数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 12-24

原始的Dirichlet L-関数の単純零点について

宗野 惠樹 (東京電機大学情報環境学部)

概 要

本稿では, [4] で与えられる L-関数の零点の相互関係の公式を用いて, 一般 Riemann 予想 (GRH) の仮定の下で原始的指標に付随する Dirichlet L-関数の零点のうち少なくとも 93.22%が単純零点であることを示す.

1 序論

Riemann ゼータ関数や Dirichlet L-関数の自明でない零点は全て $\mathrm{Re}(s)=1/2$ の直線上にあり, 更にこれらの零点は全て単純であると予想されている. 後半の予想のことを単純零点予想 (Simple Zeros Conjecture, SZC) という. この予想に対する最も標準的なアプローチの 1 つとして, 関連する L-関数における Riemann 予想 (RH) を仮定した上での零点の相互関係 (pair correlation) の公式の利用が挙げられる. 論文 [5] において, H.L. Montgomery は Riemann 予想の仮定下で Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上の零点に関する相互関係の公式を得, それを利用することで $\zeta(s)$ の自明でない零点全体の少なくとも 2/3 は単純零点であることを証明した. 数年後, Montgomery と Taylor は変分法による議論を用いてこの結果を改良し, 単純零点の割合が $3/2-2^{-1/2}\cot(2^{-1/2})-\epsilon=0.67250\cdots$ 以上であることを示した ([6]). 他の L-関数における相互関係の研究も非常に多い. その一例として, Özlük による Dirichlet L-関数の零点の相互関係の研究が挙げられる. 彼は一般 Riemann 予想 (Generalized Riemann Hypothesis, GRH) の仮定の下, Dirichlet L-関数の自明でない零点に関する重さ付きの相互関係の公式を構成した. この「重さ」は, 零点のうち実軸に近いものを特に強調する. この公式を利用することで, Özlük は指標 (原始的なものに限定しない) と導手に関して平均を取ると, Dirichlet L 関数の零点のうち少なくとも 11/12 は単純零点であることを示した.

近年, Conrey, Iwaniec, Soundararajan の 3 氏は漸近的な大きな篩 (asymptotic large sieve) とよばれる新たな手法を開発した ([1]). 大雑把に言うと, 彼らの手法は Dirichlet 指標 (原始的なものに限る) の線型形式に対する大きな篩による不等式を漸近的な等式にしたものである. この手法を用いることで, 原始的 Dirichlet L-関数の零点に関する重要な結果が既にいくつか得られている. その一例として, Chandee, Lee, Liu and Radziwill らによる単純零点に関する結果 ([4]) を紹介しよう. 以下, GRH は常に仮定する. Φ は実数値の滑らかな関数で, 開区間 (a,b) $(0<a<b<\infty)$ にコンパクト台を持つものとし,

$$\widehat{\Phi}(s)=\int_0^\infty \Phi(x)x^{s-1}dx$$

をその Mellin 変換とする.

$$N_\Phi(Q)=\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\ q)}\sum_{\gamma_\chi}\left|\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\right|^2$$

と置く. ここで, W は $(1,2)$ に台を持つ滑らかな関数で, 2 番目の和は mod q の原始的指標全体を渡り, 最後の和は $L(s,\chi)$ の自明でない零点 $1/2+i\gamma_\chi$ 全体を渡る. このとき,

$$N_\Phi(Q)\sim\frac{A}{2\pi}Q\log Q\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\Phi}(ix)\right|^2dx \tag{1.1}$$

となる ([4], Lemma 1). ここで

$$A=\widehat{W}(1)\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}\right). \tag{1.2}$$

$Q>1$ と $\alpha\in\mathbf{R}$ に対し, 関数 F_Φ を

$$F_\Phi(Q^\alpha;W)=\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q\frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}\left|\sum_{\gamma_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)Q^{i\gamma_\chi\alpha}\right|^2 \tag{1.3}$$

で定義する. [4] では, asymptotic large sieve を用いることで, $\epsilon>0$ に対して漸近公式

$$\begin{aligned}F_\Phi(Q^\alpha;W)=&(1+o(1))\left(f(\alpha)+\Phi(Q^{-|\alpha|})^2\log Q\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\Phi}(ix)\right|^2dx\right)^{-1}\right)\\&+O(\Phi(Q^{-|\alpha|})\sqrt{f(\alpha)\log Q})\end{aligned} \tag{1.4}$$

が $Q\to\infty$ のとき $|\alpha|\leq 2-\epsilon$ で一様に成り立つことが示された. ここで,

$$f(\alpha):=\begin{cases}|\alpha| & (|\alpha|\leq 1)\\ 1 & (|\alpha|>1).\end{cases} \tag{1.5}$$

系として, 原始的 Dirichlet L-関数の零点のうち少なくとも $11/12=0.917\cdots$ が (ある意味で) 単純であることが示される. この「ある意味」とは, 具体的には漸近的な不等式

$$\sum_q\frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}\sum_{\substack{\gamma_\chi\\ \mathrm{simple}}}\left|\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\right|^2\geq\left(\frac{11}{12}+o(1)\right)N_\Phi(Q) \tag{1.6}$$

が $Q\to\infty$ のとき成り立つことを言う. ただし, 関数 Φ は

$$\widehat{\Phi}(ix)=(\sin x/x)^2. \tag{1.7}$$

となるように取る. この Φ は滑らかさに関する条件を満たさないが, $\widehat{\Phi}(ix)\ll|x|^{-2}$ という評価から [4] の証明に必要な要件を満たしており, 漸近公式に適用できる. 本稿でも同じ関数を用いる.

本稿の主定理は [4] の結果を改良したものである.

Theorem 1.1. *GRH を仮定すると, $Q\to\infty$ のとき*

$$\sum_q\frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(mod\ q)}\sum_{\substack{\gamma_\chi\\ simple}}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2\geq(M+E+o(1))N_\Phi(Q). \tag{1.8}$$

ここで, M と E は

$$\begin{aligned}M:=&1-\int_{-\infty}^{\infty}g(\beta)\left(1-\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\right)^2\right)d\beta\\=&0.93228262\cdots,\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}E:=&\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q\frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(mod\ q)}\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma'_\chi\\ \gamma_\chi\neq\gamma'_\chi}}g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma'_\chi)\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma'_\chi)\\&\geq 7.686\times10^{-10}\end{aligned} \tag{1.10}$$

で与えられる. 関数 g は

$$\begin{aligned}g(x)=&\frac{\sin^2 1}{16c_1^2(1-\cos 1)^2}\left(\frac{-\frac{2(1-\cos 1)}{\sin 1}(\cos 2\pi x+1)+4\pi x\sin 2\pi x}{4\pi^2x^2-1}c_1\right.\\&\left.-\frac{\frac{2\sqrt{3}(1+\cos\sqrt{3})}{\sin\sqrt{3}}(\cos 2\pi x-1)+4\pi x\sin 2\pi x}{4\pi^2x^2-3}c_2\right)^2,\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$c_1 = \left(\cos 1 - \frac{(1-\cos 1)(2+\cos\sqrt{3})\sin\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sin 1(1+\cos\sqrt{3})} - \frac{(1-\cos 1)(4\sqrt{3}-3\sqrt{3}\sin 1-\sin\sqrt{3})}{3\sqrt{3}\sin 1}\right)^{-1} \tag{1.12}$$
$$= 6.757821\cdots,$$

$$c_2 = \frac{(1-\cos 1)\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin 1(1+\cos\sqrt{3})}c_1 = 2.506205\cdots. \tag{1.13}$$

で定義されるものである.

論文 [4] では, $g(x)$ の代わりに関数 $r(x) = (\sin 2\pi x/2\pi x)^2$ が用いられている. $r(x)$ は Fourier 変換が分かり易く使いやすいという利点があるが, (1.9) で定義される主項を最大にするという目的のためには $g(x)$ こそが最適である. この関数を得るために, 再生核 Hilbert 空間の理論を用いる. 具体的には, Hilbert 空間の再生核が満たす微分方程式を解き, 原点で正規化することで (1.11) の関数が得られる. Riemann ゼータ関数の場合の類似の議論が [2] でなされているため, ページの都合上細かい記述は省略する.

本稿ではむしろ (1.10) で定義される off-diagonal term E の評価を強調したい. E の評価は非常に小さいものの, main term である M はこれ以上改善できないため, それなりの価値があると思われるからである. E の評価には主に Cheer と Goldston のアイデア ([3]) を用いる. このアイデアを簡単に説明する. 関数 $g(x)$ の正の零点を $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$ と表す. これらの零点は $k/2<\lambda_k<(k+1)/2$ $(k=1,2,3,\cdots)$ および $\lambda_k - k/2 \searrow 0$ $(k\to\infty)$ を満たす. $\gamma_d < \gamma_d^+ < \gamma_d^{++}$ を $L(s,\chi)$ の相異なる隣接する零点で, 実軸に近いものとする. 仮に $((\gamma_d^+ - \gamma_d)\log Q)/(2\pi)$ と $((\gamma_d^{++} - \gamma_d^+)\log Q)/(2\pi)$ がそれぞれ λ_k, λ_l に非常に近いならば, (γ_d, γ_d^+), $(\gamma_d^+, \gamma_d^{++})$ の和 (1.10) への寄与は極めて小さくなる. しかしながら, この場合 $((\gamma_d^{++} - \gamma_d)\log Q)/(2\pi)$ は $\lambda_k+\lambda_l$ に非常に近いため, λ_{k+l} からは少し離れる. よって $(\gamma_d, \gamma_d^{++})$ の寄与はそれなりのものとなり, このような零点の組の寄与を集めることで E の下からの評価が得られる.

2 証明の準備

$g(x) \in L^1(\mathbf{R})$ は正値の偶関数で, $g(0)=1$ を満たすものとする. 更に, Fourier 変換 $\tilde{g}(u)$ は $[-2,2]$ に台を持つものとする. まず, 相互関係の関数の定義 (1.3) より,

$$\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\gamma_\chi, \gamma_\chi'} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\Phi(Q^\beta; W)\tilde{g}(\beta)d\beta. \tag{2.1}$$

相互関係に関する多くの論文に見られるように, 漸近公式 (1.4) が $|\alpha|\le 2$ で成り立つとしても問題ないので, 以下それを前提とする. このとき (2.1) の右辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\Phi(Q^\beta; W)\tilde{g}(\beta)d\beta \sim \int_{-2}^{2} f(\beta)\tilde{g}(\beta)d\beta + (\log Q)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\Phi}(ix)\right|^2 dx\right)^{-1}\int_{-2}^{2}\Phi(Q^{-|\beta|})^2\tilde{g}(\beta)d\beta. \tag{2.2}$$

(2.2) の右辺第 2 項は, 簡単な計算により $\tilde{g}(0)$ となることが分かる. よって,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} F_\Phi(Q^\beta;W)\tilde{g}(\beta)d\beta &\sim \tilde{g}(0)+\int_{-2}^{2} f(\beta)\tilde{g}(\beta)d\beta\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\beta)+f(\beta))\tilde{g}(\beta)d\beta\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\left(\delta(\beta)-\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\right)^2\right)\right)g(\beta)d\beta\\ &=g(0)+\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)\left(1-\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\right)^2\right)d\beta.\end{aligned}\tag{2.3}$$

上の計算で, Parseval の定理および f の Fourier 変換が

$$\tilde{f}(\beta)=\delta(\beta)-\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\right)^2$$

で与えられることを用いた. (2.1) と (2.3) より, 次が得られる:

Lemma 2.1. *GRH* を仮定する. 上の条件を満たす任意の関数 g に対し,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(mod\ q)}\sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi'}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\\ &=1+\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)\left(1-\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\right)^2\right)d\beta+o(1).\end{aligned}\tag{2.4}$$

$L(s,\chi)$ の零点 $\rho_\chi=1/2+i\gamma_\chi$ の重複度を m_{ρ_χ} と表す. $g(0)=1$ であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma_\chi\\ \text{simple}}}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 &\geq \sum_{\gamma_\chi}(2-m_{\rho_\chi})\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2\\ &=2\sum_{\gamma_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2-\sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi'} g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')\\ &\quad+\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma_\chi'\\ \gamma_\chi\neq\gamma_\chi'}} g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi').\end{aligned}$$

よって, $N_\Phi(Q)$ の定義と (2.4) より,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod } q)}\sum_{\substack{\gamma_\chi\\ \text{simple}}}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2\\ &\geq \frac{2}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod } q)}\sum_{\gamma_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2\\ &\quad-\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod } q)}\sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi'} g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')\\ &\quad+\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod}q)}\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma_\chi'\\ \gamma_\chi\neq\gamma_\chi'}} g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')\\ &=1-\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)\left(1-\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\right)^2\right)d\beta+E\end{aligned}\tag{2.5}$$

を得る. ここで, E は (1.10) で定義されるものである. (1.11) で定義される関数 g により, (2.5) の右辺第 2 項は最小になることが分かる (詳細は省略).

3 Eの下からの評価

以下, g は (1.11) で定義される関数とする. 前章の結論として,

$$\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}^{*} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{simple}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \geq M + E + o(1) \tag{3.1}$$

が得られた. ここで

$$M = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)\left(1 - \left(\frac{\sin \pi\beta}{\pi\beta}\right)^2\right) d\beta = 0.93228262\cdots$$

であり, E は (1.10) で定義されるもの (off-diagonal term). E をなるべく大きく評価したい. まず, $L(s,\chi)$ の相異なる零点 (各々の零点の位置のこと) に関して次のことが成り立つ:

Lemma 3.1. *GRH* を仮定すると, $Q \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi(mod\ q)}^{*} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ distinct}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \geq \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}E + \frac{1}{2} + o(1). \tag{3.2}$$

Proof. まず, 次の不等式から始める:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{simple}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 &\leq \frac{1}{2}\sum_{\gamma_\chi} \frac{(2-m_{\rho_\chi})(3-m_{\rho_\chi})}{m_{\rho_\chi}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\gamma_\chi} m_{\rho_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 - \frac{5}{2}\sum_{\gamma_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 + 3\sum_{\gamma_\chi}\frac{1}{m_{\rho_\chi}}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2.\end{aligned} \tag{3.3}$$

また,

$$\sum_{\gamma_\chi}\frac{1}{m_{\rho_\chi}}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 = \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2$$

であるから, (3.3) より,

$$\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \geq \frac{1}{3}\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{simple}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 + \frac{5}{6}\sum_{\gamma_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 - \frac{1}{6}\sum_{\gamma_\chi} m_{\rho_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2. \tag{3.4}$$

これと

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma_\chi} m_{\rho_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 &= \sum_{\substack{\gamma_\chi, \gamma'_\chi \\ \gamma_\chi = \gamma'_\chi}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma'_\chi) \\ &\leq \sum_{\gamma_\chi, \gamma'_\chi} g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma'_\chi)\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma'_\chi)\end{aligned}$$

を合わせると,

$$\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \geq \frac{1}{3}\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{simple}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 + \frac{5}{6}\sum_{\gamma_\chi}\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 - \frac{1}{6}\sum_{\gamma_\chi, \gamma'_\chi} g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma'_\chi)\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma'_\chi)$$

が得られる. よって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \\
&\geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{simple}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \\
&\quad + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\gamma_\chi} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \\
&\quad - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi'} g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi').
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$N_\Phi(Q)$ の定義より右辺第 2 項は 5/6 となる. 更に, (3.1) より,

$$
\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ \text{simple}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \geq M + E + o(1)
$$

であり, (2.4) および M の定義より,

$$
\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi'} g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \sim 2 - M.
$$

これらを (3.5) に代入して (3.2) を得る. □

$L(s,\chi)$ の零点のうち, 長方形 $\{s=\sigma+it\,|0<\sigma<1, -T<t<T\}$ の内部にあるものの個数を $N(\chi,T)$ とする. χ の導手を q とするとき,

$$
N(\chi,T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi e} + O\left(\frac{\log qT}{\log\log(qT+3)}\right)
$$

が $qT>1$ で一様に成り立つ ([8]). したがって

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ |\gamma_\chi|>1/2 \\ \text{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 &\leq \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ |\gamma_\chi|>1/2}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \widehat{\Phi}(it)^2 dN(\chi,t) \\
&= \frac{\log q}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\widehat{\Phi}(ix)^2 dx + O\left(\frac{\log q}{\log\log q}\right) \\
&= \frac{\log q}{2\pi}\int_{|x|\geq\frac{1}{2}}\widehat{\Phi}(ix)^2 dx + O\left(\frac{\log q}{\log\log q}\right).
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
&\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ |\gamma_\chi|>1/2 \\ \text{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \\
&\leq \sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\phi^*(q)\left(\frac{\log q}{2\pi}\int_{|x|\geq\frac{1}{2}}\widehat{\Phi}(ix)^2 dx + O\left(\frac{\log q}{\log\log q}\right)\right) \\
&= \delta_{\frac{1}{2}} N_\Phi(Q)(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

ここで

$$\delta_{\frac{1}{2}} := \left(\int_{|x|\geq\frac{1}{2}} \widehat{\Phi}(ix)^2 dx\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Phi}(ix)^2 dx\right) = 0.547905\cdots$$

である．上の計算で, 漸近的な関係

$$N_\Phi(Q) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Phi}(ix)^2 dx \sum_q W(q/Q)\frac{\phi^*(q)}{\phi(q)}\log q$$

([4], (2.1)) を用いた．したがって, 不等式

$$\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ |\gamma_\chi|>1/2 \\ \mathrm{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \leq \delta_{\frac{1}{2}} + o(1) \tag{3.6}$$

が成り立つので, (3.2) と (3.6) を合わせて,

$$\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \sum_{\substack{\gamma_\chi \\ |\gamma_\chi|\leq 1/2 \\ \mathrm{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \geq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}} + o(1) \tag{3.7}$$

を得る．領域 $|\mathrm{Im}(s)| \leq 1/2$ における $L(s,\chi)$ の相異なる零点の個数を $N_d(\chi)$ と表す．すると,

$$\sum_{\substack{\gamma_\chi \\ |\gamma_\chi|\leq 1/2 \\ \mathrm{distinct}}} \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)^2 \leq N_d(\chi)$$

であるから, (3.7) より,

$$\frac{1}{N_\Phi(Q)}\sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} N_d(\chi) \geq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}} + o(1). \tag{3.8}$$

ここで, 個々の L-関数の相異なる零点についての情報が必要となる．必要があれば極限を取ることにより, $W(x)$ は $[1,2]$ 上の特性関数であるとしてよい．このとき $\widehat{W}(1) = 1$. まず, (3.8) より, 次の補題が得られる:

Lemma 3.2. 任意の $0 < \mu < \frac{1}{3}$ に対し, $Q \leq q \leq 2Q$ なる q であって

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi(mod\ q)} N_d(\chi) \geq \frac{1-\mu}{2\pi}\phi(q)\log q \tag{3.9}$$

を満たすものの個数は少なくとも

$$\left\{\left(\frac{M+1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{2A\pi}{3\mu} - \frac{353711}{1852200\mu} - \frac{397(1-\mu)}{1225\mu} + o(1)\right\} Q.$$

Proof. $L(s,\chi)$ の $|\mathrm{Im}(s)| \leq 1/2$ における自明でない零点の個数を $N(\chi)$ と表す．すると,

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} N(\chi) = \frac{\phi^*(q)}{2\pi}\log q + O\left(\frac{\phi^*(q)\log q}{\log\log q}\right).$$

ここで, $\phi^*(q)$ は mod q の原始的指標の個数．$0 < \mu < 1/3$ なる μ に対し，　U_Q を $Q \leq q \leq 2Q$ なる q のうち

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} N_d(\chi) \geq \frac{1-\mu}{2\pi}\phi(q)\log q$$

を満たすものの集合とし, L_Q を $Q \leq q \leq 2Q$ なる q のうち上の条件を満たさないものの集合とする．n 個の相異なる素数 $p_1,\cdots,p_n$ に対し, q $(Q \leq q \leq 2Q)$ であって $p_1,\cdots,p_l \nmid q$, $p_{l+1},\cdots,p_m \| q$,

$p_{m+1}^2, \cdots, p_n^2 | q$ $(0 \le l \le m \le n)$ を満たすものの個数は漸近的に $(1-1/p_1)\cdots(1-1/p_l)(1/p_{l+1} - 1/p_{l+1}^2)\cdots(1/p_m - 1/p_m^2)(1/p_{m+1}^2)\cdots(1/p_n^2)\, Q$ である．また, $\phi^*(q)$ と $\phi(q)$ はそれぞれ

$$\phi^*(q) = q\prod_{p||q}\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod_{p^2|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2, \quad \phi(q) = q\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

で与えられる．よって, そのような q に対し,

$$\phi^*(q) \le \frac{p_{l+1}-2}{p_{l+1}-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_m-2}{p_m-1}\cdot\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{p_n-1}{p_n}\phi(q)$$

となる．そのような q の集合を $T = T(p_1,\cdots,p_l;p_{l+1},\cdots,p_m;p_{m+1},\cdots,p_n)$ とする．上の事実と自明な不等式 $N_d(\chi) \le N(\chi)$ により, T の元の寄与は

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\in T}\frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}N_d(\chi)\\
&\le \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\left(\frac{1}{p_{l+1}}-\frac{1}{p_{l+1}^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{p_m^2}\right)\frac{1}{p_{m+1}^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p_n^2}\\
&\quad\times\frac{p_{l+1}-2}{p_{l+1}-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_m-2}{p_m-1}\cdot\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{p_n-1}{p_n}\cdot\frac{1}{2\pi}Q\log Q\,(1+o(1))\\
&=: B(p_1,\cdots,p_l;p_{l+1},\cdots,p_m;p_{m+1},\cdots,p_n)\cdot\frac{1}{2\pi}Q\log Q\,(1+o(1))
\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}
&B(p_1,\cdots,p_l;p_{l+1},\cdots,p_m;p_{m+1},\cdots,p_n)\\
&\quad=\frac{(p_1-1)\cdots(p_l-1)}{p_1\cdots p_l}\cdot\frac{(p_{l+1}-2)\cdots(p_m-2)}{p_{l+1}^2\cdots p_m^2}\cdot\frac{(p_{m+1}-1)\cdots(p_n-1)}{p_{m+1}^3\cdots p_n^3}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_1 = 2,\ \mathcal{P}_2 = 3,\ \mathcal{P}_3 = 5, \cdots$ を素数を並べたものとし,

$$S_n = \sum_{\substack{(l,m)\\ \mathrm{s.t.} 0\le l\le m\le n}}\ \sum_{\{p_1,\cdots,p_n\}=\{\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_n\}}B(p_1,\cdots,p_l;p_{l+1},\cdots,p_m;p_{m+1},\cdots,p_n)$$

とする．$\{S_n\}$ は次の規則によって得られる:

$$S_1 = B(2;\emptyset;\emptyset)+B(\emptyset;2;\emptyset)+B(\emptyset;\emptyset;2) = \frac{1}{2}+0+\frac{1}{8} = \frac{5}{8},$$

$$S_{n+1} = \left(\frac{\mathcal{P}_{n+1}-1}{\mathcal{P}_{n+1}}+\frac{\mathcal{P}_{n+1}-2}{\mathcal{P}_{n+1}^2}+\frac{\mathcal{P}_{n+1}-1}{\mathcal{P}_{n+1}^3}\right)S_n = \frac{\mathcal{P}_{n+1}^3-\mathcal{P}_{n+1}-1}{\mathcal{P}_{n+1}^3}S_n.$$

今, $n=4$ $(S_4 = \frac{26197}{52920})$ とし, q が $2,3,5,7$ でそれぞれ何回割れるかで場合分けを行う．$q \in [Q,2Q]$ のうち次の条件のどれかを満たすものの集合を $\mathcal{E}$ と表す:

a) $2,3,5,7 \not| q$ $\quad(|T(2,3,5,7;\emptyset;\emptyset)| \sim \frac{8}{35}Q,\ B(2,3,5,7;\emptyset;\emptyset) = \frac{8}{35})$,
b) $2,3,5 \not| q, 7||q$ $\quad(|T(2,3,5;7;\emptyset)| \sim \frac{8}{245}Q,\ B(2,3,5;7;\emptyset) = \frac{4}{147})$,
c) $2,3,5 \not| q, 7^2|q$ $\quad(|T(2,3,5;\emptyset;7)| \sim \frac{4}{735}Q,\ B(2,3,5\ \emptyset;7) = \frac{8}{1715})$,
d) $2,3,7 \not| q, 5||q$ $\quad(|T(2,3,7;5;\emptyset)| \sim \frac{8}{175}Q,\ B(2,3,7;5;\emptyset) = \frac{6}{175})$,
e) $2,3,7 \not| q, 5^2|q$ $\quad(|T(2,3,7;\emptyset;5)| \sim \frac{2}{175}Q,\ B(2,3,7;\emptyset;5) = \frac{8}{875})$,
f) $2,3 \not| q, 5^2|q, 7^2|q$ $\quad(|T(2,3;\emptyset;5,7)| \sim \frac{1}{3675}Q,\ B(2,3;\emptyset;5,7) = \frac{8}{42875})$.

$q \notin \mathcal{E}$ ならば $\phi^*(q) \le \frac{2}{3}\phi(q)$ であるから, そのような q は L_Q の元となる．
さて,
1) 上からの評価

$$\sum_{q\in T(p_1,\cdots,p_4)}\frac{W(q/Q)}{\phi(q)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}^{*}N_d(\chi) \le B(p_1,\cdots,p_4)\cdot\frac{1}{2\pi}Q\log Q\,(1+o(1))$$

を用いると, $\mathcal{E}$ の元以外の $q \in [Q, 2Q]$ の寄与は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\{p_1,\cdots,p_4\}=\{2,3,5,7\} \\ q \notin \mathcal{E}}} \sum_{q \in T(p_1,\cdots,p_4)} \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi (\bmod q)}^{*} N_d(\chi) \\
&\leq (S_4 - B(2,3,5,7;\emptyset;\emptyset) - B(2,3,5;7;\emptyset) - B(2,3,5;\emptyset;7) \\
&\qquad - B(2,3,7;5;\emptyset) - B(2,3,7;\emptyset;5) - B(2,3;\emptyset;5,7)) \times \frac{1}{2\pi} Q \log Q\,(1+o(1)) \\
&= \frac{353711}{1852200} \cdot \frac{1}{2\pi} Q \log Q\,(1+o(1))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

と評価できる.

2) $L_Q \cap \mathcal{E}$ の元の個数は漸近的に

$$Q - \left(Q - \frac{8Q}{35} - \frac{8Q}{245} - \frac{4Q}{735} - \frac{8Q}{175} - \frac{2Q}{175} - \frac{Q}{3675} \right) - |U_Q| = \frac{397}{1225} Q - |U_Q|.$$

これらの q の寄与は,

$$\sum_{q \in L_Q \cap \mathcal{E}} \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi (\bmod q)}^{*} N_d(\chi) \leq \frac{1-\mu}{2\pi} \left(\frac{397}{1225} Q - |U_Q| \right) \log Q\,(1+o(1)). \tag{3.11}$$

3) U_Q の元の寄与は,

$$\sum_{q \in U_Q} \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi (\bmod q)}^{*} N_d(\chi) \leq \frac{1}{2\pi} |U_Q| \log Q\,(1+o(1)). \tag{3.12}$$

(3.10), (3.11) および (3.12) を合わせると,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_\Phi(Q)} \sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi (\bmod q)}^{*} N_d(\chi) \\
&\leq \frac{353711 Q \log Q}{3704400 \pi N_\Phi(Q)} + \frac{(1-\mu)\log Q}{2\pi N_\Phi(Q)} \left(\frac{397}{1225} Q - |U_Q| \right) + \frac{|U_Q| \log Q}{2\pi N_\Phi(Q)} + o(1)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

が得られる. (3.8), (3.13) および漸近公式

$$N_\Phi(Q) \sim \frac{AQ\log Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\Phi}(ix) \right|^2 dx = \frac{AQ\log Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx = \frac{A}{3} Q \log Q$$

により, 補題の評価を得る. □

Lemma 3.3. $0 < \mu < 1/3$ なる μ を任意に固定し, $q \in [Q, 2Q]$ は補題 *3.2* の条件 (3.9) を満たすものとする. そのとき, *mod* q の原始的指標 χ であって

$$N_d(\chi) \geq \frac{3}{10\pi} \log q \quad \left(= \frac{3}{10\pi} \log Q + O(1) \right) \tag{3.14}$$

を満たすものの個数は少なくとも

$$\frac{2-5\mu}{2} \phi(q).$$

Proof. mod q の原始的指標で (3.14) を満たすものの個数を U_q と表す. そのとき, (3.9) より,

$$\frac{1}{2\pi} |U_q| \log q + \frac{3}{10\pi} (\phi(q) - |U_q|) \log q \geq \frac{1-\mu}{2\pi} \phi(q) \log q.$$

よって,

$$|U_q| \geq \frac{2-5\mu}{2} \phi(q).$$

□

以後, 補題 3.2, 3.3 の条件を満たす q および $\chi \pmod q$ に焦点を当てる. $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\cdots$ を $g(x)$ の正の零点とする. これらは

$$\frac{1}{2}<\lambda_1<1<\lambda_2<\frac{3}{2}<\lambda_3<\cdots, \quad \lambda_k-\frac{k}{2}\searrow 0$$

を満たす. $L(s,\chi)$ の $\mathrm{Re}(s)=1/2$, $|\mathrm{Im}(s)|\le 1/2$ における一般の相異なる零点を $1/2+i\gamma_d$ と表し, $1/2+i\gamma_d$ の 1 つ上の零点を $1/2+i\gamma_d^+$ $(\gamma_d^+>\gamma_d)$ と表すことにする.

$$D_\chi=\{\gamma_d^+-\gamma_d\}$$

は, 上の領域における $L(s,\chi)$ の相異なる零点の差の集合である. $|D_\chi|=N_d(\chi)$ であり, D_χ の元の和は 1 である. $k=1,\cdots,8$ に対し, D_χ の元であって

$$\frac{(k-1)\pi}{\log Q}\le\gamma_d^+-\gamma_d<\frac{k\pi}{\log Q}$$

を満たすものの個数を n_k と表し, D_χ の元で

$$\gamma_d^+-\gamma_d\ge\frac{8\pi}{\log Q}$$

を満たすものの個数を n_9 とする. すると, 上に述べた事実により, $n_1,\cdots,n_9$ は次の 2 つの不等式を満たす:

$$n_1+n_2+\cdots+n_9=N_d(\chi)\ge\frac{3}{10\pi}\log Q, \tag{3.15}$$

$$\frac{\pi}{\log Q}n_2+\frac{2\pi}{\log Q}n_3+\cdots+\frac{8\pi}{\log Q}n_9\le 1. \tag{3.16}$$

特に, (3.16) により, $n_9\le\frac{\log Q}{8\pi}$ となる. 以下, n_9 に応じて場合分けを行う.

A) $\frac{17}{160\pi}\log Q\le n_9\le\frac{\log Q}{8\pi}$ ならば, (3.16) により,

$$\begin{aligned}n_2+n_3+\cdots+n_8&\le n_2+2n_3+\cdots+7n_8\\&\le\frac{\log Q}{\pi}-8n_9\\&\le\frac{\log Q}{\pi}-8\cdot\frac{17}{160\pi}\log Q=\frac{3}{20\pi}\log Q.\end{aligned}$$

よって, (3.15) により,

$$\begin{aligned}n_1&\ge\frac{3}{10\pi}\log Q-(n_2+n_3+\cdots+n_8)-n_9\\&\ge\frac{3}{10\pi}\log Q-\frac{3}{20\pi}\log Q-\frac{\log Q}{8\pi}\\&=\frac{\log Q}{40\pi}.\end{aligned}$$

n_1 に数えられる (γ_d,γ_d^+) の組の寄与を考えることにより,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma_\chi'\\ \gamma_\chi\ne\gamma_\chi'}}g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')&=2\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma_\chi'\\ \gamma_\chi>\gamma_\chi'}}g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi')\\&\ge 2g\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^4\times\frac{\log Q}{40\pi}\\&=\frac{4}{5\pi}g\left(\frac{1}{2}\right)\sin^4\frac{1}{2}\log Q\end{aligned}\tag{3.17}$$

を得る.

B) $n_9\le\frac{17}{160\pi}\log Q$ ならば, $N_d(\chi)\ge\frac{3}{10\pi}\log Q$ であるから,

$$N_d(\chi)-n_9\ge\frac{31}{48}N_d(\chi)=\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{48}\right)N_d(\chi)$$

となる．よって，D_χ の元のうち $\frac{8\pi}{\log Q}$ 以下のものの個数は少なくとも $(1/2+7/48)N_d(\chi)$ となる．これらの元からなる集合を $\tilde{D}_\chi$ と表す．$\tilde{D}_\chi$ の元のうち，

$$\left|x-\frac{2\pi\lambda_k}{\log Q}\right| \le \frac{2\pi\epsilon}{\log Q} \quad (1\le k\le 7),$$

のどれかに含まれるものの集合を N_χ と表し，$\tilde{D}_\chi$ における N_χ の補集合を M_χ とする．ここで，

$$\epsilon := \frac{7}{24}\min\{\lambda_k+\lambda_l-\lambda_{k+l} \mid 1\le k,l\le 7\}.$$

a) $|M_\chi| \ge \frac{7}{48}N_d(\chi)$ ならば，M_χ の元の寄与を考えることにより，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma_\chi' \\ \gamma_\chi\ne\gamma_\chi'}} & g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \\ &\ge \min\{g(\lambda_k\pm\epsilon), g(4)|1\le k\le 7\}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^4\times 2|M_\chi| \\ &\ge \frac{7}{5\pi}\min\{g(\lambda_k\pm\epsilon), g(4)|1\le k\le 7\}\sin^4\frac{1}{2}\log Q.\end{aligned} \tag{3.18}$$

b) $|M_\chi| = xN_d(\chi)$ $(0\le x\le \frac{7}{48})$ ならば，$|N_\chi| \ge (1/2+7/48-x)N_d(\chi)$ である．M_χ の元の $\sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi',\gamma_\chi\ne\gamma_\chi'}\cdots$ への寄与は少なくとも

$$\begin{aligned}&\min\{g(\lambda_k\pm\epsilon), g(4)|1\le k\le 7\}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^4\times 2|M_\chi| \\ &\quad= \frac{48}{5\pi}x\min\{g(\lambda_k\pm\epsilon), g(4)|1\le k\le 7\}\sin^4\frac{1}{2}\log Q.\end{aligned} \tag{3.19}$$

更に，この場合，γ_d であって $\gamma_d^+-\gamma_d$ および $\gamma_d^{++}-\gamma_d^+$ の両方が N_χ に属するものの個数は少なくとも

$$\left(\frac{7}{48}-x\right)N_d(\chi)\times 2 = \left(\frac{7}{24}-2x\right)N_d(\chi)$$

となる．γ_d, γ_d^+ と γ_d^{++} が

$$\left|(\gamma_d^+-\gamma_d)-\frac{2\pi\lambda_k}{\log Q}\right| \le \frac{2\pi\epsilon}{\log Q}, \quad \left|(\gamma_d^{++}-\gamma_d^+)-\frac{2\pi\lambda_l}{\log Q}\right| \le \frac{2\pi\epsilon}{\log Q},$$

をある $1\le k,l\le 7$ に対し満たすならば，

$$\left|(\gamma_d^{++}-\gamma_d)-\frac{2\pi\lambda_{k+l}}{\log Q}\right| \ge \frac{2\pi(\lambda_k+\lambda_l)}{\log Q}-\frac{2\pi\lambda_{k+l}}{\log Q}-\frac{4\pi\epsilon}{\log Q} \ge \frac{20\pi\epsilon}{7\log Q}.$$

よって，そのような (γ_d,γ_d^{++}) の $\sum_{\gamma_\chi,\gamma_\chi',\gamma_\chi\ne\gamma_\chi'}\cdots$ への寄与は少なくとも

$$\begin{aligned}&\min\{g(\lambda_{k+l}\pm\frac{10}{7}\epsilon)|1\le k,l\le 7\}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^4\times\left(\frac{7}{24}-2x\right)N_d(\chi)\times 2 \\ &\quad= \frac{48}{5\pi}\left(\frac{7}{24}-2x\right)\min\{g(\lambda_k\pm\frac{10}{7}\epsilon)|2\le k\le 14\}\sin^4\frac{1}{2}\log Q\end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．(関数 $h(y) := g((y\log Q)/2\pi)$ の零点のうち $\gamma_d^{++}-\gamma_d$ に最も近いものは λ_{k+l} であることに注意.) (3.19) と (3.20), を合わせて，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma_\chi,\gamma_\chi' \\ \gamma_\chi\ne\gamma_\chi'}} & g\left(\frac{(\gamma_\chi-\gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \\ &\ge \frac{48}{5\pi}g_1x\sin^4\frac{1}{2}\log Q+\frac{48}{5\pi}\left(\frac{7}{24}-2x\right)g_2\sin^4\frac{1}{2}\log Q \\ &= \left\{\frac{14}{5\pi}g_2+\frac{48}{5\pi}(g_1-2g_2)x\right\}\sin^4\frac{1}{2}\log Q\end{aligned} \tag{3.21}$$

が得られる. ここで

$$g_1 = \min\{g(\lambda_k \pm \epsilon), g(4) | 1 \le k \le 7\}, \quad g_2 = \min\{g(\lambda_k \pm \frac{10}{7}\epsilon) | 2 \le k \le 14\}.$$

数値計算により,

$$\lambda_7 = 3.51257987\cdots, \ \lambda_{14} = 7.00627925\cdots, \ \epsilon = \frac{7}{24}(2\lambda_7 - \lambda_{14}) = 0.00550681\cdots,$$

$$g_1 = g(\lambda_7 + \epsilon) = 8.2238\cdots \times 10^{-7}, \ g_2 = g(\lambda_{14} + \frac{10}{7}\epsilon) = 4.1805\cdots \times 10^{-7}.$$

$g_1 - 2g_2 < 0$ であるから, (3.21) の右辺は $x = 7/48$ のとき最小となる. よって, このとき

$$\sum_{\substack{\gamma_\chi, \gamma_\chi' \\ \gamma_\chi \neq \gamma_\chi'}} g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right) \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \ge \frac{7}{5\pi} g_1 \sin^4 \frac{1}{2} \log Q. \tag{3.22}$$

(3.17), (3.18), (3.22) を合わせて, 結論として

$$\sum_{\substack{\gamma_\chi, \gamma_\chi' \\ \gamma_\chi \neq \gamma_\chi'}} g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right) \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \ge g_3 \sin^4 \frac{1}{2} \log Q \tag{3.23}$$

を得る. ここで

$$g_3 = \min\left\{\frac{4}{5\pi} g\left(\frac{1}{2}\right), \frac{7}{5\pi} g_1\right\} = \frac{7}{5\pi} g_1 = 3.6648\cdots \times 10^{-7}.$$

今, q が補題 3.2 の条件 (3.9) を満たすならば, mod q の原始的指標で (3.23) を満たすものの個数は少なくとも $((2-5\mu)/2)\phi(q)$ となる. よって, そのような q に対し

$$\sum_{\chi (\mathrm{mod}\ q)}^{*} \sum_{\substack{\gamma_\chi, \gamma_\chi' \\ \gamma_\chi \neq \gamma_\chi'}} g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right) \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \ge \frac{2-5\mu}{2} g_3 \sin^4 \frac{1}{2}\ \phi(q) \log Q \tag{3.24}$$

となる. そのような $q \in [Q, 2Q]$ の個数は少なくとも

$$\left\{\left(\frac{M+1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{2A\pi}{3\mu} - \frac{353711}{1852200\mu} - \frac{397(1-\mu)}{1225\mu} + o(1)\right\} Q$$

であるから, $W(x)$ が $[1,2]$ の特性関数であること (これより $\widehat{W}(1) = 1$, $A = \prod_p (1 - 1/p^2 - 1/p^3) = 0.47914\cdots$) を用いると, 任意の $\mu < 1/3$ に対し,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{N_\Phi(Q)} \sum_q \frac{W(q/Q)}{\phi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ q)}^{*} \sum_{\substack{\gamma_\chi, \gamma_\chi' \\ \gamma_\chi \neq \gamma_\chi'}} g\left(\frac{(\gamma_\chi - \gamma_\chi')\log Q}{2\pi}\right) \widehat{\Phi}(i\gamma_\chi)\widehat{\Phi}(i\gamma_\chi') \\
&\ge \frac{1}{\frac{4}{3} Q \log Q} \cdot \frac{2-5\mu}{2} \left\{\left(\frac{M+1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{2A\pi}{3\mu} - \frac{353711}{1852200\mu} - \frac{397(1-\mu)}{1225\mu} + o(1)\right\} \\
&\qquad \times g_3 \sin^4 \frac{1}{2} Q \log Q \\
&= \frac{3(2-5\mu)}{2A} \left\{\left(\frac{M+1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{2A\pi}{3\mu} - \frac{353711}{1852200\mu} - \frac{397(1-\mu)}{1225\mu} + o(1)\right\} g_3 \sin^4 \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

となる. $\mu \nearrow 1/3$ として,

$$\begin{aligned}
E &\ge \frac{1}{2A} \left\{2\left(\frac{M+1}{2} - \delta_{\frac{1}{2}}\right) A\pi - \frac{753887}{617400}\right\} g_3 \sin^4 \frac{1}{2} \\
&= 7.686\cdots \times 10^{-10}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

を得る. このようにして E の下からの評価 (1.10) が得られる. これで定理 1.1 が証明された.

4 謝辞

本稿は 2014 年 10 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会『解析的整数論-数論的対象の分布と近似』における筆者の講演内容が基となっている. 講演と本稿の執筆の機会を与えていただいた名越弘文先生, 神谷諭一先生にこの場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

[1] B. Conrey, H. Iwaniec, K. Soundararajan, *Asymptotic large sieve*, preprint (2011), arXiv:1105.1176

[2] E. Carneiro, V. Chandee, F. Littmann, M. B. Milinovich, *Hilbert spaces and the pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function*, to appear in J. Reine Angew. Math.

[3] A. Y. Cheer, D. A. Goldston, *Simple zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 118, No. 2, 365-372

[4] V. Chandee, Y. Lee, S-C. Liu, M. Radziwiłł, *Simple zeros of primitive Dirichlet L-functions and the asymptotic large sieve* , Q. J. Math. **65** (2014), No. 1, 63-87

[5] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, pp. 181-193

[6] H. L. Montgomery, *Distribution of zeros of the Riemann zeta function*, Proc. Internat. Congr. Math. Vancouver, 1974, pp. 379-381

[7] A. E. Özlük, *On the q-analogue of the pair correlation conjecture*, J. Number Theory **59** (1996), 319-351

[8] A. Selberg, *Contributions to the theory of Dirichlet's L-functions*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. I, (1946), No.3, 1-62

Tokyo Denki University,
Muzaigakuendai, Inzai,
Chiba, Japan
E-mail address: souno@mail.dendai.ac.jp