数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 1-6

共役類の積とウィッテンL-関数の特殊値との関係について

東京工業大学大学院　理工学研究科数学専攻　閔　正媛 *
Jeongwon Min
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

1　ウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数

まず, ウィッテンゼータ関数とウィッテンゼータ関数は次のように定義される.

定義 1.

(1) コンパクト位相群 G についてウィッテンゼータ関数は次のように定義される (Witten [7]):

$$\zeta_G^W(s):=\sum_{\rho\in\widehat{G}}(\deg\rho)^{-s},$$

ただし $\widehat{G}$ は G のユニタリ双対である.

(2) コンパクト位相群 G 及び n 個の共役類 $C_1, \cdots, C_n\in\mathrm{Conj}(G)$ についてウィッテンL-関数は次のように定義される (落合-黒川 [4]):

$$\zeta_G^W(s;C_1,\cdots,C_n)=\sum_{\rho\in\widehat{G}}\frac{\chi(C_1)}{\deg\rho}\cdots\frac{\chi(C_n)}{\deg\rho}(\deg\rho)^{-s},$$

ただし $\widehat{G}$ は G のユニタリ双対であり, $\chi(C)$ は $g\in C$ における指標, つまり $\mathrm{trace}(\rho(g))$ のことである. G の共役類 $\{1\}$ については $\chi(\{1\})=\deg\rho$ となるので, 定義から $\zeta_G^W(s;\{1\})=\zeta_G^W(s)$ となることがわかる.

ここでウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数の例をいくつか取り上げたい.

例 1. $G=S_3$ のとき, ウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数は次のように表される. S_3 の各共役類に関する指標は次のように表される:

* 日本学術振興会特別研究員 DC

	(1)	(12)	(123)
Trivial	1	1	1
Alternating	1	-1	1
Standard	2	0	-1

定義に従ってウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数を求めてみると次のようになる.

(1) $\zeta_{S_3}^W(s;\,(1))=\zeta_{S_3}^W(s)=2+2^{-s}$,

(2) $\zeta_{S_3}^W(s;\,(12))=0$,

(3) $\zeta_{S_3}^W(s;\,(123))=2-2^{-s-1}$.

例 2. $G=SU(2)$ の場合について考える. $SU(2)$ に関するウィッテンゼータ関数 $\zeta_{SU(2)}^W(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と一致する. また, $SU(2)$ の元 g は $\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{smallmatrix}\right)$, $0\le\theta\le\pi$ と共役になることから, $SU(2)$ の共役類と $\theta\in[0,\,\pi]$ を対応づけることができる. このとき, $SU(2)$ の共役類 C_j に対応する $\theta\in[0,\,\pi]$ を θ_j とおくと, $SU(2)$ のウィッテンL-関数は次のようになる (詳細は落合-黒川 [4], 関 [5] 参照).

$$\zeta_{SU(2)}^W(s;\,C_1,\,\cdots,\,C_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta_1)}{\sin\theta_1}\cdots\frac{\sin(n\theta_r)}{\sin\theta_r}n^{-s-r}.$$

ただし, $\theta=0$ または π のとき, $\frac{\sin(n\theta)}{n\sin\theta}$ を次のように考えることにする.

$$\frac{\sin(n\theta)}{n\sin\theta}=\begin{cases}1 & \theta=0\\ (-1)^{n-1} & \theta=\pi.\end{cases}$$

2 ウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数の特殊値

事実 1. G が有限群の場合, G の共役類 C について $\zeta_G^W(-2;\,C)$ は次のようになる:

$$\zeta_G^W(-2;\,C)=\begin{cases}|G| & C=\{1\}\text{ のとき},\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}$$

これは指標の直交性によって得られるものである. もっと詳しく述べると次のようなことである. ここで $g\in C$ である.

$$\begin{aligned}\zeta_G^W(-2;\,C)&=\sum_{\rho\in\widehat{G}}\frac{\mathrm{trace}(\rho(g))}{\deg(\rho)}\deg(\rho)^2\\&=\sum\mathrm{trace}(\rho(g))\deg(\rho)\\&=\sum\mathrm{trace}(\rho(g))\overline{\mathrm{trace}(\rho(1))}\\&=\begin{cases}|G| & C=\{1\}\text{ のとき},\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}\end{aligned}$$

事実 2.

(1) $G=SU(2)$ あるいは $SU(3)$ のときは, $s=-2$ はウィッテン L-関数 $\zeta_G^W(s;\, C)$ の零点となる.

(2) $G=SU(2)$ の場合, $s=-2$ はウィッテン L-関数 $\zeta_G^W(s;\, C_1,\, C_2)$ の零点となる.

(3) $G=SU(2)$ の場合, 必ずしもウィッテン L-関数 $\zeta_G^W(s;\, C_1,\, \cdots,\, C_n)$ が $s=-2$ を零点として持つとは限らない.

3 ウィッテン L-関数の特殊値と共役類の積との関係

我々は次のような研究を行っていた.

定理 1 (関 [5]). $n=3$ のとき, $\zeta_{SU(2)}^W(s;\, C_1,\, C_2,\, C_3)$ に関して次が成り立つ:

(1) -4 以下のすべての負の偶数について, $\zeta_{SU(2)}^W(m;\, C_1,\, C_2,\, C_3)=0$ が成り立つ.

(2) 特に $\zeta_{SU(2)}^W(-2;\, C_1,\, C_2,\, C_3)$ は次のようになる.

$$\zeta_{SU(2)}^W(-2;\, C_1,\, C_2,\, C_3)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} & (\theta_j)_{1\le j\le 3}\in \mathrm{Int}(V),\\ \dfrac{\pi}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} & (\theta_j)_{1\le j\le 3}\in \mathrm{Int}(\cup(S_k\cap V)),\\ 0 & \text{その他},\end{cases}$$

ただし S_k と V は次のようなものである.

$$V=\begin{array}{l}\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1+\theta_2+\theta_3\le 2\pi\}\\ \cap\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1+\theta_2-\theta_3\ge 0\}\\ \cap\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1-\theta_2-\theta_3\le 0\}\\ \cap\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1-\theta_2+\theta_3\ge 0\},\end{array}$$

$$\begin{aligned}S_1&=\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1+\theta_2-\theta_3=0\}\\ S_2&=\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1-\theta_2-\theta_3=0\}\\ S_3&=\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1-\theta_2+\theta_3=0\}\\ S_4&=\{(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3)\mid \theta_1+\theta_2+\theta_3=2\pi\}.\end{aligned}$$

また, $SU(2)$ の共役類の積について次のようなことが Jeffrey と Weitsman[2] により研究されていた:

命題 1. $C_j\ (j=1,\, 2,\, 3)$ に対応する $\theta\in[0,\, \pi]$ を θ_j とおく. 言い換えると, $C_j\ni g_j\sim\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$ ということである. このとき, $\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3\in[0,\, \pi]$ について次のことが言える:

$$C_1C_2C_3\ni I$$

となることと

$$\begin{aligned}
&\theta_1+\theta_2+\theta_3 \le 2\pi,\\
&-\theta_1-\theta_2+\theta_3 \le 0,\\
&\theta_1+\theta_2-\theta_3 \le 0,\\
&\theta_1-\theta_2-\theta_3 \le 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

は同値である. ここで, 共役類の積 C_1C_2 は

$$C_1C_2 := \{g_1g_2 \mid g_1 \in C_1,\ g_2 \in C_2\}$$

と定義されるものである.

ところが, 不等式系 (1) と定理 1 の V は同じである. さらに, 命題 1 の一般化についても Jeffery と Mare[3] により研究されている. これらに着目し, 我々は共役類の積とウィッテン L-関数の特殊値との関係について調べた.

命題 2 (命題 1 の一般化). 共役類 C_j に対応する $\theta_j \in [0,\pi]$ $(j=1,2,\cdots,n)$ について,

$$C_1\cdots C_n \ni I$$

であるための必要十分条件は次のようなものとなる:

(1) n が偶数のとき,

$$S_n^{2k-1}(\{\theta_j\}) \le (n-2k)\pi, \quad k=1,\,2,\,\cdots,\,\frac{n}{2}$$

であり,

(2) n が奇数のときは

$$S_n^{2k}(\{\theta_j\}) \le (n-2k-1)\pi, \quad k=0,\,1,\,\cdots,\,\frac{n-1}{2}$$

である. ただし, $S_n^m(\{\theta_j\})$ は m 個の $-\theta_j$ たちと $n-m$ 個の θ_j たちを足し合わせたものである.

定理 2. $SU(2)$ の n 個 (n は 3 以上の奇数) 共役類 $C_1,\,C_2,\,\cdots,\,C_n$ について, もし

$$C_1\cdots C_n \not\ni I$$

ならば,

$$\zeta^W_{SU(2)}(-(n-1);\,C_1,\,\cdots,\,C_n)=0$$

となる.

定理 3. $SU(2)$ の n 個 (n は 4 以上の偶数) の共役類 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ について, もし

$$C_1 \cdots C_n \not\ni I$$

ならば,

$$\zeta^W_{SU(2)}(-(n-2); C_1, \cdots, C_n) = 0$$

となる.

注意. 上の定理 2 と定理 3 の対偶をとると次のようになる:

(1) $SU(2)$ の 4 個以上の共役類 $C_1, \cdots, C_n$(ただし n は偶数) について

$$\zeta^W_{SU(2)}(-(n-2); C_1, \cdots, C_n) \neq 0$$

が成り立つならば,

$$C_1 \cdots C_n \ni I$$

となる.

(2) $SU(2)$ の 3 個以上の共役類 $C_1, \cdots, C_n$(ただし n は奇数) について

$$\zeta^W_{SU(2)}(-(n-1); C_1, \cdots, C_n) \neq 0$$

が成り立つならば,

$$C_1 \cdots C_n \ni I$$

となる.

つまり, 定理 2 と定理 3 は, $SU(2)$ のウィッテン L-関数の特殊値を調べることによって $SU(2)$ の共役類の積の様子がわかるということを示唆している.

定理 2 と定理 3 は命題 2 とベルヌーイ多項式を使って証明できる. 詳細は閔 [6] を参照.

参考文献

[1] S. Agnihotri and C. Woodward, Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 817-836.

[2] L. Jeffrey and J. Weitsman, Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula. Commun. Math. Phys. **150** (1992), 593-630.

[3] L. Jeffrey and A. Mare, Products of conjugacy coasses in $SU(2)$, Canad. Math. Bull. **48** (2005), no. 1, 90-96.

[4] N. Kurokawa and H. Ochiai, Zeros of Witten zeta functions and applications, Kodai Math. J. **36** (2013), 440-454.

[5] J. Min, Zeros and special values of Witten zeta functions and Witten L- functions, J. Number Theory **134** (2014), 240-257.

[6] J. Min, Vanishing of Witten L-functions and products of conjugacy classes, preprint.

[7] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, Comm. Math. Phys. **141** (1991) 153-209.