数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 44-49

Mean values of Goss L-functions and Dedekind sums

岡山理科大学・理学部　浜畑　芳紀
Yoshinori Hamahata
Faculty of Science, Okayama University of Science

1 古典的結果

互いに素な整数 a と $c>0$ に対して, 古典的 Dedekind 和は

$$D(a,c)=\frac{1}{4c}\sum_{k=1}^{c-1}\cot\left(\frac{\pi ak}{c}\right)\cot\left(\frac{\pi k}{c}\right)$$

によって定義される. この和は有理数で, 相互法則と呼ばれる等式を満たす. n を 2 以上の整数とする. χ は n を法とする指標とし, $L(s,\chi)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\chi(l)}{l^{s}}$ は χ に対応する Dirichlet L-関数とする. 上述の Dedekind 和を用いて, Dirichlet L-関数の積の平均値を計算することができる. Walum [9], Louboutin [8], Zhang [11] は

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi \bmod n\\ \chi(-1)=-1}} L(1,\chi)L(1,\overline{\chi}) &= \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2}\phi(n)\sum_{b|n}b\mu\left(\frac{n}{b}\right)D(1,b) \\ &= \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2}\frac{\phi(n)^{2}}{12}\left(n\prod_{\substack{p|n\\ p:\mathrm{prime}}}\left(1+\frac{1}{p}\right)-3\right)\end{aligned} \tag{1}$$

を証明した. 但し, $\overline{\chi}$ は χ の複素共役, $\phi(n)$ は Euler 関数, $\mu(n)$ は Möbius 関数である. $m_{1},\ldots,m_{d}$ は非負整数とする. Bayad と Raouj は [4] の中で, 次のような平均値

$$\sum_{\chi_{1},\ldots,\chi_{d}}\prod_{i=1}^{d}\overline{\chi}_{i}(a_{i})L(m_{i}+1,\chi_{i}) \tag{2}$$

を考察した. ここで $\sum_{\chi_{1},\ldots,\chi_{d}}$ は, n を法とする指標 $\chi_{1},\ldots,\chi_{d}$ で, $\chi_{1}\cdots\chi_{d}=1$ かつ $\chi_{i}(-1)=(-1)^{m_{i}+1}$ $(i=1,\ldots,d)$ となるもの全体の和を表す. 彼らは上記の (1) を拡張するために次のような Dedekind 和を用いている. $b_{0},b_{1},\ldots,b_{d}$ は正整数で $b_{1},\ldots,b_{d}$ は b_{0} とそれぞれ互いに素とする. $m_{0},m_{1},\ldots,m_{d}$ は非負整数とするとき

$$C(b_{0};b_{1},\ldots,b_{d}|m_{0};m_{1},\ldots,m_{d})=\frac{1}{b_{0}^{m_{0}+1}}\sum_{j=1}^{b_{0}-1}\cot^{(m_{1})}\left(\frac{\pi b_{1}j}{b_{0}}\right)\cdots\cot^{(m_{d})}\left(\frac{\pi b_{d}j}{b_{0}}\right)$$

を多重 Dedekind–Rademacher 和という. ここで $\cot^{(m)}(x)$ は $\cot(x)$ の m 階導関数である. 特に $m_{0}=m_{1}=\cdots=m_{d}=0$ とするとこの和は, Zagier [10] の定義した高次元 Dedekind 和になる. この多重 Dedekind–Rademacher 和は有理数であり, 相互法則と呼ばれる法則を満たす ([3]). Bayad と Raouj [4] の主結果は次の通りである. (2) において $a_{d}=1$ とし, $a_{1},\ldots,a_{d-1}$ は n とそれぞれ互いに素と仮定する. $m_{1},\ldots,m_{d}$ は非負整数で, $m_{1}+\cdots+m_{d}+d$ が偶数となるものとする. その

とき

$$\sum_{\chi_1,\dots,\chi_d}\prod_{i=1}^{d}\overline{\chi}_i(a_i)L(m_i+1,\chi_i)$$
$$=\frac{(-1)^d}{2^d m_1!\cdots m_d!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{m_1+\cdots+m_d+d}\phi(n)^{d-1}\sum_{b|n}b\mu\left(\frac{n}{b}\right)C(b;a_1,\dots,a_d|0;m_1,\dots,m_d). \quad (3)$$

本稿では, (3) の関数体類似を与える.

2 A-格子と Dedekind 和

2.1 A-格子

$\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とし, $A:=\mathbb{F}_q[T]$, $K:=\mathbb{F}_q(T)$, $K_\infty:=\mathbb{F}_q((1/T))$ とおく. C_∞ は, K_∞ の代数的閉包の完備化とする. Λ が C_∞ の中の階数 r の A-格子であるとは, Λ が階数 r の有限生成 A-加群で, C_∞ の中で離散であるもののことである. そのような Λ に対して, 無限積 $e_\Lambda(z)=z\prod_{0\neq\lambda\in\Lambda}(1-z/\lambda)$ を定義すると, C_∞ の各点で収束してリジッド解析的な意味で整関数になる. $e_\Lambda(z)$ を微分すると 1 になることが知られている. 各 $a\in A$ に対して, $\phi_a(e_\Lambda(z))=e_\Lambda(az)$ をみたす多項式 $\phi_a(z)=\phi_a^\Lambda(z)=\sum l_i(\phi_a)z^{q^i}$ が一意的に存在する. $\tau=z^q$ とし, $C_\infty\{\tau\}$ は τ に関する非可換環で, $c^q\tau=\tau c\,(c\in C_\infty)$ の条件を満たすものとする. Λ の階数が r のとき

$$\phi_a(z)=\sum_{i=0}^{r\deg a}l_i(\phi_a)\tau^i \quad (l_0(\phi_a)=a)$$

と表せる. 写像 $\phi: A\to C_\infty\{\tau\}, a\mapsto\phi_a$ を C_∞ 上の階数 r の Drinfeld 加群という. ϕ は $\mathbb{F}_q$-線型環準同型写像なので, ϕ の像は ϕ_T によって定まる. 階数 1 の Drinfeld 加群 $\rho: A\to C_\infty\{\tau\}$ で $\rho_T=Tz+z^q$ で定義されるものを Carlitz 加群という.

A-格子 Λ に対して, $S_{k,\Lambda}=\sum_{\lambda\in\Lambda}(z+\lambda)^{-k}$ $(k\in\mathbb{N})$, $S_{0,\Lambda}=0$ とおく. このとき k 次モニック多項式（Goss 多項式という）$G_{k,\Lambda}(X)\in C_\infty[X]$ で次の条件をみたすものが存在する : (G1) $S_{k,\Lambda}=G_{k,\Lambda}(e_\Lambda(z)^{-1})$; (G2) $e_\Lambda(z)=\sum_{i=0}^\infty\alpha_i z^{q^i}$ のとき, $G_{k,\Lambda}(X)=X(G_{k-1,\Lambda}(X)+\alpha_1G_{k-q,\Lambda}(X)+\cdots+\alpha_iG_{k-q^i,\Lambda}(X)+\cdots)$; (G3) $G_{k,\Lambda}(0)=0$; (G4) $G_{k,\Lambda}(X)=X^k$ if $k\leq q$; (G5) $G_{pk,\Lambda}(X)=G_{k,\Lambda}(X)^p$; (G6) $X^2G'_{k,\Lambda}(X)=kG_{k+1,\Lambda}(X)$.

詳細については, Goss [6, 7] を参照されたい.

2.2 Dedekind 和

$a_0,a_1,\dots,a_d$ $(d\geq 1)$ は $A\setminus\{0\}$ の元で, $a_1,\dots,a_d$ はそれぞれ a_0 と互いに素とする. また, $m_0,\dots,m_d$ は非負整数とする.

定義 1 ([2]) A-格子 Λ に対する多重 Dedekind–Rademacher 和 $s_\Lambda(a_0;a_1,\dots,a_d|m_0;m_1,\dots,m_d)$ を

$$s_\Lambda(a_0;a_1,\dots,a_d|m_0;m_1,\dots,m_d)=\frac{1}{a_0^{m_0+1}}\sum_{0\neq\lambda\in\Lambda/a_0\Lambda}e_\Lambda\left(\frac{a_1\lambda}{a_0}\right)^{-m_1-1}\cdots e_\Lambda\left(\frac{a_d\lambda}{a_0}\right)^{-m_d-1}$$

によって定義する. ただし, $\Lambda/a_0\Lambda=\{0\}$ のとき, この和を 0 として定義する.

特に $m_0 = m_1 = \cdots = m_d = 0$ の場合の Dedekind 和は高次元 Dedekind 和と呼ばれ, Zagier [10] の定義した Dedekind 和の関数体類似となる（[1] を参照のこと）.

Λ に対応する Drinfeld 加群 ϕ を用いて, Dedekind 和の別の表示を与えることができる：

$$s_\Lambda(a_0; a_1, \ldots, a_d | m_0; m_1, \ldots, m_d) = \frac{1}{a_0^{m_0+1}} \sum_{0 \neq x \in \phi[a_0]} \phi_{a_1}(x)^{-m_1-1} \cdots \phi_{a_d}(x)^{-m_d-1}.$$

但し, $\phi[a] := \{x \in C_\infty \mid \phi_a(x) = 0\}$ は ϕ の a-分点全体の集合である. [2] では, この Dedekind 和に対する相互法則や Knopp 恒等式を証明している. 第 1 節で紹介した古典的な多重 Dedekind–Rademacher 和 $C(b_0; b_1, \ldots, b_d | m_0; m_1, \ldots, m_d)$ は, $m_1 + \cdots + m_d + d$ が奇数のとき 0 であることが知られている. 関数体の場合, $q-1$ の倍数が偶数の類似である. $q-1$ が $m_1 + \cdots + m_d + d$ を割らないとき, $s_\Lambda(a_0; a_1, \ldots, a_d | m_0; m_1, \ldots, m_d)$ は 0 になる. 実際, 定義の式で $\lambda \in \Lambda/a_0\Lambda \setminus \{0\}$ を $\zeta\lambda$ ($\zeta \in \mathbb{F}_q^*$) に取りかえることで示すことができる. $L = \bar{\pi} A$ は階数 1 の A-格子で Carlitz 加群 ρ に対応するものとする. このとき, $s_L(a_0; a_1, \ldots, a_d | m_0; m_1, \ldots, m_d)$ が第 1 節で定義された多重 Dedekind–Rademacher 和の関数体類似であり, K に値をとる. 特に

$$s_L(a, c) := s_L(c; a, 1 | 0; 0, 0) = \frac{1}{c} \sum_{0 \neq l \in L/cL} e_L\left(\frac{al}{c}\right)^{-1} e_L\left(\frac{l}{c}\right)^{-1}$$

は第 1 節で定義された古典的 Dedekind 和 $D(a, c)$ の関数体類似である.

3 Goss L-関数の平均値

3.1 Goss L-関数

A_+ を A のモニック元全体の集合とする. $M \in A_+$ で $\deg M = l > 0$ となるものをとる. $(A/MA)^*, C_\infty^*$ はそれぞれ, $A/MA, C_\infty$ の単数群とする. 群準同型 $\chi : (A/MA)^* \to C_\infty^*$ を M を法とする指標という. これは $\chi : A \to C_\infty^*$ に

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi(a + MA) & ((a, M) = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって拡張できる. 像が $\{1\}$ になる指標は主指標と呼ばれる. 指標 χ に対して, $\overline{\chi}$ を

$$\overline{\chi}(a) = \begin{cases} \chi(a + MA)^{-1} & ((a, M) = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって定義する.

$$L(s, \chi) = \sum_{a \in A_+} \frac{\chi(a)}{a^s} \quad (s \in \mathbb{N}),$$

を Goss L-関数という. この L-関数の値について次のことが知られている. χ が主指標のとき, $L(s, \chi)$ は K 上超越的である. $L(s, \chi)/\bar{\pi}^s$ が K 上有理的, 代数的, 超越的となる s, χ がある（[5] を参照のこと）. それゆえこの L-関数の積の平均値を調べることは実に興味深い. [2] では次の結果を証明した. 単数群 $(A/MA)^*$ の位数を $\Phi(M)$ で表す.

定理 2 ([2])

$$\sum_{\substack{\chi \bmod M \\ \chi|\mathbb{F}_q^*=\mathrm{id}}} L(1,\chi)L(1,\overline{\chi}) = -\frac{\overline{\pi}^2\Phi(M)}{M^2}\sum_{N|M} N\mu\left(\frac{M}{N}\right)s_L(1,N)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\overline{\pi}^2\Phi(M)}{M^2(T^3-T)}\displaystyle\sum_{N|M}\mu\left(\frac{M}{N}\right)(N^2-1) & (q=3\text{ のとき}), \\ -\dfrac{\overline{\pi}^2\Phi(M)}{M^2(T^4+T^2)}\displaystyle\sum_{N|M}\mu\left(\frac{M}{N}\right)(N^2-1) & (q=2\text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

但し $\sum_{N|M}$ は, M を割る $N \in A_+$ に関する和である.

これは第 1 節の (1) の結果の関数体類似である.

3.2 主結果

3.1 で与えた結果を拡張して次のような結果を得た.

定理 3 $a_1,\ldots,a_d \in A\setminus\{0\}$ はそれぞれ M と互いに素であるとし, 特に $a_d = 1$ とする. $m_1,\ldots,m_d$ は非負整数で $m_1+\cdots+m_d+d$ は $q-1$ で割り切れるものとする. そのとき

$$\sum_{\chi_1,\ldots,\chi_d}\prod_{i=1}^{d}\overline{\chi}_i(a_i)L(m_i+1,\chi_i)$$
$$= \left(\frac{\overline{\pi}}{M}\right)^{m_1+\cdots+m_d+d}(-\Phi(M))^{d-1}\sum_{\substack{b\in A_+ \\ \deg b<\deg M \\ (b,M)=1}}\prod_{i=1}^{d}G_{m_i+1,L}\left(e_L\left(\frac{\overline{\pi}a_ib}{M}\right)^{-1}\right) \tag{4}$$

が成立する. 但し $\sum_{\chi_1,\ldots,\chi_d}$ は, $\chi_1\cdots\chi_d = 1$, $\chi_i(\zeta) = \zeta^{m_i+1}$ ($\zeta \in \mathbb{F}_q^*, i = 1,\ldots,d$) となる M を法とする指標 $\chi_1,\ldots,\chi_d$ の和である.

この結果の条件を強めて次のような結果が得られる.

定理 4 定理 3 と同様の条件を仮定する. さらに各 m_i は, $p^{n_i}k_i - 1$ ($n_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $1 \le k_i \le q$) の形で書けると仮定する. そのとき

$$\sum_{\chi_1,\ldots,\chi_d}\prod_{i=1}^{d}\overline{\chi}_i(a_i)L(m_i+1,\chi_i) = -\left(\frac{\overline{\pi}}{M}\right)^{m_1+\cdots+m_d+d}\Phi(M)^{d-1}$$
$$\times\sum_{N|M}N\mu\left(\frac{M}{N}\right)s_L(N;a_1,\ldots,a_d|0;m_1,\ldots,m_d). \tag{5}$$

但し $\sum_{\chi_1,\ldots,\chi_d}$ は, $\chi_1\cdots\chi_d = 1$, $\chi_i(\zeta) = \zeta^{m_i+1}$ ($\zeta \in \mathbb{F}_q^*, i = 1,\ldots,d$) となる M を法とする指標 $\chi_1,\ldots,\chi_d$ の和であり, $\sum_{N|M}$ は, M を割る $N \in A_+$ に関する和である.

定理 4 は, Bayad–Raouj [4] の結果 (3) の関数体類似である. ここで $\overline{\pi}$ が K 上超越的である ([7]) という結果を思い出すと, $s_L(a_0;a_1,\ldots,a_d|m_0;m_1,\ldots,m_d) \in K$ より, (5) の平均値は 0 でなければ, K 上超越的であることがわかる.

4 主結果の証明の概略

次の結果を用いる.

補題 5 m は非負整数で, $M \in A_+$ の次数は $\deg M = l > 0$ とする. 指標 $\chi : (A/MA)^* \to C_\infty^*$ で $\chi(\zeta) = \zeta^{m+1}$ ($\zeta \in \mathbb{F}_q^*$) となるものに対して,

$$L(m+1,\chi) = \left(\frac{\overline{\pi}}{M}\right)^{m+1} \sum_{\substack{b \in A_+ \\ \deg b < l}} \chi(b) G_{m+1,L}\left(e_L\left(\frac{\overline{\pi} b}{M}\right)^{-1}\right).$$

さらに m が $m = p^n k - 1$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \le k \le q$) の形で書けるとき,

$$L(m+1,\chi) = -\left(\frac{\overline{\pi}}{M}\right)^{m+1} \sum_{\substack{b \in A/MA \\ (b,M)=1}} \chi(b) e_L\left(\frac{\overline{\pi} b}{M}\right)^{-m-1}.$$

補題 5 より, (4) の左辺は以下のように変形できる.

$$(\overline{\pi}/M)^{m_1+\cdots+m_d+d} \sum_{\chi_1,\ldots,\chi_d} \sum_{\substack{b_d \in A_+ \\ \deg b_d < \deg M \\ (b_d,M)=1}} \chi_d(b_d) G_{m_d+1,L}(e_L(\overline{\pi} b_d/M)^{-1})$$
$$\times \prod_{i=1}^{d-1} \overline{\chi}_i(a_i) \sum_{\substack{b_i \in A_+ \\ \deg b_i < \deg M \\ (b_i,M)=1}} \chi_i(b_i) G_{m_i+1,L}(e_L(\overline{\pi} b_i/M)^{-1}).$$

ここで $\chi_d(b_d) = \overline{\chi}_1(b_d) \cdots \overline{\chi}_{d-1}(b_d)$ を用いると

$$(\overline{\pi}/M)^{m_1+\cdots+m_d+d} \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_d \in A_+ \\ \deg b_1,\ldots,\deg b_d < \deg M \\ (b_1,M)=\cdots=(b_d,M)=1}} G_{m_d+1,L}(e_L(\overline{\pi} b_d/M)^{-1})$$
$$\times \prod_{i=1}^{d-1} G_{m_i+1,L}(e_L(\overline{\pi} b_i/M)^{-1}) \sum_{\chi_i} \chi_i(b_i) \overline{\chi}_i(a_i b_d).$$

これより定理 3 の結果が得られる. ここからは各 m_i は $p^{n_i} k_i - 1$ ($n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \le k_i \le q$) の形で書けているとする. 補題 5 より, (5) の左辺は次のように変形できる.

$$(-1)^d (\overline{\pi}/M)^{m_1+\cdots+m_d+d} \sum_{\chi_1,\ldots,\chi_d} \sum_{\substack{b_d \in A/MA \\ (b_d,M)=1}} e_L(\overline{\pi} b_d/M)^{-m_d-1}$$
$$\times \prod_{i=1}^{d-1} \overline{\chi}_i(a_i b_d) \sum_{\substack{b_i \in A/MA \\ (b_i,M)=1}} \chi_i(b_i) e_L(\overline{\pi}/M)^{-m_i-1}.$$

ここで $\chi_d(b_d) = \overline{\chi}_1(b_d) \cdots \overline{\chi}_{d-1}(b_d)$ を用いると

$$(-1)^d (\overline{\pi}/M)^{m_1+\cdots+m_d+d} \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_d \in A/MA \\ (b_1,M)=\cdots=(b_d,M)=1}} e_L(\overline{\pi} b_d/M)^{-m_d-1}$$
$$\times \prod_{i=1}^{d-1} e_L(\overline{\pi} b_i/M)^{-m_i-1} \sum_{\chi_i} \chi_i(b_i) \overline{\chi_i}(a_i b_d)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^d \left(\frac{\overline{\pi}}{M}\right)^{m_1+\cdots+m_d+d} \left(\frac{\Phi(M)}{q-1}\right)^{d-1} \sum_{\substack{b_d \in A/MA \\ (b_d, M)=1}} \prod_{i=1}^{d} e_L(\overline{\pi} a_i b_d/M)^{-m_i-1} \\
&= -\left(\frac{\overline{\pi}}{M}\right)^{m_1+\cdots+m_d+d} \Phi(M)^{d-1} \\
&\quad \times \sum_{N|M} \mu(M/N) \sum_{0 \neq b \in A/NA} \prod_{i=1}^{d} e_L(\overline{\pi} a_i b/N)^{-m_i-1}.
\end{aligned}
$$

これより定理 4 の結果が得られる.

参考文献

[1] A. Bayad and Y. Hamahata, Higher dimensional Dedekind sums in function fields, Acta Arithmetica **152** (2012), 71–80.

[2] A. Bayad and Y. Hamahata, Multiple Dedekind–Rademacher sums in function fields, Int. J. Number Theory **10** (2014), 1291–1307.

[3] A. Bayad and A. Raouj, Arithmetic of higher dimensional Dedekind–Rademacher sums, J. Number Theory **132** (2012), 332–347.

[4] A. Bayad and A. Raouj, Mean values of L-functions and Dedekind sums, J. Number Theory **132** (2012), 1645–1652.

[5] G. Damamme, Etude de $L(s,\chi)/\pi^s$ pour des fonctions L relatives à $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ et associées à des caractères de degré 1, J. Théorie Nombres Bordeaux **11** (1999), 369–385.

[6] D. Goss, The algebraist's upper half-plane, Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1980), 391–415.

[7] D. Goss, Basic Structures of Function Field Arithmetic, Springer, 1998.

[8] S. Louboutin, Quelques formules exactes pour des moyennes de fonctions L de Dirichlet, Canad. Math. Bull. **36** (1993), 190–196.

[9] H. Walum, An exact formula for an average of L-series, Illinois J. Math. **26** (1982), 1–3.

[10] D. Zagier, Higher dimensional Dedekind sums, Math. Ann. **202** (1973), 149–172.

[11] W. Zhang, On the mean values of Dedekind sums, J. Théorie Nombres Bordeaux **8** (1996), 429–442.