数理解析研究所講究録
第2011巻 2016年 78-82

On convergence of the methods for the best approximation problem

秋田県立大学 システム科学技術学部 * 松下 慎也 †(Shin-ya Matsushita)
徐 粒 (Li Xu)
Department of Electronics and Information Systems
Akita Prefectural University

1 はじめに

本論文では、与えられた点 x_0 から最も近い集合の共通部分の点を見つける問題 (最良近似問題) を考える:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|u-x_0\| \\ \text{subject to} & u \in \mathrm{int}C\cap D, \end{array} \tag{1.1}$$

ただし、C は Hilbert 空間 H の閉凸錐、int$C$ は集合 C の内点全体の集合、D は H の閉凸集合とする。本論文を通して以下の条件を仮定する

$$\mathrm{int}C\cap D\neq\emptyset. \tag{1.2}$$

int$C$ は開集合であるため、問題 (1.1) の一意解の存在は保証されない。そこで本研究では、問題 (1.1) の近似解を見つけることを考える。問題 (1.1) は、工学の分野で現れる行列近似問題などを表現できることが知られている ([6, 9] 参照)。ここで、任意の $x\in H$ に対して

$$\|x-x_0\|=\min_{y\in D}\|x-y\|$$

を満たす D の点 x_0 が一意に存在する。H から D の上への距離射影 $P_D:H\to D$ を $P_D(x)=x_0$ と定義する ([10, 11, 2] 参照)。

最良近似問題を解決する求解法として射影法が考案されている。射影法は von Neumann [13] によって研究され、次のような結果が得られている。

定理 1.1 (von Neumann [13]) C と D を H の閉部分空間とする。点列 $\{x_n\}$ を以下の方法で生成する。

$$x_0\in H,\quad x_{n+1}=P_DP_C(x_n)\quad (n=0,1,2,\dots). \tag{1.3}$$

このとき、$\{x_n\}$ は $P_{C\cap D}(x_0)$ に強収束する。

* 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4
† e-mail: matsushita@akita-pu.ac.jp home page: http://web.sc.eis.akita-pu.ac.jp/~matsushita/

Bregman [4] は集合 C と D が閉凸集合のとき、$\{x_n\}$ が $C \cap D$ の点に弱収束することを証明している。しかし、C と D が閉凸集合の場合、点列 $\{x_n\}$ の収束先が $P_{C\cap D}(x_0)$ であることは保障されていない。

一方、射影法の有限収束を保障するため、次のような射影法の変形が提案されている。

$$x_0 \in H, \quad x_{n+1} = P_{e+C}P_D(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1.4}$$

ここで、$e \in \mathrm{int}C$ とする。Rami、Helmke と Moore [8] は (1.4) から生成される点列 $\{x_n\}$ が $\mathrm{int}C \cap D$ に含まれる点に有限回の繰り返しで到達することを示している。

本研究では Rami、Helmke と Moore 等の研究に動機づけられて、Bauschke、Combettes と Luke [3] による最良近似問題を解決するための解法に注目し、求解法の提案および提案した方法から生成した点列が (1.1) の近似解に有限回の繰り返しで到達することを示す。

2 準備

本論文を通して H を実 Hilbert 空間とし、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ と $\| \cdot \|$ をそれぞれ H の内積とノルムとする。集合 A と集合 B は H の空でない閉凸集合とする。距離射影には次のような性質がある ([5, 10, 11, 2] 参照)。

(i) $x \in H$ とする。このとき、

$$\langle y - P_A(x), x - P_A(x) \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in A): \tag{2.1}$$

(ii) $x \in H$ とする。このとき、

$$P_{x+A}(y) = P_A(y - x) + x \quad (\forall y \in A): \tag{2.2}$$

(iii) I を恒等写像とし、$R_A = 2P_A - I$ とする。このとき R_A は集合 A に関する反射といい、

$$\|R_A(x) - R_A(y)\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in A) \tag{2.3}$$

が成り立つ:

(iv)

$$\frac{1}{2}(I + R_B R_A) = P_B(2P_A - I) + (I - P_A) \tag{2.4}$$

が成り立つ。

射影法の変形 (1.4) では閉凸錐を平行移動した集合 $e + C$ (ただし、$e \in \mathrm{int}C$) が用いられているが、この仮定の下では $e + C \subset \mathrm{int}C$ という包含関係が成り立っている ([12] 参照) 。

次に Bauschke、Combettes と Luke によって提案された方法について議論する。Bauschke、Combettes と Luke は、2001 年に論文 [1] で提案された非拡大写像の不動点を求める方法を応用し、2 つの閉凸集合に対する最良近似問題を解決するための方法を提案した。

集合 A と B を閉凸集合とする。Bauschke、Combettes と Luke によって提案された方法は以下のように定義される。

$$\begin{cases} y_n = P_A(x_n), \\ H_n = \{z \in H : \langle z - T(x_n), x_n - T(x_n)\rangle \le 0\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_0 - x_n\rangle \le 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0) \quad (n = 0, 1, \cdots), \end{cases} \tag{2.5}$$

ただし、$T := \frac{1}{2}(I + R_B R_A)$、$R_A, R_B$ はそれぞれ集合 A と集合 B に関する反射である。Bauschke、Combettes と Luke [3] は点列 $\{x_n\}$ が写像 $\frac{1}{2}(I+R_B R_A)$ の不動点に強収束し、点列 $\{y_n\}$ が $P_{A\cap B}$ に強収束することを示した。本論文では射影法の変形 (1.4) と (2.5) のアイディアを用いて問題 (1.1) の近似解を求めるための求解法を考える。

主定理を得るため、次の結果が必要である。

補助定理 2.1 [8, Lemma 2.3] C を H の閉凸錐、$e \in \mathrm{int}C$ とする。このとき

$$\mathrm{dist}(e + C, (\mathrm{int}C)^c) > 0$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathrm{dist}(e + C, (\mathrm{int}C)^c) = \inf\{\|u - v\| : u \in e + C, v \in (\mathrm{int}C)^c\}.$$

補助定理 2.2 [1, 7] S を H から H への非拡大写像、つまり

$$\|S(x) - S(y)\| \le \|x - y\| \quad (\forall x, y \in H) \tag{2.6}$$

とし、$x_0 \in H$ とする。ここで、点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する。

$$\begin{cases} H_n = \{z \in H : \langle z - U(x_n), x_n - U(x_n)\rangle \le 0\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_0 - x_n\rangle \le 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0) \quad (n = 0, 1, \cdots), \end{cases}$$

ただし、$U = \frac{1}{2}(I + S)$ である。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} \|S(x_n) - x_n\| = 0 \tag{2.7}$$

が成り立つ。

3 主結果

問題 (1.1) の近似解を求めるために以下の方法で構成される点列 $\{y_n\}$ を考える。$x_0 \in H$ とし、

$$\begin{cases} y_n = P_D(x_n), \\ H_n = \{z \in H : \langle z - T(x_n), x_n - T(x_n)\rangle \le 0\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_0 - x_n\rangle \le 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0) \quad (n = 0, 1, \cdots), \end{cases} \tag{3.1}$$

ただし、$T := \frac{1}{2}(I + R_{e+C} R_D)$、$e \in \mathrm{int}C$, R_{e+C} と R_D はそれぞれ集合 $e + C$ と集合 D に関する反射である。提案した (3.1) について、次の収束定理を証明する。

定理 3.1 C を H の閉凸錐、D を H の閉凸集合で $e \in \mathrm{int}C$ かつ $(e+C) \cap D \neq \emptyset$ が成り立つとする。点列 $\{y_n\}$ を (3.1) によって構成する。このとき点列 $\{y_n\}$ は $\mathrm{int}C \cap D$ に含まれる点に有限回の繰り返しで到達する。

証明の概略

$R_{e+C}R_D$ は非拡大写像であるので補助定理 2.2 を用いると

$$\lim_{n\to\infty} \|R_{e+C}R_D(x_n) - x_n\| = 0$$

となり、ここで (2.4) を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{e+C}R_D(x_n) - P_D(x_n))\| = 0$$

が成り立つ。補助定理 2.1 より

$$\mathrm{dist}(e+C, D \cap (\mathrm{int}C)^c) \geq \mathrm{dist}(e+C, (\mathrm{int}C)^c) > 0$$

となる。$\gamma := \mathrm{dist}(e+C, D \cap (\mathrm{int}C)^c)$ とおく。このとき、ある $l_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\gamma > \|P_{e+C}R_D(x_l) - P_D(x_l))\| \quad (\forall l \geq l_0)$$

が成り立つ。任意の $l \geq l_0$ に対して、$P_D(x_l) \notin \mathrm{int}C$ とすれば、

$$\gamma > \|P_{e+C}R_D(x_l) - P_D(x_l))\| \geq \gamma$$

となり矛盾。よって

$$P_D(x_l) \in \mathrm{int}C \cap D \quad (l \geq l_0)$$

が成り立つ。 ■

注意 3.1 今回提案した (3.1) の方法で生成された点列 $\{y_n\}$ は、$P_{(e+C)\cap D}(x_0)$ に強収束することが保障されている。したがって適当な e を選ぶことで問題 (1.1) の近似解を有限回の繰り返しで求めることが期待できる。

参考文献

[1] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, *A weak-to-strong convergence principle for Fejer- monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res. 26, (2001), 248–264.

[2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2011.

[3] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, D. R. Luke, *A strongly convergent reflection method for finding the projection onto the intersection of two closed convex sets in a Hilbert space*, J. Approx. Theory **141**, (2006), 63–69.

[4] L. M. Bregman, *The method of successive projection for finding a common point of convex sets*, Sov. Math. Dokl. **6** (1965) 688-692.

[5] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer, New York, NY, (2001).

[6] R. Escalante, M. Raydan, *Alternating projection methods*, SIAM, Philadelphia, (2011).

[7] S. Matsushita and W. Takahashi, *The sequences by the hybrid method and existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, in Fixed Point Theory and Its Applications, 109-113, Yokohama Publishers, Yokohama, Japan (2008).

[8] M. A. Rami, U. Helmke and J. B. Moore, *A finite steps algorithm for solving convex feasibility problems*, J. Global. Optim., **38** (2007), 143–160.

[9] H. Stark and Y. Yang, *Vector Space Projections: A Numerical approach to Signal and Image Processing*, Neural Nets, and Optics, John wiley & Sons, 1998.

[10] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.

[11] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[12] T. Tanaka and D. Kuroiwa, *The convexity of* A *and* B *assures* $\mathrm{int}A + B = \mathrm{int}(A + B)$, Appl. Math. Lett., 6 (1993), pp. 83-86.

[13] J. von Neumann, *Functional Operators II: The Geometry of Orthogonal Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950

[14] D. C. Youla and H. Webb, *Image Restoration by the method of convex projections: Part1-Theory*, IEEE Transactions on Medical Imaging, (1982), 81-94.