数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 139-151

一般化された数系に関するべき和と指数和への測度論的アプローチ
(Power and exponential sums for generalized coding systems by a measure theoretic approach)

大東文化大・経済　神谷諭一
Yuichi Kamiya
Department of Modern Economics
Faculty of Economics
Daito Bunka University
560 Iwadono, Higashi-Matsuyama,
Saitama, 355-8501, Japan
Email: ykamiya@ic.daito.ac.jp

福島県立医科大・医学　岡田達也
Tatsuya Okada
Department of Natural Sciences
Fukushima Medical University
Fukushima 960-1295, Japan
Email: tokada@fmu.ac.jp

東北学院大学・教養　関口健
Takeshi Sekiguchi
Department of Infomation Science
Faculty of Liberal Arts and Science
Tohoku Gakuin University
Sendai 981-3193, Japan
Email: ken@cs.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学・教養　塩田安信
Yasunobu Shiota
Department of Infomation Science
Faculty of Liberal Arts and Science
Tohoku Gakuin University
Sendai 981-3193, Japan
Email: shiota@cs.tohoku-gakuin.ac.jp

本稿では [9] で得られた結果の概略を紹介する.

1 paperfolding数列に対応する数系

一枚の紙を半分，半分と続けて折る作業を考える．折る方向に関して,「左半分を固定し，右半分を左半分の上側に重ねる折り方」を1で表し,「左半分を固定し，右半分を左半分の下側に重ねる折り方」を -1 で表すことにする．この1と -1 を folding instruction と呼ぶことにする．folding instruction からなる数列 $\boldsymbol{b}=\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ に従って，一枚の紙を半分，半分と続けて折り，開いたときに現れる形 $\vee$ と $\wedge$ を左から並べる．そして，$\vee$ に1を対応させ，$\wedge$ に -1 を対応させるとき，生じる数列が paperfolding数列 ($\{P_{\boldsymbol{b}}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ と記す) であると考えてよい．実際には，$\boldsymbol{b}=\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ は無限数列であり，無限回折ることはできないので，上の文章は paperfolding 数列の厳密な定義ではないが，気持ちは伝わるだろう．paperfolding 数列の定義の詳細は Allouche–Shallit [1, Section 6.5] や Dekking [2] を参照されたい．

特に，folding instruction からなる数列 $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\{1,1,1,\ldots\}$ (周期 1 の周期数列) であるとき，生じる数列を regular paperfolding 数列という．regular paperfolding 数列の最初の方を記すと，

$$1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,\ldots$$

である．一方，regular paperfolding 数列に対応する $\vee$ と $\wedge$ を並べてみると

$$\vee,\vee,\wedge,\vee,\vee,\wedge,\wedge,\vee,\vee,\vee,\wedge,\wedge,\vee,\wedge,\wedge,\ldots$$

であり，$\vee$ と $\wedge$ の開き方を 90° に調整するとドラゴン曲線になる (Figure 1 参照).

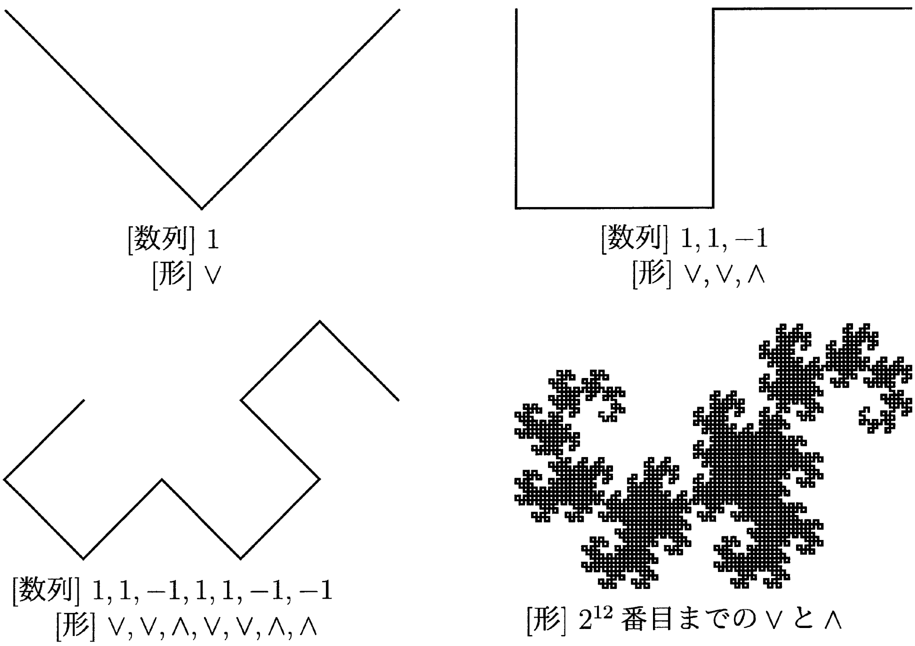

Figure 1: ドラゴン曲線

[8] において，$\boldsymbol{b}=\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ が $b_0=1$，かつ，周期 K の周期数列であるとき，$\{P_{\boldsymbol{b}}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を表現する数系 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}$ が導入された．まずはこの数系の紹介から始めよう．$\boldsymbol{b}$ の周期 K に対して，

$$\sigma_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 2^K-2 & 2^K-1 \\ 2^K-1 & 2^K-2 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なる置換 σ_0 を考える．

η は次の表で定まるものとする：

$\eta(l)$	word
$\eta(0)$	$0\cdots0\,0\,0\,0$
$\eta(1)$	$0\cdots0\,0\,0\,b_0$
$\eta(2)$	$0\cdots0\,0\,b_1b_0$
$\eta(3)$	$0\cdots0\,0\,b_1\,0$
$\eta(4)$	$0\cdots0b_2b_1\,0$
$\eta(5)$	$0\cdots0b_2b_1b_0$
$\eta(6)$	$0\cdots0b_2\,0\,b_0$
$\eta(7)$	$0\cdots0b_2\,0\,0$
$\vdots$	$\vdots$
$\eta(2^K-1)$	$b_{K-1}0\cdots\cdots0$

非負整数 n に対し, $n = 2^K j + l$ $(0 \leq l \leq 2^K - 1)$ で定まる整数 j, l を用いて，数系 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}$ を次のように定める：

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}(n) = \begin{cases} \eta(n), & 0 \leq n \leq 2^K - 1, \\ \mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}(j) \cdot \eta(\sigma_0^j(l)), & n \geq 2^K. \end{cases}$$

ただし，“$\cdot$” はワードの連接を意味する．

ワード $\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}(n)$ を構成するディジットの和を $S_{\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}}(n)$ と記すとき，

$$S_{\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}}(n) - S_{\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}}(n-1) = P_{\boldsymbol{b}}(n)$$

が成り立つことが [8] で証明された．この意味で，数系 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{b}}$ は自然な対象であり，次節で論じる数系 $\mathcal{C}_\sigma$ の導入の動機となっている．

2　置換 σ を含む数系 $\mathcal{C}_\sigma$ の導入

q を 2 以上の整数とする. σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & q-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(q-1) \end{pmatrix}$$

なる置換とする．

定義 1. 非負整数 n に対し, $n = qj + l$ $(0 \leq l \leq q-1)$ で定まる整数 j, l を用いて，数系 $\mathcal{C}_\sigma$ を次のように定める：

$$\mathcal{C}_\sigma(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq q-1, \\ \mathcal{C}_\sigma(j) \cdot \sigma^j(l), & n \geq q. \end{cases}$$

ただし，“$\cdot$” はワードの連接を意味する．

定義 2. 非負整数 n に対し，ワード $\mathcal{C}_\sigma(n)$ を構成するディジットの和を $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ と記す．非負整数 n と $1 \le l \le q-1$ なる整数 l に対し，ワード $\mathcal{C}_\sigma(n)$ におけるディジット l の個数を $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,l)$ と記す．ベクトル $(S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,1),\ldots,S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,q-1))$ を $\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ と記す．

例 1. 通常の q 進数系は，定義 1 の観点からは，$\sigma = \mathrm{id}$ (恒等置換) の場合の $\mathcal{C}_\sigma$ とみなすことができる．2 進数系を Table 1 に表しておこう．

n	j	l	$\mathcal{C}_\sigma(j)\cdot\sigma^j(l)$	$\mathcal{C}_\sigma(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$
0			0	0	0
1			1	1	1
2	1	0	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot 0$	10	1
3	1	1	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot 1$	11	2
4	2	0	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot 0$	100	1
5	2	1	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot 1$	101	2
6	3	0	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot 0$	110	2
7	3	1	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot 1$	111	3

Table 1: 2 進数系

$\sigma = \mathrm{id}$ のときの $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ (ベクトル $\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$) は通常の q 進数系のディジット和であり，以前から研究されてきているという意味で $S_q(n)$ (ベクトル $\boldsymbol{S}_q(n)$) と記すことにしよう．$S_q(n)$ は様々な方面から研究されている．その研究の歴史に関しては，例えば，Allouche–Shallit [1, pp.119–127] を参照されることにして，ここでは，測度論的手法による研究 ([6]，[15]，[12]，[13]，[14]，[11]) を紹介しよう．

$[0,1]$ 区間を I と記す．I を $I_0(0)$ とも書くことにする．固定された自然数 k に対し，I の部分区間を

$$\begin{aligned} I_k(n) &= \Big[\frac{n}{q^k}, \frac{n+1}{q^k}\Big), \quad 0 \le n \le q^k - 2, \\ I_k(q^k-1) &= \Big[\frac{q^k-1}{q^k}, 1\Big], \end{aligned}$$

で定める．$\{I_k(n); 0 \le n \le q^k-1\}$ から生成される有限加法族を $\mathcal{F}_k$ と記し，$\cup_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k$ から生成される加法族を $\mathcal{F}$ と記す．ベクトル $\boldsymbol{r} = (r_0,\ldots,r_{q-2})$ は $0 < r_j < 1$ $(0 \le j \le q-2)$，かつ，$0 < \sum_{j=0}^{q-2} r_j < 1$ を満たすものとし，$r_{q-1} = 1 - \sum_{j=0}^{q-2} r_j$ とおく．$\mu_{\boldsymbol{r}}$ を
(i) $\mu_{\boldsymbol{r}}(I) = 1$,
(ii) $0 \le n \le q^k - 1$ なる整数 n と $n = qj + l$ $(0 \le l \le q-1)$ なる整数 j, l に対し，

$$\mu_{\boldsymbol{r}}(I_k(n)) = \mu_{\boldsymbol{r}}(I_{k-1}(j)) \times r_l,$$

で定める．このとき，$\mu_{\boldsymbol{r}}$ は $\mathcal{F}$ 上の測度に拡張され (拡張されたものも $\mu_{\boldsymbol{r}}$ と記す)，$(I, \mathcal{F}, \mu_{\boldsymbol{r}})$ は確率空間となる．[15]，[12]，[13]，[14]，[11] では，分布関数

$$L_{\boldsymbol{r}}(x) = \mu_{\boldsymbol{r}}([0,x]), \quad x \in I,$$

に関連して，次の結果が導かれた：

1. N を自然数とする．$t = \log N / \log q$ とし，t の整数部分，小数部分を各々，$\lfloor t \rfloor$, $\{t\}$ と記す．ベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$ は各成分が実数値をとるものとし，$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{S}_q(n) \rangle$ は $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{S}_q(n)$ の内積を表すものとする．$\boldsymbol{r} = (r_0, \ldots, r_{q-2})$ の成分を
$$r_0 = \frac{1}{1 + e^{\xi_1} + \cdots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad r_l = \frac{e^{\xi_l}}{1 + e^{\xi_1} + \cdots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad 1 \le l \le q-1,$$
で与えるとき，
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{S}_q(n) \rangle} = \frac{1}{r_0^{\lfloor t \rfloor + 1}} L_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}} \right) \tag{1}$$
が成り立つ．

2. $L_{\boldsymbol{r}}(x)$ は $\boldsymbol{r}$ の各成分について無限回微分可能である．そこで，(1) の両辺を $\boldsymbol{\xi}$ の各成分で高階微分することができ，その後に $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$ とおけば，
$$\sum_{n=0}^{N-1} S_q^{k_1}(n,1) \cdots S_q^{k_{q-1}}(n, q-1)$$
の $L_{\boldsymbol{r}}(x)$ を用いた表現式が得られる．

3. $L_{\boldsymbol{r}}(x)$ の $\boldsymbol{r}$ の各成分についての高階導関数 $\frac{\partial^{u_0 + \cdots + u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0} \cdots \partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_{\boldsymbol{r}}(x)$ は高木関数を一般化した関数で記述できる．

$q = 2$ のときは，$\boldsymbol{r} = r_0$ である．$L_{r_0}(x)$ の r_0 についての導関数が高木関数と密接に関連することが，畑–山口による先駆的な研究 [6] によって発見された．測度論の立場からの接近を試み，[6] の結果を一般の q と高階導関数へと拡張したものが，上記の 3. である．

例 2. $q = 2$，かつ，$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathcal{C}_\sigma$ は Reflected Binary Code (RBC) と呼ばれる数系になる．RBC を Table 2 に表しておこう．この場合の $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ も以前から研究されてきているという意味で $S_{\mathrm{RBC}}(n)$ と記すことにしよう．$S_{\mathrm{RBC}}(n)$ の研究については，Flajolet–Ramshaw [3], Flajolet–Grabner–Kirschenhofer–Prodinger–Tichy [4], Grabner–Tichy [5], [7], [8], 小林 [10] などがある．[10] により，[15]，[14] による測度論的手法は RBC の場合でも有効であることが示された．

n	j	l	$\mathcal{C}_\sigma(j)\cdot\sigma^j(l)$	$\mathcal{C}_\sigma(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$
0			0	0	0
1			1	1	1
2	1	0	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot\sigma^1(0)$	11	2
3	1	1	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot\sigma^1(1)$	10	1
4	2	0	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot\sigma^2(0)$	110	2
5	2	1	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot\sigma^2(1)$	111	3
6	3	0	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot\sigma^3(0)$	101	2
7	3	1	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot\sigma^3(1)$	100	1

Table 2: RBC

例 3. $q=3$，かつ，$\sigma=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}$ のとき, $\mathcal{C}_\sigma$ は次の Table 3 のようになる.

n	j	l	$\mathcal{C}_\sigma(j)\cdot\sigma^j(l)$	$\mathcal{C}_\sigma(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,1)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,2)$
0			0	0	0	0	0
1			1	1	1	1	0
2			2	2	2	0	1
3	1	0	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot\sigma^1(0)$	11	2	2	0
4	1	1	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot\sigma^1(1)$	12	3	1	1
5	1	2	$\mathcal{C}_\sigma(1)\cdot\sigma^1(2)$	10	1	1	0
6	2	0	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot\sigma^2(0)$	22	4	0	2
7	2	1	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot\sigma^2(1)$	20	2	0	1
8	2	2	$\mathcal{C}_\sigma(2)\cdot\sigma^2(2)$	21	3	1	1
9	3	0	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot\sigma^3(0)$	110	2	2	0
10	3	1	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot\sigma^3(1)$	111	3	3	0
11	3	2	$\mathcal{C}_\sigma(3)\cdot\sigma^3(2)$	112	4	2	1

Table 3: 例 3

例 4. $q=2^K$ $(K\in\mathbf{N})$, かつ，$\sigma=\sigma_0$ (σ_0 は前節のものと同一) のときの $\mathcal{C}_\sigma$ を考える．このとき，$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,l)$ は，前節の $S_{\mathcal{C}_b}(n)$ と密接に関連する．実際に，前節のワード $\eta(l)$ を構成するディジットの和を $\overline{\eta(l)}$ と記すとき,

$$S_{\mathcal{C}_b}(n)=\sum_{l=1}^{2^K-1}\overline{\eta(l)}S_{\mathcal{C}_\sigma}(n,l)$$

が成り立つ.

以上の背景をもとにし，

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_1}(n,1)\cdots S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_{q-1}}(n,q-1)$$

を測度論的手法で研究することが，[9] の目的である．

3 置換 σ を含む確率測度 $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$ の導入

$[0,1]$ 区間を I と記す．固定された自然数 k に対し，I の部分区間を

$$\begin{aligned} I_k(n) &= [\frac{n}{q^k},\frac{n+1}{q^k}),\quad 0\le n\le q^k-2, \\ I_k(q^k-1) &= [\frac{q^k-1}{q^k},1], \end{aligned}$$

で定める．$\{I_k(n); 0\le n\le q^k-1\}$ から生成される有限加法族を $\mathcal{F}_k$ と記し，$\cup_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k$ から生成される加法族を $\mathcal{F}$ と記す．

定義 3. ベクトル $\boldsymbol{d}=(d_0,\ldots,d_{q-2})$ は $0<d_j<1$ $(0\le j\le q-2)$，かつ，$0<\sum_{j=0}^{q-2}d_j<1$ を満たすものとし，$d_{q-1}=1-\sum_{j=0}^{q-2}d_j$ とおく．また，ベクトル $\boldsymbol{r}=(r_0,\ldots,r_{q-2})$ は $0<r_j<1$ $(0\le j\le q-2)$，かつ，$0<\sum_{j=0}^{q-2}r_j<1$ を満たすものとし，$r_{q-1}=1-\sum_{j=0}^{q-2}r_j$ とおく．このとき，置換 σ を含む $(I,\mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$ を以下で定める：
(i) $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I)=1$,
(ii) $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_1(n))=d_n,\quad 0\le n\le q-1$,
(iii) $k\ge 2$ とする．$0\le n\le q^k-1$ なる整数 n と $n=qj+l$ $(0\le l\le q-1)$ なる整数 j, l に対し，

$$\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_k(n))=\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_{k-1}(j))\times r_{\sigma^j(l)}.$$

定義 4. $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$ に対応する分布関数 $L_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$ を

$$L_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(x)=\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}([0,x]),\quad x\in I,$$

によって定める．なお，$L_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}}$ は $L_{\boldsymbol{r}}$ と省略することにする．

4 結果

まず，[11, Theorem 2.1] や [10, Theorem 1] の自然な拡張として，次を得る．

定理 1. N を自然数とする．$t = \log N / \log q$ とし，t の整数部分，小数部分を各々，$\lfloor t \rfloor$, $\{t\}$ と記す．ベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$ は各成分が実数値をとるものとし，$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{S}_{C_\sigma}(n) \rangle$ は $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{S}_{C_\sigma}(n)$ の内積を表すものとする．$\boldsymbol{r} = (r_0, \ldots, r_{q-2})$ の成分を

$$r_0 = \frac{1}{1 + e^{\xi_1} + \cdots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad r_l = \frac{e^{\xi_l}}{1 + e^{\xi_1} + \cdots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad 1 \leq l \leq q-1,$$

で与え，定義 4 における $L_{\boldsymbol{r}}$ を考えるとき，

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{S}_{C_\sigma}(n) \rangle} = \frac{1}{r_0^{\lfloor t \rfloor + 1}} L_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}} \right) \tag{2}$$

が成り立つ．

次に，$L_{\boldsymbol{r}}(x)$ の $\boldsymbol{r}$ の各成分についての微分可能性について，次を得る．

定理 2. $L_{\boldsymbol{r}}(x)$ は $0 < r_j < 1$ $(0 \leq j \leq q-2)$，かつ，$0 < \sum_{j=0}^{q-2} r_j < 1$ を満たす $\boldsymbol{r} = (r_0, \ldots, r_{q-2})$ の各成分について無限回微分可能である．

定理 1 と 2 にもとづき，(2) の両辺を各変数 ξ_l に関して各々 k_l 回微分し，その後で $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$ とおけば，

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_{C_\sigma}^{k_1}(n,1) \cdots S_{C_\sigma}^{k_{q-1}}(n, q-1) = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_{q-1}}}{\partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_{q-1}^{k_{q-1}}} \left(\frac{1}{r_0^{\lfloor t \rfloor + 1}} L_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{q^{1-\lfloor t \rfloor}} \right) \right) \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}} \tag{3}$$

を得る．[11, Theorem 2.2] と同様にして (3) の右辺を計算していくと，次を得る．

定理 3. ベクトル $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_{q-1})$ と $\boldsymbol{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{q-1})$ に対して，$a(\boldsymbol{m}, x)$ を

$$a(\boldsymbol{m}, x) = \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_{q-1}}}{\partial \xi_1^{m_1} \cdots \partial \xi_{q-1}^{m_{q-1}}} \left(\frac{1 + e^{\xi_1} + \cdots + e^{\xi_{q-1}}}{q} \right)^x \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}}$$

によって定め，$a^{(i)}(\boldsymbol{m}, x)$ を $a^{(i)}(\boldsymbol{m}, x) = (d^i/dx^i) a(\boldsymbol{m}, x)$ によって定める．変数 $t > 0$ の関数 $H_{\boldsymbol{k},i}(t)$ を

$$\begin{aligned} H_{\boldsymbol{k},i}(t) \quad &= \quad \frac{q^i}{i!} \sum_{j_1=0}^{\min\{k_1, |\boldsymbol{k}|-i\}} \cdots \sum_{j_{q-1}=0}^{\min\{k_{q-1}, |\boldsymbol{k}| - (j_1 + \cdots + j_{q-2}) - i\}} \binom{k_1}{j_1} \cdots \binom{k_{q-1}}{j_{q-1}} \\ &\times q^{1-\{t\}} a^{(i)}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{j}, 1 - \{t\}) \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_{q-1}}}{\partial \xi_1^{j_1} \cdots \partial \xi_{q-1}^{j_{q-1}}} L_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}} \right) \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}} \end{aligned} \tag{4}$$

によって定める．ただし，$\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_{q-1})$, $|\boldsymbol{k}|=k_1+\cdots+k_{q-1}$, $\boldsymbol{j}=(j_1,\ldots,j_{q-1})$ であり，和の取り方の一般形は

$$\sum_{j_*=0}^{\min\{k_*,|\boldsymbol{k}|-(j_1+\cdots+j_{*-1})-i\}}$$

である．このとき，$H_{\boldsymbol{k},i}(t)$ は変数 t について連続，かつ，周期 1 の周期関数であり

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_1}(n,1)\cdots S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_{q-1}}(n,q-1)=\sum_{i=0}^{|\boldsymbol{k}|}\left(\frac{\log N}{q\log q}\right)^i H_{\boldsymbol{k},i}\left(\frac{\log N}{\log q}\right)$$

が成り立つ．

注意 1. 定理 1，2，3 では，置換 σ に関する制約は何ら必要ないのだが，後述の定理 4 では，置換 σ に関して $\sigma^q=\mathrm{id}$ を仮定せざるを得なかった．仮定 $\sigma^q=\mathrm{id}$ を外した定理 4 に該当する結果を導くことは，今後の一つの課題である．なお，例 1，2，3，4 における σ は全て $\sigma^q=\mathrm{id}$ を満たしている．

仮定. これ以降では，置換 σ に関して $\sigma^q=\mathrm{id}$ を仮定する．

(4) 内の $\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_{q-1}}}{\partial\xi_1^{j_1}\cdots\partial\xi_{q-1}^{j_{q-1}}}L_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\right)$ は合成関数の微分であり，これをさらに精密に表現するために，$L_{\boldsymbol{r}}(x)$ の $\boldsymbol{r}$ の各成分についての高階導関数 $\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}(x)$ の明示公式を導きたい．そのために，まずは記号を導入しておこう．ベクトル $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{e}_l$, $\boldsymbol{u}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q} &= (\underbrace{1/q,\ldots,1/q}_{q-1}),\\
\boldsymbol{e}_l &= (\underbrace{0,\ldots,0,\overset{l}{1},0\ldots,0}_{q-1}),\quad 0\le l\le q-2,\\
\boldsymbol{u} &= (u_0,\ldots,u_{q-2}),\quad u_l\in\mathbf{N}\cup\{0\},
\end{aligned}$$

とし，

$$|\boldsymbol{u}|=u_0+u_1+\cdots+u_{q-2},\quad \boldsymbol{u}!=\prod_{l=0}^{q-2}u_l!,$$

と定める．非負整数 n に対し，ベクトル $\boldsymbol{r}_{\sigma^n}$ を

$$\boldsymbol{r}_{\sigma^n}=\left(r_{\sigma^n(0)},\ldots,r_{\sigma^n(q-2)}\right)$$

で定める．ある集合 S の指示関数を $\mathbf{1}_S$ と記すことにし，I 上の関数 Φ_l を

$$\Phi_l = \sum_{j=0}^{q-1} \mathbf{1}_{I_2(qj+\sigma^{-j}(l))}, \quad 0 \leq l \leq q-1,$$

で定める．I 上の関数 $\phi(x)$ を $\phi(x) = qx \pmod 1$ で定める．ただし，$\phi(x)$ の不連続点での値は，$x \in [0,1)$ のときは $0 \leq \phi(x) < 1$ となるように，$x = 1$ のときは $\phi(x) = 1$ と定めておく．I 上のある関数 f に対し，

$$f \circ \phi^j(x) = f(\underbrace{\phi(\phi(\cdots \phi}_{j}(x))))$$

と記すことにする．I 上のルベーグ測度を μ で表す．

定義 5. 一般化された高木関数 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}}(x)$，$\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}}(x)$ を，以下のように帰納的に定める：
(i) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_l$ のとき，

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_l}(x) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{q^j-1} \mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_j(n)) \mathbf{1}_{I_j(n)}(x) \int_0^{\phi^j(x)} \left(\frac{\Phi_l}{r_l} - \frac{\Phi_{q-1}}{r_{q-1}} \right) d\mu_{\boldsymbol{r}_{\sigma^n},\boldsymbol{r}}$$

と定める．特に，

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{e}_l}(x) = \mathcal{T}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\boldsymbol{e}_l}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q^j} \int_0^{\phi^j(x)} (\Phi_l - \Phi_{q-1}) d\mu.$$

(ii) $|\boldsymbol{u}| \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}}(x) = &\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ u_\alpha>0}}^{q-2} \left(\left(\frac{\Phi_\alpha}{r_\alpha} - \frac{\Phi_{q-1}}{r_{q-1}} \right) \circ \phi^j(x) \right) \\ &\times \sum_{n=0}^{q^{j+1}-1} \mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_{j+1}(n)) \mathbf{1}_{I_{j+1}(n)}(x) \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{r}_{\sigma^n},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{e}_\alpha} \circ \phi^{j+1}(x) \right)\end{aligned}$$

と定める．特に，

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}}(x) = \mathcal{T}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q^j} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ u_\alpha>0}}^{q-2} \left((\Phi_\alpha - \Phi_{q-1}) \circ \phi^j(x) \right) \times \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{e}_\alpha} \circ \phi^{j+1}(x) \right).$$

以上の記号の準備のもとで，一般化された高木関数による $\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}(x)$ の明示公式を述べよう．

定理 4. $\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}(x)$ について，次が成り立つ：

(i) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_l$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial r_l}L_{\boldsymbol{r}}(x) &= (\mathbf{1}_{I_1(l)}(x)-\mathbf{1}_{I_1(q-1)}(x))(L_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}}(x)-x)\\ &\quad+\Bigl(q\sum_{n=0}^{q-1}r_n\mathbf{1}_{I_1(n)}(x)\Bigr)\mathcal{T}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_l}(x)+\int_0^x(\mathbf{1}_{I_1(l)}-\mathbf{1}_{I_1(q-1)})d\mu.\end{aligned}$$

(ii) $|\boldsymbol{u}|\geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{q\boldsymbol{u}!}\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}(x) &= q\sum_{\substack{j=0\\u_j>0}}^{q-2}(\mathbf{1}_{I_1(j)}(x)-\mathbf{1}_{I_1(q-1)}(x))\mathcal{T}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{e}_j}(x)\\ &\quad+\Bigl(q\sum_{n=0}^{q-1}r_n\mathbf{1}_{I_1(n)}(x)\Bigr)\mathcal{T}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}}(x).\end{aligned}$$

注意 2. ここで，定義3について論じておきたい．定理1，2，3のみならば，定義3の (ii) を削除して，(iii) の $k\geq 2$ の部分を $k\geq 1$ に取り替えたものを定義としても問題は起こらない．定理1，2，3は $L_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}}$ に関する主張であるからである．一方，定義5と定理4から，一般化された高木関数 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}}(x)$ を導入するためには，定義3の (ii) が必要であることがわかる．今回の論文による定義3の導入は，$\sigma^q=\mathrm{id}$ を満たす置換 σ を含む数系 $\mathcal{C}_\sigma$ に連動したものだといえる．

(4) 内の $\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_{q-1}}}{\partial\xi_1^{j_1}\cdots\partial\xi_{q-1}^{j_{q-1}}}L_{\boldsymbol{r}}\bigl(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\bigr)\Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}}$ は $\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}\bigl(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\bigr)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}}$ によって表すことができる．そこで，定理4にて $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}$ とおこう．$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}$ ならば，$\mu_{\boldsymbol{r}_{\sigma^n},\boldsymbol{r}}$ と $\mu_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}}$ はともにルベーグ測度 μ となることに注意すれば，次を得る．

系 1. $\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}(x)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}}$ について，次が成り立つ．

(i) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_l$ のとき，

$$\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial r_l}L_{\boldsymbol{r}}(x)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}}=\mathcal{T}_{\boldsymbol{e}_l}(x)+\int_0^x(\mathbf{1}_{I_1(l)}-\mathbf{1}_{I_1(q-1)})d\mu.$$

(ii) $|\boldsymbol{u}|\geq 2$ のとき，

$$\frac{1}{q\boldsymbol{u}!}\frac{\partial^{u_0+\cdots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\cdots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_{\boldsymbol{r}}(x)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}}=q\sum_{\substack{j=0\\u_j>0}}^{q-2}(\mathbf{1}_{I_1(j)}(x)-\mathbf{1}_{I_1(q-1)}(x))\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{e}_j}(x)+\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}}(x).$$

References

[1] J. P. Allouche and J. Shallit, Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] M. Dekking, Paperfolding morphisms, planefilling curves, and fractal tiles. Theor. Comput. Sci., 414 (2012), 20–37.

[3] P. Flajolet and L. Ramshaw, A note on Gray code and odd-even merge. SIAM J. Comput., 9 (1980), 142–158.

[4] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhofer, H. Prodinger and R. F. Tichy, Mellin transforms and asymptotics: digital sums. Theor. Comput. Sci., 123 (1994), 291–314.

[5] P. J. Grabner and R. F. Tichy, Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences. J. Number Theory, 36 (1990), 160–169.

[6] M. Hata and M. Yamaguti, The Takagi function and its generalization. Japan J. App. Math., 1 (1984), 183–199.

[7] Y. Kamiya and L. Murata, Relations among arithmetical functions, automatic sequences, and sum of digits functions. J. Théor. Nombres Bordeaux, 24 (2012), 307–337.

[8] Y. Kamiya and L. Murata, Certain codes related with generalized paperfolding sequences. to appear in J. Théor. Nombres Bordeaux.

[9] Y. Kamiya, T. Okada, T. Sekiguchi, Y. Shiota, Power and exponential sums for generalized coding systems by a measure theoretic approach, preprint

[10] Z. Kobayashi, Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers. Interdiscip. Inform. Sci., 8 (2002), 167–175.

[11] K. Muramoto, T. Okada, T. Sekiguchi, and Y. Shiota, Power and exponential sums of digital sums with information per digits. Math. J. of Toyama Univ., 26 (2003), 35–44.

[12] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, Applications of binomial measures to power sums of digital sums. J. Number Theory, 52 (1995), 256–266.

[13] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, An explicit formula of the exponential sums of digital sums. Japan J. Indust. Appl. Math., 12 (1995), 425–438.

[14] T. Okada, T. Sekiguchi, and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results of the Takagi function II: multinomial case. Japan J. App. Math., 13 (1996), 435–463.

[15] T. Sekiguchi and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results of the Takagi function. Japan J. App. Math., 8 (1991), 203–219.