用性については、疑問の余地がない。この定理は様々な模型、様々な状況のもとで使用されてきた。このことから、著者の提唱する相関不等式の理論は、これまでに発見されていない新しい相関構造を見つけることができるかもしれない。この統一的反ジョンの実現に向けたささやかな一歩として、このノートでは、Fröhlich 模型における相関不等式一つを報告する。その他の相関不等式や証明の詳細、及び物理的な応用については [19, 20] を参照してほしい。

謝辞：本研究は KAKENHI(20554421) と KAKENHI(16H03942) の助成を受けたものです。

2 結果

Fröhlich 模型は、粒子とボーズ場の相互作用を記述する基本的な模型の一つである。このノートでは、2 粒子系を考えることにする。系のハミルトニアンは次で与えられる：

$$\begin{aligned}
 H = & -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - W(x_1) - W(x_2) + uV(x_1 - x_2) \\
 & - g_1 \int_{\mathbb{R}^3} dk \lambda(k) (e^{ik \cdot x_1} a(k) + e^{-ik \cdot x_1} a(k)^*) \\
 & - g_2 \int_{\mathbb{R}^3} dk \lambda(k) (e^{ik \cdot x_2} a(k) + e^{-ik \cdot x_2} a(k)^*) \\
 & + \int_{\mathbb{R}^3} dk \omega(k) a(k)^* a(k).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで、 V は次で与えられる：

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\lambda(k)^2}{\omega(k)} e^{-ik \cdot x}. \tag{2.4}$$

また、ボゾンの分散関係 ω は $\omega(k) = \omega_0$ または、 $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ とする。もちろん、より一般の ω でも本稿の結果は成立する。

$a(k)^*$ と $a(k)$ は、ボーズ場の生成・消滅作用素であり、形式的には次の交換関係を満たす：

$$[a(k), a(k')^*] = \delta(k - k').$$

次の仮定を設ける：

- $\lambda(k)$ は実数値関数である¹；
- $\omega^{-1}\lambda, \omega^{-1/2}\lambda \in L^2(\mathbb{R}^3; dk)$ ；
- $W \in L^2(\mathbb{R}^3; dx) + L^\infty(\mathbb{R}^3; dx)$.

¹この仮定は除くことができるが、ここでは簡単化のためにこの条件を導入しておく。

H はヒルベルト空間

$$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; dx_1 dx_2) \otimes \mathfrak{F} \quad (2.5)$$

に作用する, 下に有界な自己共役作用素である. ここで, \mathfrak{F} は $L^2(\mathbb{R}^3; dk)$ 上のボゾン・フォック空間であり,

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{n \geq 0} \otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3; dk) \quad (2.6)$$

で与えられる. 記号 \otimes_s^n は n 重対称テンソル積を意味する.

H のスペクトルを $\sigma(H)$ とする. また, $E = \inf \sigma(H)$ としよう.

Definition 2.1 E が H の固有値になっている場合を考える. E に対応する固有ベクトルを, H の基底状態という. 基底状態は Perron-Frobenius の定理 [22] より, ただ一つである. そこで, 基底状態を ψ とすると, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ の基底状態期待値を

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A \psi \rangle \quad (2.7)$$

で定義する. \diamond

Remark 2.2 基底状態の存在については, これまでに多くの研究がなされてきた. 本稿では基底状態の存在については議論しない. 興味のある読者は, 例えば [1, 5, 24] 及び, それらの中の文献を参照してほしい. \diamond

Theorem 2.3 $g_1 = -g_2$, $\mu - 2g_1 g_2 < 0$ の場合を考える. $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ とする. H が基底状態を持つとき, 次の相関不等式が成立する:

- $\langle f(x_1) f^*(x_2) \rangle \geq 0$.
- $\langle f(-i\nabla_{x_1}) f^*(+i\nabla_{x_2}) \rangle \geq 0$.

他にもいくつかの相関不等式が成り立つ. これらを応用することにより, 基底状態密度の運動分布の情報を解析することができる. この詳細は [19, 20] に譲る.

References

- [1] A. Arai, M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *Jour. Funct. Anal.* 151 (1997), 455-503.
- [2] F. J. Dyson, E. H. Lieb, B. Simon, Phase transitions in quantum spin systems with isotropic and nonisotropic interactions. *J. Stat. Phys.* 18 (1978), 335-383.
- [3] W. G. Faris, Invariant cones and uniqueness of the ground state for fermion systems. *Jour. Math. Phys.* 13 (1972), 1285-1290.
- [4] J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon, Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long range lattice models. *Comm. Math. Phys.* 62 (1978), 1-34.
- [5] C. Gerard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré* 1 (2000), 443-459.

- [6] J. Ginibre, General formulation of Griffiths' inequalities. *Comm. Math. Phys.* 16 (1970), 310-328.
- [7] R. B. Griffiths, Correlations in Ising ferromagnets. I, *Jour. Math. Phys.* 8 (1967), 484-488.
- [8] R. B. Griffiths, Correlations in Ising ferromagnets. II, *Jour. Math. Phys.* 8 (1967), 478-483.
- [9] R. B. Griffiths, Rigorous results for Ising ferromagnets of arbitrary spin, *Jour. Math. Phys.* 10 (1969), 1559-1565.
- [10] R. B. Griffiths, Rigorous results and theorems. In C. Domb, M. S. Green, editors: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol.1, 7-109, (1972).
- [11] D. G. Kelly, S. Sherman, General Griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets. *Jour. Math. Phys.* 9 (1968), 466-484.
- [12] W. Lenz, Beitrag zum verständnis der magnetischen Erscheinungen in festen körnern, *Phys. Zeitschr.* 21 (1920), 613-615.
- [13] E. H. Lieb, Two theorems on the Hubbard model. *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989), 1201-1204.
- [14] T. Miyao, Nondegeneracy of ground states in nonrelativistic quantum field theory. *J. Operator Theory* 64 (2010), 207-241.
- [15] T. Miyao, Monotonicity of the polaron energy II: General theory of operator monotonicity, *Jour. Stat. Phys.* 153 (2013), 70-92.
- [16] T. Miyao, Monotonicity of the polaron energy, *Rep. Math. Phys.* 74 (2014), 379-398.
- [17] T. Miyao, Quantum Griffiths inequalities. *Jour. Stat. Phys.* 164 (2016), 255-303.
- [18] T. Miyao, Rigorous results concerning the Holstein-Hubbard model. To appear in *Ann. Henri Poincaré*, arXiv:1402.5202.
- [19] T. Miyao, Correlation inequalities in Schrodinger operators, in preparation.
- [20] T. Miyao, Correlation inequalities in nonrelativistic quantum field theory, in preparation.
- [21] J. K. Percus, Correlation inequalities for Ising spin lattices. *Comm. Math. Phys.* 40 (1975), 283-308.
- [22] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. IV*, Academic Press, New York, 1978.
- [23] S. H. Shen, Strongly correlated electron systems: Spin-reflection positivity and some rigorous results. *Int. J. Mod. Phys. B* 12 (1998), 709.
- [24] H. Spohn, Ground state of a quantum particle coupled to a scalar Bose field. *Lett. Math. Phys.* 44 (1998), 9-16.

- [25] G-S. Tian, Lieb's spin-reflection positivity methods and its applications to strongly correlated electron systems. *Jour. Stat. Phys.* 116 (2004), 629-680.