

複数個の不動点を持つ写像の Picard iteration の観察

島根大学大学院総合理工学研究科 瀬戸和希

Kazuki Seto, Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering,
Shimane University, 1060, Nishikawatsu, Matsue, Shimane 690-8504, Japan

島根大学大学院総合理工学研究科 黒岩大史

Daishi Kuroiwa, Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane
University, 1060, Nishikawatsu, Matsue, Shimane 690-8504, Japan

概要

本論文では、複数個の不動点を持つ自己写像において、任意に与えた初期点から Picard iteration を用いて作られる点列が不動点に収束するための十分条件に関する定理を紹介し ([10])、この結果と先行研究についての比較をしながら、この定理の有用性を示す例を与える。

1 Introduction

X を距離空間、 T を X 上の自己写像とする。任意に点 $x \in X$ を与え、点列 $\{x_k\}$ を次のように生成する。

$$x_0 = x, x_k = Tx_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

もしくは、

$$x_0 = x, x_k = T^k x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

この操作を Picard iteration と呼び、不動点を見つけるのに有用である。次の不動点定理は完備距離空間上で最も有名な定理で Banach contraction principle と呼ばれている。

Theorem 1 (Banach, [1]). X を完備距離空間、 T を X 上での自己写像とする。 T が縮小写像、すなわち、ある正の数 $r \in [0, 1)$ が存在して、任意の $x, y \in X$ に対して、

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

が成り立つとき、 T の不動点 \bar{x} が一意的に存在して、任意の $x \in X$ に対して $\{x_k\}$ が \bar{x} に収束する。ただし、 $\{x_k\}$ は Picard iteration によって作られた点列である。

これまでに多くの著者が定理 1 の拡張定理の研究を行っている [2, 3, 4, 5, 6]。ここでは次の Meir と Keeler による定理 1 を紹介する。

Theorem 2 (Meir and Keeler, [2]). X を完備距離空間、 T を X 上の自己写像とする。 T が *weakly uniformly strict contraction*、すなわち、任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の数 $\delta > 0$ が存在して、 $\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対して、 $d(Tx, Ty) < \varepsilon$ が成り立つとき、 T の不動点 \bar{x} が一意的に存在して、任意の $x \in X$ に対して $\{x_k\}$ が \bar{x} に収束する。ただし、 $\{x_k\}$ は *Picard iteration* によって作られた点列である。

自己写像 T が Theorem 1 や Theorem 2 の条件をみたせば、Picard iteration によって作られた点列は不動点に収束する。しかしながら T がこれらの条件をみたさなくても、これらの定理を使うことができる場合がある。

Example 1. $\mathbb{R}_+^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ とする。 $T: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ を次のように定義する：

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & xy > 0, \\ 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & xy = 0. \end{cases}$$

このとき、 \mathbb{R}_+^2 は完備距離空間であるが、 \mathbb{R}_+^2 の上では T は縮小写像ではなく、Theorem 2 の条件も満たさない。また T は $(0, \infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ の上では縮小写像だが、今度は $(0, \infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ は完備ではないので、このままでは Theorem 1 や Theorem 2 を用いることはできない。

しかし、次のように考えるとこの写像 T に Theorem 1 を用いることができる。 X_n を次のような $(0, \infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ の部分集合とする：

$$X_n := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \frac{1}{n}x \leq y \leq nx \right\}.$$

このとき、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して X_n は閉集合なので X_n は完備である。また、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $X_n \subset (0, \infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ であるので、 $T|_{X_n}$ は X_n 上の縮小写像である。従って Theorem 1 より不動点が一意的に存在し、任意の点 $x \in X_n$ と Picard iteration によって作られた $\{x_k\}$ がその不動点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する。また

$$\bigcup X_n = (0, +\infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$$

であることから、任意の $x \in (0, +\infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ に対して、Picard iteration によって作られた $\{x_k\}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束することが分かる。

このように、 T が縮小写像でなくとも T を適切な部分集合上に制限することによって、Theorem 1や Theorem 2を用いて、 T の不動点を求めることが出来る場合がある。しかしながら、このような部分集合を見つけることが容易ではない例もある。

Example 2. $T: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ を次のように定義する。

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & xy > 0, \\ 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & xy = 0 \end{cases}$$

ただし、 $\cos \theta = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とする。Example 1と同様に \mathbb{R}_+^n は完備距離空間であるが、 \mathbb{R}_+^n の上では T は縮小写像ではない。 T は $(0, +\infty)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の上で縮小写像だが、 $(0, +\infty)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ は完備ではないので、Theorem 1を用いることは出来ない。同様に考えると Theorem 2を用いることも出来ない。また、Example 1と同じ X_n に対しては、 T の写像の定め方より、 $T|_{X_n}$ は X_n の上で自己写像ではないので、Theorem 1や Theorem 2を用いることは出来ない。

Example 2では、Example 1で用いた X_n は有効ではない。このように、有効な部分集合を与えることが容易ではない場合もある。この Example 2が、次の章で与えた Theorem 3のモチベーションの一つである。

2 Main results

この章では、Example 2のような T に対して、必ずしも完備 (閉集合) とは限らない部分集合を与えた際にその集合上の各点を初期点として Picard iteration によって生成される点列 $\{x_k\}$ が T の不動点に収束するような十分条件に関する定理を紹介し、この定理の有用性を示す例を2つ与える。

Theorem 3 (Seto and Kuroiwa, [10]). X を完備距離空間とし、 T を X 上の自己写像とする。部分集合 B を $T(B) \subset B$ を満たすものとする。 T が B 上で *weakly uniformly strict contraction* である。すなわち、任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の数 $\delta > 0$ が存在して、 $\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta$ を満たす任意の $x, y \in B$ に対して、 $d(Tx, Ty) < \varepsilon$ が成り立つとき、 T の不動点 \bar{x} が存在して、任意の $x \in B$ に対して $\{x_k\}$ が \bar{x} に収束する。

もし、 T が縮小写像ならば Theorem 3 の条件を満たし、部分集合 B が閉集合ならば、Theorem 3 は Theorem 2 と一致する。よって Theorem 3 は Theorem 1 と

Theorem 2 の拡張であることが言える。ここで、Theorem 3 を Example 2 に適用する。

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & xy > 0, \\ 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & xy = 0 \end{cases}$$

ただし、 $\cos \theta = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とする。 $X = \mathbb{R}_+^2$ 、 $B = (0, +\infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ とする。今、 T の定め方より $T(B) \subset B$ が成り立つ。また、任意に $x, y \in B$ に対して $d(Tx, Ty) \leq \frac{2}{3}d(x, y)$ が成り立つので、任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta = \frac{1}{2}$ とおく。 $\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta$ を満たす任意の $x, y \in B$ に対して、

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \frac{2}{3}d(x, y) \\ &< \frac{2}{3}(\varepsilon + \delta) = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つので、Theorem 3 より T の不動点が存在して、任意の $x \in (0, +\infty)^2 \cup \{(0, 0)\}$ に対して Picard iteration によって生成される点列 $\{x_k\}$ はその不動点に収束する。実際にこの不動点は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。ここで、 $\mathbb{R}_+^2 \setminus ((0, +\infty)^2 \cup \{(0, 0)\})$

の上で T は明らかに不動点を持たないことより、 $F(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ が得られる。

このようにして Theorem 1 や Theorem 2 を用いることが容易ではない場合においても Theorem 3 を用いることで T の不動点を求めることが出来る。

次に、自己写像 T が複数個の不動点を持つ例について観察を行う。

Example 3. $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を次のように定義する。

$$Tx = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & x \in [2, 4) \\ \frac{5}{6}x + \frac{2}{3} & x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

このとき、 $F(T) = [0, 1] \cup \{3, 4\}$ であることが、Theorem 3 を使えば求められる。実際に、 $X = \mathbb{R}_+$ とし、その部分集合 B_1, B_2, B_3, B_4 をそれぞれ次のようにとる。

- $x \in [0, 1)$ に対して $B(x) = \{x\}$ とし、 $B_1 = \bigcup_{x \in [0, 1)} B(x)$ とする。各 $x \in [0, 1)$ に対して、 $B(x)$ 上で T は縮小写像である。また、 $B(x)$ は閉集合であるから

完備。したがって、*Theorem 1* より $F(T|_{B(x)}) = \{x\}$ かつ *Picard iteration* によって生成される点列 $\{x_k\}$ は不動点 x に収束する。したがって、任意の $x \in B_1$ に対して、 $T|_{B(x)}$ は x を不動点とし、点列 $\{x_k\}$ は不動点 x に収束する。

- $B_2 = [1, 2)$ とする。このとき、 B_2 の上で T は縮小写像である。しかし、集合 B_2 は閉集合ではないので、*Theorem 1* や *Theorem 2* を用いることが出来ない。今、 B_2 において *Theorem 3* の条件を満たしているのをそれを用いることで、不動点の存在性が分かり、初期点を $[1, 2)$ の元とする *Picard iteration* によって作られる点列が不動点に収束する。実際に、この不動点は 1 であることが収束性より得られる。
- $B_3 = [2, 4)$ とする。このとき、 B_3 の上で T は縮小写像である。しかし、 B_2 と同様に B_3 は閉集合ではないので、*Theorem 1* や *Theorem 2* を用いることが出来ない。この場合も *Theorem 3* の条件を満たしているのを、不動点の存在性が分かり、初期点を $[2, 4)$ の元とする *Picard iteration* によって作られる点列がその不動点に収束する。実際に、この不動点は 3 であることが収束性より得られる。
- $B_4 = [4, +\infty)$ とする。このとき、 B_4 の上で T は縮小写像で、 $[4, +\infty)$ は完備なので、*Theorem 1* より不動点の存在性が分かり、初期点を $[4, +\infty)$ の元とする *Picard iteration* によって作られる点列がその不動点に収束する。実際に、この不動点は 4 であることが収束性より得られる。

ここで、 $\mathbb{R}_+ = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ であることから、 $F(T) = [0, 1] \cup \{3, 4\}$ と \mathbb{R}_+ の任意の元を初期点とし、*Picard iteration* によって作られる点列が不動点収束することが得られる。

このようにして、 T が複数個の不動点を持つ場合にも、部分集合を定め *Theorem 3* を用いることで T の不動点を求めることが出来る。

参考文献

- [1] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, *Fund. Math.* 3. (1922) 133-181.
- [2] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 28. (1969) 326-329.
- [3] D. W. Boyd, J. S. W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20. (1969) 458-464.

- [4] P. V. Subrahmanyam, Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction, *J. Math. Phys. Sci.* 8. (1974) 445-457.
- [5] C. S. Wong, Characterizations of certain maps of contractive type, *Pacific J. Math.* 68(1). (1972) 26-42.
- [6] T.-C. Lim, On characterizations of Meir-Keeler contractive maps, *Nonlinear Anal.* 46. (2001) 113-120.
- [7] I. A. Rus, Picard operators and applications, *Sci. Math.* 58. (2003) 191-219.
- [8] T. Suzuki, A sufficient and necessary condition for convergence of the successive approximations to a unique fixed point, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136. (2008) 4089-4093.
- [9] T. Suzuki, Subrahmanyam's fixed point theorem, *Nonlinear Anal.* 71. (2009) 1678-1683.
- [10] Kazuki Seto, Daishi Kuroiwa, A convergence theorem of the Picard iteration whose mapping has multiple fixed points, *Advances in Fixed Point Theory*, Vol 5, No 4 (2015), 387-395.