数理解析研究所講究録
第2011巻 2016年 36-41

強擬非拡大写像について

千葉大学・法政経学部 青山 耕治
Koji Aoyama
Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. 強擬非拡大写像, 擬非拡大写像, 不動点。

概要

本稿では, 強擬非拡大写像のもつ基本性質やその特徴付けに関する結果を述べる。

1 はじめに

(X,d) を距離空間とする. 写像 $T\colon X\to X$ が Bruck [8] の意味で強擬非拡大であるとは, T の任意の不動点 z と任意の $\epsilon>0$ に対して, $\delta>0$ が存在し,

$$x\in X,\ d(z,x)-d(z,Tx)<\delta\Rightarrow d(Tx,x)<\epsilon$$

が成り立つときをいう。この強擬非拡大性は, 文献 [9] における強非拡大性に類似のものである。しかし, Hilbert 空間上の閉凸集合の上への距離射影は, 文献 [9] の意味で強非拡大であるが, Bruck [8] の意味で強擬非拡大にならない (詳しくは, 例 4.2 参照)。

一方, 文献 [4–6] において, 別の強擬非拡大性をもつ写像が扱われている。H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合とする。写像 $T\colon C\to H$ が文献 [4] の意味で強擬非拡大であるとは, T が擬非拡大であり, $\{x_n\}$ が C の有界点列で, ある T の不動点 p に対して $\|x_n-p\|-\|Tx_n-p\|\to 0$ であるならば, $\|Tx_n-x_n\|\to 0$ が成り立つときをいう。ここで, $\|\cdot\|$ は H のノルムである。この強擬非拡大性も文献 [9] の強非拡大性に類似の概念で, Hilbert 空間上の距離射影は, 文献 [4] の意味で強擬非拡大である (詳しくは, 例 4.1 参照)。

本稿では, これらの強擬非拡大写像に関する考察を述べる。特に, 距離空間または Banach 空間において強擬非拡大写像のもつ性質やその特徴付けに関する結果を扱う。

2 準備

以下, X を距離空間, d を X の距離, Y を X の部分集合とし, 写像 $T\colon Y\to X$ の不動点 (fixed point) の集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す。つまり, $\mathrm{F}(T)=\{z\in Y: z=Tz\}$ であ

る。写像 $T\colon Y \to X$ が擬非拡大 (quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T)$ が空ではなく, 任意の $z \in \mathrm{F}(T)$ と $x \in Y$ に対して, $d(z, Tx) \leq d(z, x)$ が成り立つときをいう。写像 $T\colon Y \to X$ が狭義擬非拡大 (strictly quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T)$ が空ではなく, 任意の $z \in \mathrm{F}(T)$ と $x \in Y \setminus \mathrm{F}(T)$ に対して, $d(z, Tx) < d(z, x)$ が成り立つときをいう。

以下, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E のノルム, C を E の部分集合, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。写像 $T\colon C \to E$ の不動点の集合を再び $\mathrm{F}(T)$ で表す。写像 $T\colon C \to E$ が非拡大 (nonexpansive) であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。写像 $T\colon C \to E$ が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, 任意の $x, y \in C$ と $\alpha > 0$ に対して,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(Tx - Ty)\| \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう [7]。写像 $T\colon C \to E$ が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, T が非拡大であり,

$$\begin{gathered}\{x_n\}, \{y_n\} \text{ が } C \text{ の点列}, \{x_n - y_n\} \text{ が有界}, \|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0 \\ \text{ならば } \|x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n)\| \to 0\end{gathered}$$

が成り立つときをいう [9]。定義より, 堅非拡大写像は非拡大であることがわかる。また, E が一様凸のとき, 堅非拡大写像は強非拡大であることが知られている [9, Proposition 2.1]。

以下, H を実 Hilbert 空間, D を H の閉凸部分集合とする。このとき, 各 $x \in H$ に対して, $\|z - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in D\}$ となる点 $z \in D$ がただ一つ存在することが知られている。x にその z を対応させる写像を, H から D の上への距離射影 (metric projection) という。T を H から D の上への距離射影とするとき, すべての $x \in H$ と $z \in D = \mathrm{F}(T)$ に対して,

$$\|Tx - x\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|Tx - z\|^2 \tag{2.2}$$

が成り立つことが知られている。このことから, 距離射影が擬非拡大であることもわかる。なお, 距離射影は堅非拡大であることも知られている。距離射影について詳しくは, [11] を参照するとよい。

3 距離空間上の強擬非拡大写像

この節では, X を距離空間, d を X の距離, C を X の空でない部分集合とする。

[4–6, 8] などの先行研究を参考にして, 強擬非拡大写像を次のように定義する。写像 $T\colon C \to X$ が強擬非拡大 (strongly quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T)$ が空ではなく, 任意の $z \in \mathrm{F}(T)$, $M > 0$ および $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in C,\ d(z,x) \leq M,\ d(z,x) - d(z,Tx) < \delta \Rightarrow d(Tx,x) < \epsilon \tag{3.1}$$

が成り立つときをいう。定義より, 1 節で述べた Bruck [8] の意味で強擬非拡大な写像は, 強擬非拡大である。また, 強擬非拡大写像は, 狭義擬非拡大であることもすぐにわかる。

強擬非拡大写像の定義を点列で表すことができる。

補助定理 3.1 ([1, Lemma 3.3]). 次は同値である。

(1) $T\colon C \to X$ は強擬非拡大である;
(2) T は擬非拡大であり, $\{x_n\}$ が C の有界点列で, ある $z \in \mathrm{F}(T)$ に対して $d(z,x_n) - d(z,Tx_n) \to 0$ のとき, $d(Tx_n,x_n) \to 0$ となる。

文献 [4] では, X が Hilbert 空間のとき, 上記の (2) を満たす写像を強擬非拡大と呼んでいる。これと似た写像が, [5,6] および [2,10] で議論されている。

強非拡大写像は合成で閉じていることが知られているが [9, Proposition 1.1], 強擬非拡大写像についても同様な結果が得られる。

定理 3.2 ([1, Theorem 3.6]). C と D を空でない X の部分集合, $S\colon C \to E$ と $T\colon D \to E$ を強擬非拡大写像とし, $T(D) \subset C$ および $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を仮定する。このとき, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) = \mathrm{F}(ST)$ であり, ST は強擬非拡大である。

定理 3.2 の $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) = \mathrm{F}(ST)$ を得るだけならば, 「S と T が強擬非拡大である」という仮定を, 「S が狭義擬非拡大かつ T が擬非拡大 (または, その逆)」に弱められる [1, Lemma 3.5]。

強擬非拡大性は, 非減少関数によっても特徴付けられる。

定理 3.3 ([1, Theorem 3.7]). T を C から X への不動点を持つ写像とする。このとき, 以下は同値である。

(1) T は強擬非拡大である;
(2) 任意の $z \in \mathrm{F}(T)$ および $M > 0$ に対して, 以下の条件を満たす非減少関数 $\gamma\colon [0,2M] \to [0,M]$ が存する。
   - $t \in (0,2M]$ のとき, $\gamma(t) > 0$ であり;
   - $x \in C$, $d(z,x) \leq M$ のとき, $\gamma\big(d(Tx,x)\big) \leq d(z,x) - d(z,Tx)$ となる。

なお, Banach 空間上の強非拡大写像についても, 上記の (2) と似た特徴付けが行えることが, 文献 [9] で指摘されている。

4 Banach 空間上の強擬非拡大写像

本節では, E を Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E のノルム, C を E の空でない部分集合, T を C から E への写像とし, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を仮定する。

まず, 前節で定義した強擬非拡大性と文献 [8] のそれとの違いを見るために, 定義を再確認する。写像 $T\colon C \to E$ が Bruck [8] の意味で強擬非拡大であるとは, 任意の $z \in \mathrm{F}(T)$ と $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in C,\ \|x - z\| - \|Tx - z\| < \delta \Rightarrow \|x - Tx\| < \epsilon$$

が成り立つときをいう。写像 $T\colon C \to E$ が強擬非拡大であるとは, 任意の $z \in \mathrm{F}(T)$, $M > 0$ および $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in C,\ \|x - z\| \le M,\ \|x - z\| - \|Tx - z\| < \delta \Rightarrow \|x - Tx\| < \epsilon$$

が成り立つときをいう。

定義から, Bruck [8] の意味で強擬非拡大ならば強擬非拡大であることがわかる。しかし, その逆は成り立たない。

例 4.1. E を Hilbert 空間, D を E の閉凸部分集合, T を E から D の上への距離射影とするとき, T は強擬非拡大である。実際, $z \in \mathrm{F}(T)$, $M > 0$, $\epsilon > 0$ を所与とし, $\delta = \epsilon^2/(2M)$ とおく。このとき, $x \in C$, $\|x - z\| \le M$, $\|x - z\| - \|Tx - z\| < \delta$ ならば, T が擬非拡大であることと (2.2) より,

$$\begin{aligned}\|Tx - x\|^2 &\le \big(\|x - z\| + \|Tx - z\|\big)\big(\|x - z\| - \|Tx - z\|\big)\\ &\le 2\,\|x - z\|\,\big(\|x - z\| - \|Tx - z\|\big)\\ &< 2M\delta = \epsilon\end{aligned}$$

を得る。したがって, T は強擬非拡大である[*1]。

例 4.2 ([1, Example 4.1]). E を 2 次元ユークリッド空間とし, 写像 $T\colon E \to E$ を, $(s,t) \in E$ に対して $T(s,t) = (s,0)$ で定義する。また, E の点列 $\{x_n\}$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対し

*1 (2.2) を満たす写像は, すべて強擬非拡大になる。

て $x_n = (n, 1+1/n)$ で定義する。このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|x_n\| - \|Tx_n\| = \sqrt{n^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2} - n \leq \frac{2}{n} \text{ および } \|x_n - T_n\| = 1 + \frac{1}{n}$$

が成り立つことがわかる。よって, T は Bruck [8] の意味で強擬非拡大にならない。しかし, T は E から $\{(s,0) \in E : s \in \mathbb{R}\}$ の上への距離射影であるから, 例 4.1 より T は強擬非拡大である。

次の定理より, 強擬非拡大写像と擬非拡大写像の凸結合は, 強擬非拡大になることがわかる。これと類似の結果として, [6, Theorem 3.7] および [9, Proposition 1.3] がある。

定理 4.3 ([1, Theorem 4.3]). *E を一様凸な Banach 空間, C を E の空でない部分集合とし, $S\colon C \to E$ を強擬非拡大写像, $T\colon C \to E$ を擬非拡大写像とする。写像 $U\colon C \to E$ を, $U = \lambda S + (1-\lambda)T$ で定義する。ここで, $\lambda \in (0,1)$ である。さらに, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T)$ が空ではないと仮定する。このとき, $\mathrm{F}(U) = \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T)$ であり, U は強擬非拡大である。*

定理 4.3 の $\mathrm{F}(U) = \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T)$ を得るだけならば, 「S が強擬非拡大である」という仮定を, 「S が狭義擬非拡大である」に弱められる [1, Lemma 4.2]。

恒等写像は, 明らかに強擬非拡大であるから, 定理 4.3 より, 次の系が直ちに得られる。

系 4.4 ([1, Corollary 4.4]). *E, C, T, λ を定理 4.3 と同じとする。写像 $U\colon C \to E$ を, $U = \lambda I + (1-\lambda)T$ で定義する。ここで, I は C 上の恒等写像である。このとき, $\mathrm{F}(U) = \mathrm{F}(T)$ であり, U は強擬非拡大である。*

これより, 所与の擬非拡大写像から, 不動点集合が一致する強擬非拡大写像を容易に作り出せることがわかる。

参考文献

[1] K. Aoyama, *Strongly quasinonexpansive mappings*, The Proceeding of The Ninth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publ., Yokohama, to appear.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[3] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[4] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[5] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[6] ———, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[7] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[8] R. E. Bruck, *Random products of contractions in metric and Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 319–332.

[9] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[10] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[11] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.