数理解析研究所講究録
第2012巻 2016年 81-93

Magma を用いた coherent cohomology の次元計算

九州大学大学院数理学府 *
工藤　桃成 †
Momonari Kudo
Graduate School of Mathematics
Kyushu University

2016 年 2 月 7 日

概要

本稿では, 丸山正樹氏の著書に述べられている, 体上で定義された射影空間における連接層係数コホモロジー群の次元の計算方法を紹介する. また, 丸山氏の著書で与えられている方法を計算機上に実現するための明示的な公式とアルゴリズムを記述し, 著者が計算代数システム Magma に実装した関数の紹介を行う. なお, 本稿は 2015 年 9 月 30 日から 10 月 2 日の期間に京都大学数理解析研究所において開催された研究集会「計算代数システムによる新しい数学の開拓と進展」における著者の講演内容をまとめたものであり, 主として 2015 年 2 月 6 日に九州大学大学院数理学府に提出された著者の修士論文の内容に基づいている.

1 序論

体 K 上の射影スキーム X について, X 上の連接層[*1] $\mathcal{F}$ が定めるコホモロジー群 $H^q(X,\mathcal{F})$ を計算することは, X の構造を調べる上で重要である. スキーム X の幾何学的不変量で, (ある連接層 $\mathcal{F}$ に関して) コホモロジー群 $H^q(X,\mathcal{F})$ を調べることにより決定されるものは多い. そのような不変量の例として, Hilbert 関数, Euler 標数, 算術種数, 幾何種数などがある. 特に X が非特異完備代数曲線であるときは, 算術種数と幾何種数の値は一致し, $\dim_K H^1(X,\mathcal{O}_X)$ に等しい. ここで $\mathcal{O}_X$ は X の構造層である (このときの

* 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744.
† E-mail: m-kudo@math.kyushu-u.ac.jp

*1 正確には $\mathcal{O}_X$-加群の連接層のことである. 本稿では X 上の連接層といえば $\mathcal{O}_X$-加群の連接層を指す.

$\dim_K H^1(X, \mathcal{O}_X)$ は X の種数とよばれる). 本稿では, 連接層の定めるコホモロジーを抽象的な用語で **coherent cohomology** とよぶことにする. J.-P. Serre [Ser55] によって, $H^q(X, \mathcal{F})$ が有限次元 K 線形空間であることが示されて以降, 次元 $\dim_K H^q(X, \mathcal{F})$ の計算方法が幾つか提案されてきた. 射影スキーム X の特性を用いて計算する方法も考えられるが, 本稿では X や $\mathcal{F}$ が何らかの形で具体的に与えられている状況で, algorithmic に計算する方法を考える. 次元 $\dim_K H^q(X, \mathcal{F})$ を algorithmic に計算する方法で, グレブナー基底の計算に基づくものとして [DE02] と [丸山 02] をとりあげる. 計算代数システム Magma [BCP97] には, [DE02] において提案されたアルゴリズムが実装されている (関数名 : `CohomologyDimension`). [DE02] によるアルゴリズムは, K 線形空間の双対空間を考え, 外積代数上の自由分解を計算することで次元 $\dim_K H^q(X, \mathcal{F})$ を求めている. 他方, 丸山正樹氏による日本語の書籍 [丸山 02] の終盤にも, $\dim_K H^q(X, \mathcal{F})$ を計算するアイディアが述べられている. [丸山 02] におけるアイディアは, 連接層 $\mathcal{F}$ の局所自由層による分解 (に対応する加群の自由分解) を求めたのち, $\dim_K H^q(X, \mathcal{F})$ を求めるのに必要な他のコホモロジー群の次元を Čech コホモロジーによって直接的に求めるというものである. 著者は [丸山 02] に着目して, この方法を明示的なアルゴリズムとして書き下し, Magma に関数として実装した. 本稿では, [丸山 02] による計算方法の詳細を紹介するとともに, 著者が実装した関数を用いた計算例を示す. なお, 本稿は著者の修士論文 [工藤 15] をもとに作成されたものである.

2 入力データについて

本節では, algorithm の入力データとして取り扱う対象について説明する. 本稿を通して, K を体 (標数は任意), $S := K[X_0, \ldots, X_r]$ を K を係数環とする $r+1$ 変数多項式環, $\mathbb{P}^r_K := \mathrm{Proj}(S)$ を基礎体 K 上の r 次元射影空間とする. 特に強調する必要がない場合, 基礎体 K を省略して $\mathbb{P}^r$ とも書く. 射影スキーム $X \subseteq \mathbb{P}^r$ とその上の連接層 $\mathcal{F}$ を考える. 我々の目標は, $\dim_K H^q(X, \mathcal{F})$ を 計算することである. 入力データとして考えられるのは, 整数 q, 射影スキーム X, 連接層 $\mathcal{F}$ の 3 つであるが, X と $\mathcal{F}$ をどのように「具体的に」与えるかを考える必要がある. そこでまず, $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ を埋め込みとするとき, K 線形空間の同型

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong H^q(\mathbb{P}^r, i_*\mathcal{F}) \quad (q \in \mathbb{Z}) \tag{2.1}$$

が成立する. ここで $i_*\mathcal{F}$ は埋め込み i による層 $\mathcal{F}$ の順像層である. 順像層 $i_*\mathcal{F}$ が $\mathbb{P}^r$ 上の連接層であることと, 同型 (2.1) によって, 我々の目標は, 射影空間 $\mathbb{P}^r$ 上の連接層

$\mathcal{F}$ について, $\dim_K H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F})$ を 計算することと解釈できる. さて, 入力となる連接層 $\mathcal{F}$ をどのように与えるか, ということが問題であるが, 次の事実を用いて代替となる入力を与える：射影空間 $\mathbb{P}^r = \mathrm{Proj}\,(S)$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して, 有限生成な次数付き S 加群 M が存在して, $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ となる. ここで, $\widetilde{M}$ は S 加群 M から誘導された $\mathbb{P}^r$ 上の連接層である. さらに, M の斉次生成元を $g_1, \ldots, g_t$, それらの M における次数をそれぞれ $d_1, \ldots, d_t$ とすれば,

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{t} S\,(-d_j) \right) \Big/ N \cong M \tag{2.2}$$

が成立する. ここで N は斉次元 $g_1, \ldots, g_t \in M$ の第 1 syzygy であり, これは次数付き S 加群 $\bigoplus_{j=1}^{t} S\,(-d_j)$ における有限生成な斉次部分加群である. 同型 (2.2) は, 連接層 $\mathcal{F}$ の構造が非負整数 t, 整数 $d_1, \ldots, d_t$, 次数付き S 加群 $\bigoplus_{j=1}^{t} S\,(-d_j)$ の斉次生成元から決定される, ということを示している. これを踏まえ, 入力と出力を次のように決める：

Input: 正整数 t, 整数 q, d_j $(j = 1, \ldots, t)$, 次数付き S 加群 $\bigoplus_{j=1}^{t} S\,(-d_j)$ の有限個の斉次元 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{t_0}$.

Output: 有限生成な次数付き S 加群 $M := \left(\bigoplus_{j=1}^{t} S\,(-d_j) \right) \Big/ \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{t_0} \rangle_S$ から誘導される連接層を $\mathcal{F} := \widetilde{M}$ としたときの $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F})$ の K 線形空間としての次元.

3 $\dim_K H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F})$ の明示的公式とアルゴリズム

本節では, [丸山 02] をもとに, 連接層係数コホモロジー群の次元を計算するための明示的な公式を与える. 記号を簡略にするため, 以下 $\mathbb{P}^r$ 上の連接層 $\mathcal{H}$ の定める q 次コホモロジー群 $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{H})$ を (底空間 $\mathbb{P}^r$ を省略して) $H^q(\mathcal{H})$ と書く. 射影空間 $\mathbb{P}^r$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ は次のような長さ有限の完全列をもつ：

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{t_{r+1}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\left(m_j^{(r+1)}\right) \xrightarrow{f_{r+1}} \cdots \xrightarrow{f_1} \bigoplus_{j=1}^{t_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\left(m_j^{(0)}\right) \xrightarrow{f_0} \mathcal{F} \to 0. \tag{3.1}$$

完全列 (3.1) を連接層 $\mathcal{F}$ の**局所自由層による分解**という. ここで,

$$\mathcal{G}_i := \bigoplus_{j=1}^{t_i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\left(m_j^{(i)}\right),\ \mathcal{K}_i := \mathrm{Ker}\,(f_i)\ \ (i = 0, \ldots, r+1),\ \mathcal{K}_{-1} := \mathcal{F} \tag{3.2}$$

とする. [丸山 02] における $\dim_K H^q(\mathcal{F})$ の計算可能性に関する結果は次の通りである：

定理 3.1 ([丸山 02]) 射影空間 $\mathbb{P}^r$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ を (2.2) の形の有限生成な次数付き S 加群 M を用いて $\mathcal{F}=\widetilde{M}$ と表す. 表示 (2.2) における正整数 t, 整数 d_j $(j=1,\ldots,t)$, 次数付き S 加群 $\bigoplus_{j=1}^{t} S(-d_j)$ の有限個の斉次元 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{t_0}$ を具体的に与えたとき, (3.1) の形の分解を得ることができて, $\dim_K H^0(\mathcal{F})$ の計算は分解 (3.1) に現れる t_i, $d_j^{(i)}$, K 線形空間 $H^0(\mathcal{G}_i)$, $H^r(\mathcal{G}_i)$ の基底, および K 線形写像 $H^0(f_i)$, $H^r(f_i)$ の階数の計算に帰着される. さらにこれらは M から計算可能であり, 結果として $\dim_K H^0(\mathcal{F})$ は計算可能である. 他の次元 $\dim_K H^q(\mathcal{F})$ についても同様に計算可能である $(q=1,\ldots,r)$.

いま, [丸山 02] における結果を, 計算可能性の帰着を明示的な公式で表す形で証明する. 証明のアイディアは [丸山 02] によるものである. 公式は, t_i, $d_j^{(i)}$, K 線形空間 $H^0(\mathcal{G}_i)$, $H^r(\mathcal{G}_i)$ の基底, および K 線形写像 $H^0(f_i)$, $H^r(f_i)$ の階数の計算可能性に関わらず, 連接層 $\mathcal{F}$ とその局所自由層による分解 (3.1) に対して常に成り立つことに注意する.

公式 3.2 射影空間 $\mathbb{P}^r$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ とその局所自由層による分解 (3.1) について次の等式が成立する:

(1) 大域切断, すなわち 0 次コホモロジー群 $H^0(\mathcal{F})\cong\Gamma(\mathbb{P}^r,\mathcal{F})$ について,

$$\begin{aligned}\dim_K H^0(\mathcal{F}) = \dim_K H^0(\mathcal{G}_0) - \dim_K H^r(\mathcal{G}_{r+1}) + \dim_K H^r(\mathcal{G}_r) \\ - \mathrm{rk} H^0(f_1) - \mathrm{rk} H^r(f_r).\end{aligned} \tag{3.3}$$

(2) 射影空間 $\mathbb{P}^r$ の次元が $r\geq 2$ であるとき, $1\leq q\leq r-1$ に対して,

$$\dim_K H^q(\mathcal{F}) = \dim_K H^r(\mathcal{G}_{r-q}) - \mathrm{rk} H^r(f_{r-q}) - \mathrm{rk} H^r(f_{r-q+1}). \tag{3.4}$$

(3) 高次コホモロジー群 $H^r(\mathcal{F})$ について,

$$\dim_K H^r(\mathcal{F}) = \dim_K H^r(\mathcal{G}_0) - \mathrm{rk} H^r(f_1). \tag{3.5}$$

ここで, $H^q(f_i)$ は f_i によって誘導された $H^q(\mathcal{G}_i)$ から $H^q(\mathcal{G}_{i-1})$ への K 線形写像であり, $\mathrm{rk} H^q(f_i)=\dim_K(\mathrm{Im}(H^q(f_i)))$ は写像 $H^q(f_i)$ の K 線形写像としての階数である.

証明 (2), (1), (3) の順で示す.

(2) 同型 $H^q(\mathcal{F})\cong \mathrm{Ker}(H^r(f_{r-q}))/\mathrm{Im}(H^r(f_{r-q+1}))$ $(q=1,\ldots,r-1)$ を示せば十分である. 各 $i=0,\ldots,r+1$ に対して, 連接層の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{G}_i \longrightarrow \mathcal{K}_{i-1} \longrightarrow 0 \tag{E_i}$$

を得る．短完全列 (E_i) は次のようなコホモロジー群の長完全列を誘導する：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(\mathcal{K}_i) & \to & H^0(\mathcal{G}_i) & \to & H^0(\mathcal{K}_{i-1}) & & \\ & \to & H^1(\mathcal{K}_i) & \to & H^1(\mathcal{G}_i) & \to & H^1(\mathcal{K}_{i-1}) & & \\ & \to & \cdots & & & & & & \\ & \to & H^{r-1}(\mathcal{K}_i) & \to & H^{r-1}(\mathcal{G}_i) & \to & H^{r-1}(\mathcal{K}_{i-1}) & & \\ & \to & H^r(\mathcal{K}_i) & \to & H^r(\mathcal{G}_i) & \to & H^r(\mathcal{K}_{i-1}) & \to & 0 \end{array} \tag{L_i}$$

ここで $H^q(\mathcal{G}_i)=0\ (q=1,\ldots,r-1)$ に注意する．実際，

$$H^q(\mathcal{G}_i)=H^q\left(\bigoplus_{j=1}^{t_i}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\left(m_j^{(i)}\right)\right)\cong\bigoplus_{j=1}^{t_i}H^q\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\left(m_j^{(i)}\right)\right) \tag{3.6}$$

であり，$H^q\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\left(m_j^{(i)}\right)\right)=0\ (q=1,\ldots,r-1)$ が成り立つからである．長完全列 (L_i) $(i=0,\ldots,r+1)$ によって，

$$H^q(\mathcal{F})\cong H^{q+1}(\mathcal{K}_0)\cong\cdots\cong H^{r-1}(\mathcal{K}_{r-q-2}) \tag{3.7}$$

なる同型を得る．ここで，

$$0\to H^q(\mathcal{F})\cong H^{r-1}(\mathcal{K}_{r-q-2})\to H^r(\mathcal{K}_{r-q-1})\to H^r(\mathcal{G}_{r-q-1}) \tag{3.8}$$

は完全であるので，K 線形写像 $H^r(\mathcal{K}_{r-q-1})\to H^r(\mathcal{G}_{r-q-1})$ を σ_q と書けば，同型 $H^q(\mathcal{F})\cong\operatorname{Ker}(\sigma_q)$ を得る．さらに可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_{r-q+1} \arrow[r, "f_{r-q+1}"] & \mathcal{G}_{r-q} \arrow[r] \arrow[dr, "f_{r-q}"'] & \mathcal{K}_{r-q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & \mathcal{G}_{r-q-1} & \end{tikzcd}$$

において横の列は完全であることと，r 次のコホモロジー群をとる関手 $H^r(\cdot)$ が右完全であることから，可換図式

$$\begin{tikzcd} H^r(\mathcal{G}_{r-q+1}) \arrow[r, "H^r(f_{r-q+1})"] & H^r(\mathcal{G}_{r-q}) \arrow[r] \arrow[dr, "H^r(f_{r-q})"'] & H^r(\mathcal{K}_{r-q-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_q"] & 0 \\ & & H^r(\mathcal{G}_{r-q-1}) & \end{tikzcd}$$

の横の列もまた完全である．従って K 線形空間の同型 $H^q(\mathcal{F})\cong\operatorname{Ker}(\sigma_q)\cong\operatorname{Ker}(H^r(f_{r-q}))/\operatorname{Im}(H^r(f_{r-q+1}))$ を得る．

(1) コホモロジー群の長完全列 (L_0) により, 完全列

$$0 \to H^0(\mathcal{K}_0) \to H^0(\mathcal{G}_0) \to H^0(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{K}_0) \to 0 \tag{3.9}$$

を得る. この完全列において K 線形写像 $H^0(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{K}_0)$ は全射であるので,

$$\dim_K H^0(\mathcal{F}) = \dim_K \mathrm{Im}\left(H^0(f_0)\right) + \dim_K H^1(\mathcal{K}_0) \tag{3.10}$$

なる等式を得る. 同型 (3.7) により $H^1(\mathcal{K}_0) \cong H^{r-1}(\mathcal{K}_{r-2})$ であり, (2) と同様の議論によって等式

$$\dim_K H^1(\mathcal{K}_0) = \dim_K H^r(\mathcal{G}_r) - \mathrm{rk} H^r(f_r) - \mathrm{rk} H^r(f_{r+1}) \tag{3.11}$$

が成立する. また, K 線形空間 $\mathrm{Im}\left(H^0(f_0)\right)$ について, K 線形写像 $H^0(f_0):H^0(\mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(\mathcal{F})$ に準同型定理を適用すれば,

$$\mathrm{Im}\left(H^0(f_0)\right) \cong H^0(\mathcal{G}_0)/\mathrm{Ker}\left(H^0(f_0)\right) \tag{3.12}$$

なる同型を得る. 線形空間 $\mathrm{Ker}\left(H^0(f_0)\right) \cong H^0(\mathcal{K}_0)$ の次元を求める. (2) における長完全列 (L_1) によって特に

$$H^0(\mathcal{G}_1) \to H^0(\mathcal{K}_0) \to H^1(\mathcal{K}_1) \to 0 \tag{3.13}$$

は完全である. これより, $\dim_K H^0(\mathcal{K}_0)$ の計算に必要なものは $H^1(\mathcal{K}_1)$ の次元と K 線形写像 $H^0(\mathcal{G}_1) \to H^0(\mathcal{K}_0)$ の階数である. 線形写像 $H^0(\mathcal{G}_1) \to H^0(\mathcal{K}_0)$ を τ と書く. 次元 $\dim_K \mathrm{Im}(\tau)$ を求める. 図式

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{G}_1) \arrow[rr, "H^0(f_1)"] \arrow[dr, "\tau"'] & & H^0(\mathcal{G}_0) \\
& H^0(\mathcal{K}_0) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換であることと, (3.9) により線形写像 $H^0(\mathcal{K}_0) \to H^0(\mathcal{G}_0)$ は単射であることから, $\mathrm{Ker}\left(H^0(f_1)\right) = \mathrm{Ker}(\tau)$ を得る. 従って,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\tau) &\cong H^0(\mathcal{G}_1)/\mathrm{Ker}(\tau) \\
&\cong H^0(\mathcal{G}_1)/\mathrm{Ker}\left(H^0(f_1)\right) \\
&\cong \mathrm{Im}\left(H^0(f_1)\right)
\end{aligned}$$

となり,

$$\dim_K \mathrm{Im}(\tau) = \dim_K \mathrm{Im}\left(H^0(f_1)\right) = \mathrm{rk} H^0(f_1) \tag{3.14}$$

である. 残りは $H^1(\mathcal{K}_1)$ であるが, 再び (L_i) を用いて (3.7) と同様の同型を構成することで, $H^1(\mathcal{K}_1) \cong H^{r-1}(\mathcal{K}_{r-1})$ を得る. (2) と同様の議論を行い, (3.1) の完全性から $\mathcal{K}_r \cong \mathcal{G}_{r+1}$ であることに注意すれば,

$$\dim_K H^1(\mathcal{K}_1) = \dim_K H^r(\mathcal{G}_{r+1}) \tag{3.15}$$

である. 以上 (3.10)–(3.15) により等式 (3.3) が成立する.

(3) 同型 $H^r(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Coker}(H^r(f_1))$ を示せば十分である. 連接 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ 加群の射の列 $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ は完全であり, 関手 $H^r(\cdot)$ は右完全であるので, K 線形写像の列

$$H^r(\mathcal{G}_1) \xrightarrow{H^r(f_1)} H^r(\mathcal{G}_0) \xrightarrow{H^r(f_0)} H^r(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

は完全である. 従って $H^r(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Coker}(H^r(f_1))$ を得る. □

さて, [丸山 02] における $\dim_K H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F})$ の計算方法を示し, 明示的なアルゴリズムを与える. 入力となる有限生成な次数付き S 加群 M は次のような長さが高々 $r+1$ の次数付き S 加群の完全列をもつ:

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{t_{r+1}} S\left(-d_j^{(r+1)}\right) \overset{\varphi_{r+1}}{\to} \cdots \overset{\varphi_1}{\to} \bigoplus_{j=1}^{t_0} S\left(-d_j^{(0)}\right) \overset{\varphi_0}{\to} M \to 0. \tag{3.16}$$

ここで, 各 φ_i は次数付き S 加群の次数 0 の準同型である. すなわち, φ_i の標準的な基底による表現行列を

$$A_i := \begin{bmatrix} g_{1,1}^{(i)} & \cdots & g_{1,t_{i-1}}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{t_i,1}^{(i)} & \cdots & g_{t_i,t_{i-1}}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

とすれば, A_i の各成分 $g_{k,\ell}^{(i)} \in S$ は次数 $d_\ell^{(i-1)} - d_k^{(i)}$ の斉次多項式である. 完全列 (3.16) (に現れる全ての t_i, $d_j^{(i)}$, $g_{k,\ell}^{(i)}$) は自由加群のグレブナー基底を用いて計算できる ([CLO98, Chapter 6]). 完全列 (3.16) を次数付き S 加群 M の (次数付き) **自由分解** という. 自由分解のうち長さが最短のものを**極小自由分解**といい, 極小自由分解は複体の同型を除いて一意的である*2. 完全列 (3.16) に対して $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ 加群の (連接) 層をとる関手を作用させることで, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ の局所自由層による分解 (3.1) を得る. ここで $f_i := \widetilde{\varphi_i}$ とし

*2 ホモロジー代数の言葉でいえば, 極小自由分解は**射影分解**であり, その長さを**射影次元**という.

た．連接層の射 $\widetilde{\varphi_i}:\widetilde{M_i}\longrightarrow\widetilde{M_{i-1}}$ は S 加群の準同型 $\varphi_i:M_i\longrightarrow M_{i-1}$ から誘導される射である．また，

$$M_i:=\bigoplus_{j=1}^{t_i}S\left(-d_j^{(i)}\right),\quad \mathcal{G}_i:=\widetilde{M_i}\quad(i=0,\ldots,r+1) \tag{3.18}$$

とすれば，$\mathcal{G}_i$ は (3.2) の形のものになっている．定理 3.1 および公式 3.2 により，K 線形空間 $H^0(\mathcal{G}_i)$, $H^r(\mathcal{G}_i)$ の基底および K 線形写像 $H^0(f_i)$, $H^r(f_i)$ の表現行列を求めることができれば，$\dim_K H^q(\mathcal{F})$ を求めることができる．公式 3.2 の証明で同型 (3.6) を用いたが，この同型は $q=0,r$ のときも成立する．従って，$H^q(\mathcal{G}_i)$ は $H^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m))$ の形の K 線形空間の直和に分解する $(q=0,r)$．さらに，Čech コホモロジーを用いれば，K 線形空間 $H^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m))$ の基底を (有理) 単項式の形で求めることができる．従って，各 $H^q(\mathcal{G}_i)$ の基底を構成できる．また，各 K 線形写像 $H^q(f_i)=H^q(\widetilde{\varphi_i})$ の階数についてだが，φ_i の表現行列 A_i を上で求めた $H^q(\mathcal{G}_i)$ の基底に作用させることで K 線形写像 $H^q(f_i)$ の表現行列およびその階数が求まる．以上により，$\dim_K H^q(\mathcal{F})$ を計算できると結論付けることができる．上に述べた [丸山 02] による方法をアルゴリズムとして記述する．

アルゴリズム 3.3 射影空間 $\mathbb{P}^r$ 上の連接層係数コホモロジー群の次元を求めるアルゴリズムを次で与える：

Input: 正整数 t, 整数 q, d_j $(j=1,\ldots,t)$, 次数付き S 加群 $\bigoplus_{j=1}^{t}S(-d_j)$ の有限個の斉次元 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{t_0}$.

Output: 有限生成な次数付き S 加群 $M:=\left(\bigoplus_{j=1}^{t}S(-d_j)\right)\Big/\langle\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{t_0}\rangle_S$ から誘導される連接層を $\mathcal{F}:=\widetilde{M}$ としたときの q 次コホモロジー群 $H^q(\mathbb{P}^r,\mathcal{F})$ の K 線形空間としての次元.

Step 1. 次数付き S 加群 M の自由分解 (3.16) を計算する.

Step 2. 式 (3.18) のようにおき，Čech コホモロジーを用いて各 K 線形空間 $H^q(\mathcal{G}_i)$ の基底を生成する.

Step 3. Step 2 で求めた基底に，Step 1 で得られた行列 (3.17) を作用させて K 線形写像 $H^q(f_i)$ の階数を求める．公式 3.2 の等式の右辺を出力する.

注意 3.4 入力パラメータとして，Serre twist の回数 $n\in\mathbb{Z}$ も考えることができる．このときは，自由分解をとった後 $d_j^{(i)}$ をそれぞれ $n-d_j^{(i)}$ に置き換えて計算すればよい．出力は $\dim_K H^q(\mathbb{P}^r,\mathcal{F}(n))$ となる.

4 計算例

本節では, 3 節において述べた定理 3.1 および公式 3.2 に従い, 例を計算する. 例としては, 有理多様体[*3]の基本的な例である, 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内のねじれ 3 次曲線を考える.

例 4.1 (ねじれ 3 次曲線) 体 K を係数環として x, y, z, w を変数とする 4 変数多項式環 $S := K[x,y,z,w]$ を考える. 多項式環 S の斉次多項式 f, g, h を $f := xz - y^2$, $g := yw - z^2$, $h := xw - yz$ と定める. これらの斉次多項式 f, g, h で生成されたイデアル I を定義イデアルとする射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^3$ は **ねじれ 3 次曲線** とよばれる. 多様体 X の構造層を $\mathcal{O}_X$ と書く. 定理 3.1 および公式 3.2 を用いて, 0 次コホモロジー群 $H^0(X, \mathcal{O}_X(2))$ の K 線形空間としての次元を計算する. ここで 0 次コホモロジー群 $H^0(X, \mathcal{O}_X(2))$ は K 線形空間として大域切断 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(2))$ に同型であることに注意する. まず, 2 節で述べたように, 埋め込み $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ により K 線形空間の同型

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(2)) \cong H^q\left(\mathbb{P}^3, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}/\mathcal{I}_X)(2)\right) \quad (q = 0, 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

が成立する. ここで $\mathcal{I}_X$ は X のイデアル層であり, $i_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}/\mathcal{I}_X$ であることを用いた. また, 商層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}/\mathcal{I}_X$ は S/I から誘導された $\mathbb{P}^3$ 上の連接層 $\widetilde{S/I}$ に同型である.

Step 1. 加群 $M := S/I$ は次の形の (極小) 自由分解をもつ :

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{2} S(-3) \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j=1}^{3} S(-2) \xrightarrow{\varphi_1} S \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0,$$

ここで $\varphi_0 : S \to M = S/I$ は標準的な準同型であり φ_1, φ_2 の (標準的な基底に関する) 表現行列はそれぞれ

$$\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} xz - y^2 \\ yw - z^2 \\ xw - yz \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -z & -x & y \\ -w & -y & z \end{bmatrix} \right\}.$$

である. 3 節の記法 (3.18) に従って,

$$M_{-1} := M, \quad M_0 := S, \quad M_1 := \bigoplus_{j=1}^{3} S(-2),$$

[*3] 有理多様体とは, ある次元の射影空間と birational な代数多様体のことである. 特に, 有理曲線とは射影直線 $\mathbb{P}^1$ に birational な代数曲線のことであり, 代数閉体上で定義されている場合その種数は 0 である.

$$M_2 := \bigoplus_{j=1}^{2} S(-3), \quad M_i := 0\,(i=3,4),$$

$$\mathcal{G}_i := \widetilde{M_i(2)} = \widetilde{M_i}(2) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2)) \quad (i=0,1,2,3,4)$$

とする. ここで, $M_i(2) = M_i \otimes_S S(2)$ であり, $S(2)$ は S の次数付けを 2 だけずらした環である.

Step 2. 定理 3.1 および公式 3.2 に従い, K 線形空間 $H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_0\right)$, $H^3\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_4\right)$, $H^3\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_3\right)$ の基底を求める. また, Step 3 で K 線形写像 $H^0(f_1)$, $H^3(f_3)$ の表現行列を計算するので, 上記の 3 つの線形空間に加えて, $H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_1\right)$, $H^3\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_2\right)$ の基底も求める. このうち $H^3\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_4\right)$, $H^3\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_3\right)$, $H^3\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_2\right)$ は 0 である (このことから本来 Step 3 で求める $H^3(f_3)$ の階数は 0 であることもわかる). $H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_1\right)$ と $H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_0\right)$ の基底をそれぞれ $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ とし, Čech コホモロジーによってそれらを求めると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{x^{\ell_0} y^{\ell_1} z^{\ell_2} w^{\ell_3} \mathbf{e}_j \;;\; j \in \{1,2,3\},\ \ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 0,\ \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0\right\} \\
&= \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}, \\
\mathcal{W} &= \left\{x^{\ell_0} y^{\ell_1} z^{\ell_2} w^{\ell_3} \;;\; \ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 0,\ \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 2\right\} \\
&= \left\{x^2,\ xy,\ xz,\ xw,\ y^2,\ yz,\ yw,\ z^2,\ zw,\ w^2\right\}.
\end{aligned}$$

ここで, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は自由 S 加群 $M_1(2)$ における標準基底である ($\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は K 線形空間 $H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_1\right)$ の基底ではないことに注意する). 集合 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ の元を上に書かれた順で順序づけて $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{10}\}$ と書く.

Step 3. コホモロジー群の間の K 線形写像 $H^0(f_1) : H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_1\right) \longrightarrow H^0\left(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_0\right)$ の表現行列を求める. 線形写像 $H^0(f_1)$ は φ_1 から誘導されているので, 像 $\left(H^0(f_1)\right)(\mathbf{v}_i)$ を求めるには各 $\mathbf{v}_i$ に φ_1 の (次数付き S 加群の準同型としての) 表現行列 A_1 を作用させればよい. 実際,

$$\mathbf{v_1} \cdot A_1 = xz - y^2 = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{10}) \cdot {}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v_2} \cdot A_1 = yw - z^2 = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{10}) \cdot {}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v_3} \cdot A_1 = xw - yz = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{10}) \cdot {}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

従って,

$$
\begin{aligned}
&\left(H^{0}\left(f_{1}\right)\left(\mathbf{v}_{1}\right), H^{0}\left(f_{1}\right)\left(\mathbf{v}_{2}\right), H^{0}\left(f_{1}\right)\left(\mathbf{v}_{3}\right)\right) \\
&=\left(\mathbf{w}_{1}, \ldots, \mathbf{w}_{10}\right) \cdot {}^{t}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

式 (4.2) において得られた表現行列の階数は 3 であり, $\dim_K H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) = \dim_K H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{G}_0) - \mathrm{rk} H^0(f_1) = 10 - 3 = 7$ を得る.

5 Magma による実装

著者は, 3 節において述べた定理 3.1 および公式 3.2 をもとに記述したアルゴリズム 3.3 を関数として Magma [BCP97] に実装した. ただし, 加群の自由分解計算については組み込み関数 `FreeResolution` を用いた. 実装環境は次の通りである : Windows 8.1 Pro 64bit, 2.60GHz CPU (Intel Corei5), 8GB memory, Magma V2.20-10. 以下は, 4 節における例を計算する実行コードである:

```
> K:= Rationals(); // 基礎体 K
> r:= 3; // 射影空間の次元 r
> S<x,y,z,w>:= PolynomialRing(K,r+1); // K を係数環とし x, y, z, w を変
数とする多項式環 S
> f:= x*z - y^2; // 定義多項式 f, g, h
> g:= y*w - z^2;
> h:= x*w - y*z;
> n:= 2; // Serre twist の回数
> q:= 0; // 計算するコホモロジー群の次数
> M0:= GradedModule(S, [0]); // 以下で S/I を次数付き S 加群として定義する
> F:= [];
> F[1]:= M0![ f ];
> F[2]:= M0![ g ];
> F[3]:= M0![ h ];
> N:= sub< M0 | F >; // 部分加群 N
> M:= quo< M0 | N>; // S/I が次数付き S 加群 M として定義された
```

```
> load"comp_cohomology-1001.txt"; // コードの読み込み
Loading "C:/Kudo/coherent_cohomology/comp_cohomology-1001.txt"
7 // 出力
```

ソースコードは著者のホームページ*4において公開されている (ただし, 本稿の内容が発表された 2015 年 10 月 1 日時点のものから随時更新されている).

6 まとめと今後の課題

本稿を通して, [丸山 02] による coherent cohomology の計算方法を紹介し, 明示的なアルゴリズムの記述と Magma による実装を用いた計算例を与えた. [丸山 02] による方法は (主として) グレブナー基底, 加群の自由分解, Čech コホモロジーに基づいている.

この方法のアイディアにおいて計算対象のコホモロジー群と同型となる線形空間を構成したが, 著者はこの同型を用いれば, コホモロジー群の次元のみならず, 連接層の射が誘導するコホモロジー群の間の線形写像を何らかの基底のもと表現できると考えている. それが可能になれば, 例えば正標数の体上で定義された Abel 多様体に対する Frobenius の作用なども (多様体が多項式を用いて explicit に書けているときは) algorithmic に計算できると考えられる. Frobenius の作用といえば, 楕円曲線や超楕円曲線に対してその性質がよく調べられているが, modular 曲線や K3 曲面などにおいてはどのような性質が成立するかは興味深いところである. 素体の標数を動かしたときに不変量がどのような挙動をみせるかを調べるためには, そういった algorithmic な計算や計算代数システムへの実装は有効な手段となるであろう. 有限生成な次数付き加群の圏において与えられた準同型に対して, 誘導されるコホモロジー群の射を計算するアルゴリズムを構成することを著者の今後の課題としたい.

また, [丸山 02] による手法は有限生成次数付き加群の自由分解計算を用いている. 自由分解計算は, 一般には指数時間的である. しかし, 自由分解に現れる Betti 数などを入力パラメータとすれば, この計算法は多項式時間的になると考えられる. これらを入力パラメータとみたときの計算量評価, 実装の改善を行うことも今後の課題である.

謝辞 研究集会「計算代数システムによる新しい数学の開拓と進展」主催者並びにプログラム責任者の皆様方に御礼申し上げます. また, 本研究について指導いただいた九州大学の田口雄一郎先生, 安田雅哉先生にも感謝いたします.

*4 http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~m-kudo/

参考文献

[BCP97] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, Journal of Symbolic Computation **24**, 235–265 (1997).

[CLO98] D. Cox, J. Little, D. O'shea, *Using Algebraic Geometry*, GTM **185**, Springer-Verlag, New York – Berlin (1998).

[DE02] W. Decker, D. Eisenbud, Sheaf algorithms using the Exterior algebra, In: *Computations in Algebraic Geometry with Macaulay2*, Springer Algorithms and Computation in Mathematics Series **8**, 215–247, Springer-Verlag (2002).

[工藤 15] M. Kudo, *On the computation of the dimensions of the cohomology groups of coherent sheaves on a projective space*, Kyushu University, 2015/2/6 (2015) available at
`http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~m-kudo/`.

[丸山 02] 丸山正樹, グレブナー基底とその応用, 共立出版 (2002).

[Ser55] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, The Annals of Mathematics **61** (2), 197–278 (1955).