数理解析研究所講究録
第2011巻 2016年 166-171

準凸計画問題に対する必要十分な最適性条件について

島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域 * 鈴木 聡
Satoshi Suzuki
Department of Mathematics, Shimane University
島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域 黒岩 大史
Daishi Kuroiwa
Department of Mathematics, Shimane University

概要

本講究録では, 準凸計画問題に対する必要十分な最適性条件について述べる. 特に, 近年筆者等によって示された, 準凸計画問題に対する Greenberg-Perskalla subdifferential を用いた最適性条件について述べる.

1 導入

本講究録では, 次のような数理計画問題について考察する.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && f(x), \\ &\text{subject to} && x \in A. \end{aligned}$$

ただし, $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 集合 A はこの問題の制約集合と呼ばれる. 数理計画問題は関数や制約集合の種類によって分類されており, 本講究録では特に f が準凸関数, A が凸集合である準凸計画問題について述べる.

数理計画問題においては様々な最適性条件が研究されている. 中でもよく知られたものとして, 凸計画問題に対する劣微分を用いた必要十分な最適性条件がある:

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x) \iff 0 \in \partial f(x_0) + N_A(x_0).$$

〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060

ただし, $\partial f(x_0)$ は f の x_0 における劣微分, $N_A(x_0)$ は A の x_0 における法線錐である. この最適性条件は大域解であることの必要十分な条件であるだけでなく Lagrange 双対性とも関連するなど, 凸計画問題において非常に条件である. 一方で準凸計画問題においては上記のような必要十分な最適性条件はこれまであまり示されていなかった. 多くの劣微分が定義され研究されてはいるものの, 最適性の必要条件や, 強い仮定のうえでの十分条件等が主であり, 一般的な準凸関数に対して適用できる必要十分な最適性条件の研究が待たれていた.

そのような中で, 本講究録では我々が [20] において示した, Greenberg-Pierskalla subdifferential を用いた最適性条件について紹介し, その適用例について述べる.

2 準備

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 閉包及び相対的内部をそれぞれ cl$A$, ri$A$ と表す. A の $x \in A$ における法線錐 (normal cone) を次で定義する:

$$N_A(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in A, \langle v, y - x\rangle \leq 0\}.$$

また, A の標示関数 (indicator function) を次で定義する:

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本講究録を通じて関数 f は $\mathbb{R}^n$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とする. f のエピグラフを次のように定義する:

$$\text{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

このとき, f が凸関数であるとは epi$f$ が凸集合であるときをいう. f の $x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分を次のように定義する:

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle\}.$$

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して関数 f のレベル集合を次のように定義する:

$$L(f, \leq, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

このとき, f が準凸関数であるとは任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $L(f, \leq, \alpha)$ が凸集合であるときをいう. 任意の凸関数は準凸関数であるが, その逆は一般には成り立たない. f が essentially quasiconvex であるとは, f が準凸関数でありかつ任意の局所解が大域解であ

るときをいう. 一般に凸関数や微分可能な擬凸関数は essentially quasiconvex である. また, 実数値連続準凸関数に対しては, essentially quasiconvex と semistrictly quasiconvex が同値であることも知られている. 詳細は [1, 2, 4, 5, 20] 等を参照のこと.

[3] において, Greenberg, Pierskalla は次のような劣微分を定義した:

$$\partial^{GP} f(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x \rangle \geq \langle v, x_0 \rangle \text{ implies } f(x) \geq f(x_0)\}.$$

これを f の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ における Greenberg-Pierskalla subdifferential という.

3 最適性条件と解集合の特徴付け

本章では定理 1 において示された必要十分な最適性条件並びにに解集合の特徴付けを紹介し, その適用例について述べる.

筆者等は Greenberg-Pierskalla subdifferential を用いて次のような必要十分な最適性条件を得た.

定理 1. [20] f を上半連続かつ essentially quasiconvex, A を $\mathbb{R}^n$ の凸集合, $x \in A$ とする. このとき, 次の二つの条件は同値である:

(i) $f(x) = \min_{y \in A} f(y)$,

(ii) $0 \in \partial^{GP} f(x) + N_A(x)$.

以下に挙げる例は定理 1 の適用例である.

例 1. $A = [0,1] \times [0,1]$, f を次のような $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 & x_2 \geq 0, \\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 & x_2 < 0. \end{cases}$$

このとき, A は凸集合であり, f は上半連続かつ essentially quasiconvex である.

$\bar{x} = (0,0)$ とすると, 次は容易にわかる:

$$N_A(\bar{x}) = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \leq 0, v_2 \leq 0\}$$

一方 $v_0 = (0,1)$ とおくと, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ with $\langle v_0, x \rangle \geq \langle v_0, \bar{x} \rangle$ に対して,

$$f(x) = x_2 = \langle v_0, x \rangle \geq \langle v_0, \bar{x} \rangle = 0 = f(\bar{x}).$$

これは $v_0 \in \partial^{GP} f(\bar{x})$ であることを示している. よって

$$0 = v_0 - v_0 \in \partial^{GP} f(\bar{x}) + N_A(\bar{x}).$$

定理 1 より, $\bar{x}$ は f の A における大域解である.

また [20] において筆者等は, 定理 1 における最適性条件を用いて次のような解集合の特徴付けを示した.

定理 2. [20] f を上半連続かつ essentially quasiconvex, A を $\mathbb{R}^n$ の凸集合, $S = \{x \in A \mid f(x) = \min_{y \in A} f(y)\}$, $\bar{x} \in S$, $x_0 \in \mathrm{ri}S$ とする. このとき, 次にあげる集合は全て一致する:

(i) $S = \{x \in A \mid f(x) = \min_{y \in A} f(y)\}$,
(ii) $S_1 = \{x \in A \mid \exists v \in \partial^{GP} f(\bar{x}) \cap \partial^{GP} f(x) \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle = 0\}$,
(iii) $S_2 = \{x \in A \mid \exists v \in \partial^{GP} f(\bar{x}) \cap \partial^{GP} f(x) \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0\}$,
(iv) $S_3 = \{x \in A \mid \partial^{GP} f(x_0) \subset \partial^{GP} f(x), \exists v \in \partial^{GP} f(x_0) \text{ s.t. } \langle v, x - x_0 \rangle = 0\}$,
(v) $S_4 = \{x \in A \mid \partial^{GP} f(x_0) \subset \partial^{GP} f(x), \exists v \in \partial^{GP} f(x_0) \text{ s.t. } \langle v, x - x_0 \rangle \leq 0\}$,
(vi) $S_5 = \{x \in A \mid \exists v \in \partial^{GP} f(x) \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle = 0\}$,
(vii) $S_6 = \{x \in A \mid \exists v \in \partial^{GP} f(x) \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0\}$.

この特徴付けは準凸計画問題において重要なものであり, 以下のような適用例がある.

例 2. A, f を例 1 で定義したものとすると, $\bar{x} = (0, 0)$ は f の A における大域解である. 定理 2 より,

$$S = S_5 = \{x \in A \mid \exists v \in \partial^{GP} f(x) \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle = 0\}.$$

$x \in A$ とすると, $L(f, <, f(x)) = \{(y_1, y_2) \mid y_2 < x_2\}$. これより $\partial^{GP} f(x) = \{(0, \lambda) \mid \lambda > 0\}$ であることがわかる. よって,

$$\begin{aligned}
S &= S_5 \\
&= \{x \in A \mid \exists v \in \partial^{GP} f(x) \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle = 0\} \\
&= \{x \in A \mid \exists v \in \{(0, \lambda) \mid \lambda > 0\} \text{ s.t. } \langle v, x - \bar{x} \rangle = 0\} \\
&= \{x \in A \mid \exists \lambda > 0 \text{ s.t. } \lambda(x_2 - \bar{x}_2) = 0\} \\
&= \{x \in A \mid x_2 = \bar{x}_2\} \\
&= [0, 1] \times \{0\}.
\end{aligned}$$

実際, 任意の $x \in S_5$ に対して, $f(x) = 0 = f(x_0)$.

一方で, 定理 2 における特徴付けは, より一般的な準凸関数に対しては適用できない場合がある.

例 3. $A = [0,3]$, f を次のような $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in (-\infty, 0], \\ 0 & x \in [0,1], \\ x^3 - 1 & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

このとき f は上半連続準凸関数であるが essentially quasiconvex ではない.

$\bar{x} \in S = [0,1]$, $x_0 \in \mathrm{ri}S$ とすると, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \partial^{GP} f(x) = (0, \infty) \quad \forall x \in A, \\ S_1 = S_5 = \{\bar{x}\}, \\ S_2 = S_6 = [0, \bar{x}], \\ S_3 = \{x_0\}, \\ S_4 = [0, x_0]. \end{aligned}$$

これより, 定理 2 における解集合の特徴付けは一般には成り立たない.

このような, より一般的な準凸計画問題に対する必要十分な最適性条件や, 解集合の特徴付けに関する研究が待たれるところである.

参考文献

[1] Avriel, M., Diewert, W. E., Schaible, S., Zang, I.: Generalized concavity. Math. Concepts Methods Sci. Engrg. Plenum Press, New York (1988)

[2] Crouzeix, J. P., Ferland, J. A.: Criteria for quasiconvexity and pseudoconvexity: relationships and comparisons. Math. Programming. 23, 193–205 (1982)

[3] Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P.: Quasi-conjugate functions and surrogate duality. Cah. Cent. Étud. Rech. Opér. 15, 437–448 (1973)

[4] Ivanov, V. I.: First order characterizations of pseudoconvex functions. Serdica Math. J. 27, 203–218 (2001)

[5] Ivanov, V. I.: Characterizations of the solution sets of generalized convex minimization problems. Serdica Math. J. 29, 1–10 (2003)

[6] Ivanov, V. I.: Characterizations of pseudoconvex functions and semistrictly quasiconvex ones. J. Global Optim. 57, 677–693 (2013)

[7] Jeyakumar, V., Lee, G. M., Dinh, N.: Lagrange multiplier conditions characterizing the optimal solution sets of cone-constrained convex programs. J. Optim. Theory Appl. 123, 83–103 (2004)

[8] Mangasarian, O. L.: A simple characterization of solution sets of convex programs. Oper. Res. Lett. 7, 21–26 (1988)

[9] Martínez-Legaz, J. E.: A generalized concept of conjugation. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 86, 45–59 (1983)

[10] Moreau, J. J.: Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. J. Math. Pures Appl. 49, 109–154 (1970)

[11] Penot, J. P.: What is quasiconvex analysis?. Optimization. 47, 35–110 (2000)

[12] Penot, J. P.: Characterization of solution sets of quasiconvex programs. J. Optim. Theory Appl. 117, 627–636 (2003)

[13] Penot, J. P., Volle, M.: On quasi-convex duality. Math. Oper. Res. 15, 597–625 (1990)

[14] Son, T. Q., Kim, D. S.: A new approach to characterize the solution set of a pseudoconvex programming problem. J. Comput. Appl. Math. 261, 333–340 (2014)

[15] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming. Nonlinear Anal. 74, 1279–1285 (2011)

[16] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Subdifferential calculus for a quasiconvex function with generator. J. Math. Anal. Appl. 384, 677–682 (2011)

[17] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Necessary and sufficient conditions for some constraint qualifications in quasiconvex programming. Nonlinear Anal. 75, 2851–2858 (2012)

[18] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Necessary and sufficient constraint qualification for surrogate duality. J. Optim. Theory Appl. 152, 366–367 (2012)

[19] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Some constraint qualifications for quasiconvex vector-valued systems. J. Global Optim. 55, 539–548 (2013)

[20] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Characterizations of the solution set for quasiconvex programming in terms of Greenberg-Pierskalla subdifferential. J. Global Optim. 62, 431–441 (2015)